Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. И. Манько, Л. А. Маркович, Ненормированные то-
мограммы и квазираспределения квантовых состояний,
ТМФ, 2018, том 197, номер 2, 328–342

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf9562>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru под-
разумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.187.58

26 апреля 2023 г., 13:15:40

© 2018 г.

В. И. Манько^{*†}, Л. А. Маркович^{†‡§¶}

НЕНОРМИРОВАННЫЕ ТОМОГРАММЫ И КВАЗИРАСПРЕДЕЛЕНИЯ КВАНТОВЫХ СОСТОЯНИЙ

Рассматриваются томограммы и квазираспределения, такие как функции Вигнера, P -функция Глаубера–Сударшана и Q -функция Хусими, нарушающие стандартное условие нормировки для функции распределения вероятности. В этом случае преобразование Радона функции Вигнера может быть неприменимо для определения томограммы. Также выражения для функции Вигнера и томограммы через волновую функцию и матрицу плотности перестают быть обратимыми. Получены условия, налагаемые на функцию Вигнера и томограмму, которые позволяют обойти эти ограничения. Изучены три различных квантовых состояния: плоская волна де Бройля, затвор Мошинского и движение заряженной частицы в равномерном и постоянном электрическом поле. Их томограммы и функции квазираспределения, выражающиеся в терминах дельта-функции Дирака, функции Эйри и интегралов Френеля, нарушают условия нормировки.

Ключевые слова: квантовая томография, квазираспределение, условие нормировки, плоская волна, затвор Мошинского, частица в электрическом поле.

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf9562>

1. ВВЕДЕНИЕ

Наряду с известными формулировками квантовой механики с использованием волновой функции, матрицы плотности, интеграла по траекториям, метода вторичного квантования, вариационного принципа, подхода Гамильтона–Якоби, часто

Исследования Л. А. Маркович в разделах 3 и 4 частично выполнены при поддержке гранта Российского научного фонда № 14-50-00150.

^{*}Физический институт им. П. Н. Лебедева РАН, Москва, Россия

[†]Московский физико-технический институт (государственный университет), Долгопрудный, Московская обл., Россия. E-mail: kimo1@mail.ru

[‡]Институт проблем передачи информации им. А. А. Харкевича РАН, Москва, Россия

[§]Институт проблем управления им. В. А. Трапезникова РАН, Москва, Россия

[¶]Международный центр квантовой оптики и квантовых технологий (Российский квантовый центр), Москва, Россия

встречающимся в литературе способом описания квантово-механической системы в фазовом пространстве является метод функций распределения Вигнера $W(q, p)$ [1]. Для заданного состояния $|\psi\rangle$ можно ввести оператор матрицы плотности $\hat{\rho} = |\psi\rangle\langle\psi|$ и выразить в координатном q - или импульсном p -представлении. Тогда распределение Вигнера можно интерпретировать как промежуточное представление. Однако функция Вигнера является квазираспределением. Дело в том, что классическая вероятность $F(q, p)$ удовлетворяет условиям

$$F(q, p) \geq 0, \quad \iint_{-\infty}^{\infty} F(q, p) dq dp = 1, \quad (1.1)$$

а функция Вигнера может принимать отрицательные значения. Существуют и другие функции квазираспределения, соответствующие матрице плотности в разных представлениях. Это, например, P -функция Глаубера–Сударшана [2], [3] и Q -функция Хусими [4]. Данные функции полезны во многих приложениях. Так, функция Хусими используется в нуклонной томографии [5] и имеет многочисленные применения в статистической физике, физике конденсированных сред, квантовой оптике, а также в атомной и ядерной физике [6], [7].

Не так давно была введена новая формулировка квантовой механики – томографико-вероятностное представление [8], [9]. В рамках этого подхода для описания квантовых состояний используется специальная функция распределения вероятности – симплектическая томограмма, связанная с функцией Вигнера квантовых состояний посредством интегрального преобразования Радона [10]. В отличие от функции Вигнера томограмма удовлетворяет необходимым свойствам функции распределения (1.1). Также томограмма и все функции квазираспределений, упомянутые выше, связаны друг с другом и с матричным оператором плотности взаимно однозначными преобразованиями, но только томограмма обладает всеми специфическими свойствами стандартного распределения вероятности и, таким образом, полностью описывает квантовое состояние. Однако существуют квантовые состояния, для которых ни томограмма, ни функция Вигнера и P - и Q -функции не удовлетворяют стандартному условию нормировки (1.1). Примером может служить плоская волна де Бройля [11]. Стандартное условие нормировки может нарушаться вследствие ряда факторов. Функция может зависеть только от части своих переменных, например $W(q, p) \equiv W(q)$. Также функция может иметь специфическую форму или содержать специальные функции, скажем, дельта-функцию Дирака.

В настоящей работе исследовано влияние нарушения условия нормировки (1.1) на томограмму и квазивероятности. Как мы уже упоминали, томограмма определяется преобразованием Радона функции Вигнера. При нарушении условий нормировки это преобразование не всегда применимо для функции Вигнера, и томограмма может быть не определена. На функцию Вигнера налагаются условия, при которых преобразование Радона справедливо для определения томограммы. Факт нарушения нормировки влияет и на обратное преобразование томограммы в матрицу плотности. Чтобы можно было восстановить матрицу плотности, томограмма должна удовлетворять определенным условиям. В работе рассмотрено несколько специальных квантовых состояний, томограммы и квазираспределения которых нарушают условие нормировки. Изучен случай плоской волны де Бройля в импульсном и координатном представлении, когда функции Вигнера содержат дельта-функции, зависящие только от одной из переменных (p или q соответственно). При этом преобразование Радона неприменимо для определения томограммы, так как не выполняются

необходимые условия для функции Вигнера. Так, отсутствие данных условий привело в работе [12] к некорректному определению томограммы для плоской волны де Бройля. Далее мы рассматриваем задачи о затворе Мошинского [13] и движении заряженной частицы в равномерном и постоянном электрическом поле. В этих случаях функции Вигнера и томограммы зависят от специальных функций [14] и не удовлетворяют условию (1.1).

Статья организована следующим образом. В разделе 2 кратко изложена теория вейлевских и томографических символов. Раздел 3 посвящен преобразованиям, которые сопоставляют функции Вигнера и томограммы. В разделе 4 изучены три специальных состояния, функция Вигнера и томограмма которых нарушают стандартное условие нормировки.

2. ТОМОГРАФИЧЕСКАЯ ФУНКЦИЯ И СИМВОЛЫ ВЕЙЛЯ

Рассмотрим один из методов квантования, известный как звездочное произведение операторных символов [15], [16]. Пусть оператор $\hat{A}$ действует в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$. Символ $f_{\hat{A}}(\bar{x})$ оператора $\hat{A}$ определяется следующим образом [17]:

$$f_{\hat{A}}(\bar{x}) = \text{Tr}(\hat{A}\hat{U}(\bar{x})), \quad \hat{A} = \int f_{\hat{A}}(\bar{x})\hat{D}(\bar{x})d\bar{x},$$

где $\hat{U}(\bar{x})$ – набор операторов и $\hat{D}(\bar{x})$ – набор их дуальных операторов, а переменная $\bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_N)$. Используя эти операторы, звездочное произведение можно определить как

$$f_{\hat{A}\hat{B}}(\bar{x}) = f_{\hat{A}}(\bar{x}) * f_{\hat{B}}(\bar{x}) = \text{Tr}(\hat{A}\hat{B}\hat{U}(\bar{x})).$$

В работе использованы два типа символов, связанных с операторами, а именно символ Вейля и томографический символ.

Известно, что для оператора плотности квантовых состояний символ Вейля – это функция Вигнера. Введем следующие операторы:

$$\hat{U}(\bar{x}) = \hat{U}(x_1, x_2), \quad \hat{D}(\bar{x}) = \hat{D}(x_1, x_2), \quad x_1 = \frac{q}{\sqrt{2}}, \quad x_2 = \frac{p}{\sqrt{2}}.$$

Таким образом, рассматривается двумерное фазовое пространство $\mathbb{R}^2$ с координатой q и импульсом p . Операторы рождения и уничтожения a и $a^\dagger$ задаются на гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ как $\hat{a} = (\hat{q} + i\hat{p})/\sqrt{2}$, $\hat{a}^\dagger = (\hat{q} - i\hat{p})/\sqrt{2}$ и удовлетворяют каноническому коммутационному соотношению $[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1$. Далее рассмотрим операторы

$$\begin{aligned} \hat{U}(q, p) &= 2\hat{D}(\alpha)(-1)^{a^\dagger a}\hat{D}(-\alpha), & \alpha &= \frac{q + ip}{2}, \\ \hat{D}(q, p) &= \frac{1}{\pi}\hat{D}(\alpha)(-1)^{a^\dagger a}\hat{D}(-\alpha), \end{aligned}$$

где $\hat{D}(\alpha)$ – унитарный оператор смещения, $\hat{D}(\alpha) = \exp\{\alpha a^\dagger - \alpha^* a\}$. Операторы координаты $\hat{q}$ и импульса $\hat{p}$ задаются стандартными соотношениями

$$\hat{q}\psi(x) = x\psi(x), \quad \hat{p}\psi(x) = -i\hbar\frac{\partial\psi(x)}{\partial x}.$$

Наконец, символ Вейля $W_{\hat{A}}(q, p)$ оператора $\hat{A}$ определяется следующим образом:

$$W_{\hat{A}} = 2 \operatorname{Tr}(\hat{A}\hat{D}(\alpha)(-1)^{a^\dagger a}\hat{D}(-\alpha)). \quad (2.1)$$

Рассмотрим квантовую систему, связанную с положительно определенным на гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ оператором плотности $\hat{\rho} = |\psi\rangle\langle\psi|$ с единичным следом. Тогда соотношение (2.1) задает функцию Вигнера квантового состояния. Для чистого состояния $|\psi(t)\rangle$ функция Вигнера имеет вид (здесь и далее мы полагаем, что $\hbar = 1$)

$$\begin{aligned} W(q, p, t) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ipx} \left\langle \psi(t) \left| q - \frac{x}{2} \right\rangle \left\langle q + \frac{x}{2} \right| \psi(t) \right\rangle dx = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ipx} \left\langle q + \frac{x}{2} \left| \hat{\rho}(t) \right| q - \frac{x}{2} \right\rangle dx. \end{aligned}$$

Известно, что она удовлетворяет условию нормировки

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W(q, p, t) dp dq = 1 \quad (2.2)$$

и справедливы равенства

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W(q, p, t) dq = |\langle \psi(t) | p \rangle|^2, \quad \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W(q, p, t) dp = |\langle \psi(t) | q \rangle|^2.$$

Функция Вигнера не всегда положительна, а значит, ее нельзя интерпретировать как распределение вероятностей в фазовом пространстве (q, p) . Таким образом, функция Вигнера является квазираспределением вероятности.

Перейдем к рассмотрению томографического символа. Для этого введем следующие операторы:

$$\hat{U}(X, \mu, \nu) = \delta(X\hat{1} - \mu\hat{q} - \nu\hat{p}), \quad \hat{D}(X, \mu, \nu) = \frac{1}{2\pi} e^{iX\hat{1}} e^{-i(\mu\hat{q} + \nu\hat{p})},$$

где X , μ и ν – действительные переменные. В работе [18] томографический символ оператора $\hat{A}$ был назван томограммой и определен следующим соотношением:

$$\mathcal{W}_{\hat{A}}(X, \mu, \nu) = \operatorname{Tr}(\hat{A}\delta(X - \mu\hat{q} - \nu\hat{p})).$$

Имеет место обратное соотношение

$$\hat{A} = \frac{1}{2\pi} \iiint_{-\infty}^{\infty} \mathcal{W}_{\hat{A}}(X, \mu, \nu) e^{i(X - \mu\hat{q} - \nu\hat{p})} dX d\mu d\nu. \quad (2.3)$$

Таким образом, симплектическая томограмма квантового состояния с оператором матрицы плотности $\hat{\rho}$ задается как

$$\mathcal{W}(X, \mu, \nu) = \operatorname{Tr}(\hat{\rho}\delta(X - \mu\hat{q} - \nu\hat{p})),$$

где случайная координата X соответствует положению частицы, а действительные параметры μ и ν задают систему координат в классическом фазовом пространстве,

где производится измерение положения частицы. В отличие от функции Вигнера томограмма обладает всеми свойствами функции распределения. В частности, для всех μ и ν выполняется условие нормировки

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{W}(X, \mu, \nu) dX = 1. \quad (2.4)$$

Можно заключить, что симплектическая томограмма является функцией распределения вероятности случайной величины X , измеренной в системе координат на фазовом пространстве. Последнее задается переменными $\mu = s \cos \theta$ и $\nu = s^{-1} \sin \theta$, где θ – угол поворота осей, а s – параметр масштабирования.

Напомним определения P - и Q -функций квазираспределений вероятности. Известно, что когерентные состояния $|\alpha\rangle \in \mathcal{H}$, которые являются нормированными собственными кет-векторами оператора уничтожения, $\hat{a}|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle$, образуют непрерывный базис в гильбертовом пространстве:

$$|\alpha\rangle = e^{-|\alpha|^2/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle.$$

В работе [4] была введена Q -функция Хусими

$$Q(\alpha, \alpha') = \langle \alpha | \hat{\rho} | \alpha \rangle, \quad (2.5)$$

связанная с функцией Вигнера преобразованием

$$Q(\alpha, \alpha') = \frac{1}{2\pi} \iint_{-\infty}^{\infty} e^{-2|\alpha - \beta|^2} W(\beta, \beta') d^2\beta, \quad d^2\beta = d\operatorname{Re} \beta d\operatorname{Im} \beta. \quad (2.6)$$

Квазираспределение Хусими положительно, а условие нормировки имеет вид

$$\frac{1}{2\pi} \iint_{-\infty}^{\infty} Q(q, p, t) dp dq = 1.$$

P -функция Глаубера–Сударшана [19], [20] определяется как

$$P(\alpha, \alpha') = \operatorname{Tr}(\hat{\rho} \delta(\alpha^* - \hat{a}^\dagger) \delta(\alpha - \hat{a})),$$

где

$$\delta(\alpha^* - \hat{a}^\dagger) \delta(\alpha - \hat{a}) = \frac{1}{\pi} \int e^{ic(\alpha^* - \hat{a}^\dagger)} e^{ic^*(\alpha - \hat{a})} d^2c.$$

Ее связь с функцией Вигнера задается равенством

$$W(\alpha, \alpha') = \frac{2}{\pi} \int e^{-2|\alpha - \beta|^2} P(\beta, \beta') d^2\beta.$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Таким образом, все функции квазираспределения связаны преобразованием свертки с гауссовыми функциями. При этом если для функции Вигнера нарушено условие нормировки (1.1), оно также нарушено для P - и Q -функций.

3. ФУНКЦИЯ ВИГНЕРА И ТОМОГРАММА КАК ИНСТРУМЕНТ ВОССТАНОВЛЕНИЯ МАТРИЦЫ ПЛОТНОСТИ

Как было упомянуто в предыдущем разделе, функция Вигнера – это символ Вейля матрицы плотности фон Неймана ρ .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Функция Вигнера выражается через матрицу плотности как

$$W(q, p) = \int_{-\infty}^{\infty} \rho\left(q + \frac{u}{2}, q - \frac{u}{2}\right) e^{-ipu} du, \quad (3.1)$$

а обратное преобразование имеет вид

$$\rho(x, x') = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W\left(\frac{x+x'}{2}, p\right) e^{ip(x-x')} dp. \quad (3.2)$$

Чтобы связать символ Вейля и топографический символ, введем преобразование Радона функции Вигнера [1].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть $f(x, y)$ – непрерывная функция действительных переменных $x, y \in \mathbb{R}^1$, убывающая достаточно быстро на бесконечности. Преобразование Радона задается следующим образом [21]:

$$R(r, \theta) f(x, y) = \iint_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \delta(r - x \cos \theta - y \sin \theta) dx dy, \quad (3.3)$$

где интегрирование ведется вдоль прямой, перпендикулярной вектору $\vec{n} = (\cos \theta, \sin \theta)$ и проходящей на расстоянии r от начала координат.

Преобразование Радона функции Вигнера задает симплектическую томограмму [8]:

$$\mathcal{W}(X, \mu, \nu) = \frac{1}{2\pi} \iint_{-\infty}^{\infty} W(q, p) \delta(X - \mu q - \nu p) dq dp, \quad (3.4)$$

где X, μ, ν – действительные числа.

Для упрощения интеграла воспользуемся дельта-функцией Дирака. Используя интегральную форму дельта-функции

$$\delta(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} d\omega, \quad (3.5)$$

можно записать томограмму (3.4) как

$$\mathcal{W}(X, \mu, \nu) = \frac{1}{(2\pi)^2} \iint_{-\infty}^{\infty} \left(\int e^{ik(X - \mu q - \nu p)} dk \right) W(q, p) dq dp. \quad (3.6)$$

Справедливо обратное преобразование Радона

$$W(q, p) = \frac{1}{2\pi} \iiint_{-\infty}^{\infty} \mathcal{W}(X, \mu, \nu) e^{i(X - \mu q - \nu p)} dX d\mu d\nu. \quad (3.7)$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Согласно теореме Фубини, если функция интегрируема на $X \times Y$, то повторные интегралы функции $f(x, y)$ по двум переменным перестановочны, т. е.

$$\int_X \left(\int_Y f(x, y) dy \right) dx = \int_Y \left(\int_X f(x, y) dx \right) dy. \quad (3.8)$$

Таким образом, равенство (3.6) выполнено, если функция $e^{ik(X-\mu q-\nu p)}W(q, p)$ интегрируема по k, q, p , при этом можно выбирать порядок интегрирования произвольно.

В терминах волновой функции $\Psi(y)$ томограмму можно представить как

$$\mathcal{W}(X, \mu, \nu) = \frac{1}{2\pi|\nu|} \left| \int \Psi(y) e^{\frac{i\mu}{2\nu}y^2 - \frac{iX}{\nu}y} dy \right|^2. \quad (3.9)$$

С помощью обратного преобразования можно найти матрицу плотности чистого состояния $\rho(x, x')$ в координатном представлении [22]:

$$\rho(x, x') = \frac{1}{2\pi} \iint_{-\infty}^{\infty} \mathcal{W}(X, \mu, x - x') e^{i(X - \mu(x+x')/2)} dX d\mu. \quad (3.10)$$

Тогда, используя волновую функцию, можно определить томограмму по формуле (3.9). Верно и обратное, зная маргинальное распределение (томограмму), можно восстановить волновую функцию по формуле (3.10). Обратное преобразование не всегда существует.

УСЛОВИЕ 1. Для реконструкции начального состояния томограмма должна зависеть от всех трех переменных (X, μ, ν) , а функция $\mathcal{W}(X, \mu, x - x')e^{i(X - \mu(x+x')/2)}$ должна быть интегрируема по X и μ .

3.1. Тестовая функция и дельта-функция Дирака. Заметим, что преобразование Радона (3.4) есть свертка функции Вигнера. Всегда ли она допустима? Воспользуемся строгим определением дельта-функции Дирака. Начнем с определения понятия тестовой функции.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Тестовая функция $\varphi(t)$ – это функция действительного переменного, дифференцируемая достаточное количество раз и равная нулю вне конечного интервала (см. справочник [23]).

Тестовая функция имеет следующие свойства:

- если $f(t)$ дифференцируема достаточное количество раз, то $F(t) = \varphi(t)f(t)$ также является тестовой функцией;
- если $f(t)$ равна нулю вне конечного интервала, то $F(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\varphi(t - \tau)d\tau$, $-\infty < t < \infty$, также является тестовой функцией;
- последовательность тестовых функций $\{\varphi_n(t)\}$, $1 \leq n < \infty$, сходится к нулю, если все функции φ_n тождественно равны нулю вне некоторого интервала, не зависящего от n , и все φ_n , а также все их производные стремятся равномерно к нулю.

Одномерная дельта-функция определяется следующим образом.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Дельта-функция задается следующими соотношениями:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t)\delta(t) dt = \int_{-\epsilon}^{\epsilon} \varphi(t)\delta(t) dx = \varphi(0), \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1. \quad (3.11)$$

В соответствии с этим определением дельта-функция не существует в смысле обычной функции. Однако можно найти последовательность функций, приближающую (3.11) в определенном пределе. Например, таковой является последовательность функций

$$\delta_n^{(1)}(x) = \begin{cases} 0, & x < -1/n, \\ n/2, & -1/n < x < 1/n, \\ 0, & x > 1/n, \end{cases} \quad n = 1, 2, \dots, \quad (3.12)$$

или следующая часто используемая последовательность:

$$\delta_n^{(2)}(x) = ne^{-n^2 x^2} / \sqrt{\pi}, \quad n = 1, 2, \dots. \quad (3.13)$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Функции (3.12) и (3.13) удовлетворяют (3.11) в пределе $n \rightarrow \infty$. Таким образом, дельта-функция имеет смысл только под знаком интеграла в (3.11).

Функция $\varphi(t)$ в (3.11) является тестовой и должна принадлежать специальному классу функций, удовлетворяющих (3.11). Последовательность интегралов должна сходиться для $\varphi(t)$ из класса тестовых функций.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Дельта-функция определяется как распределение, также известное как обобщенная функция, действующая на классе тестовых функций $\varphi(t)$.

Следует подчеркнуть, что в теории распределений свойство (3.11) справедливо, только если $\varphi(t)$ является тестовой функцией [21], [23]. В частности, математически неверно использовать равенство (3.11), где вместо $\varphi(t)$ используется дельта-функция (распределение). Согласно теореме Шварца (no-go theorem) [24] нельзя определить произведение двух распределений так, что они образуют алгебру с приемлемыми топологическими свойствами. Возможно определить произведение распределений, когда их наборы волновых фронтов (wave front sets) не пересекаются. Тогда произведение двух дельта-функций в $\mathbb{R}^2$ задается как $\delta_{x=0} = \delta_{x_1=0} \cdot \delta_{x_2=0}$, т. е. определяется как двумерная дельта-функция [25], [23]. Однако произведение $\delta^2(x)$ двух распределений с одной и той же переменной не имеет смысла и подобной записи следует избегать.

Сравнивая выражения (3.4) и (3.11), можно видеть, что роль тестовой функции $\varphi(t)$ в преобразовании Радона играет функция Вигнера $W(q, p)$. Таким образом, мы приходим к следующему важному условию.

УСЛОВИЕ 2. Функция Вигнера (3.4) принадлежит пространству тестовых функций, если она является гладкой функцией на $\mathbb{R}$ с компактным носителем, дифференцируемой достаточно много раз.

Если указанное условие не выполнено, преобразование Радона функции Вигнера неприменимо для определения симплектической томограммы.

Далее мы рассматриваем три примера квантовых состояний, для которых функции Вигнера и томограммы не удовлетворяют условиям нормировки (2.2) и (2.4) соответственно. Мы исследуем, как данный факт влияет на свойства функции Вигнера и томограммы с точки зрения восстановления матрицы плотности исходного состояния.

4. ПРИМЕРЫ СОСТОЯНИЙ С НЕНОРМИРОВАННЫМИ ТОМОГРАММАМИ И КВАЗИРАСПРЕДЕЛЕНИЯМИ

4.1. Плоская волна. Начнем с важного примера – плоской волны де Бройля. В импульсном представлении ее волновая функция имеет вид

$$\Psi_{p_0}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ip_0 x}, \quad (4.1)$$

где p_0 – среднее значение импульса волнового пакета с центром x_0 . По определению матрица плотности равна

$$\rho_{p_0}(x, x') = \Psi_{p_0}(x) \Psi_{p_0}^*(x') = \frac{1}{2\pi} e^{ip_0(x-x')}. \quad (4.2)$$

Используя выражение (3.1) и определение дельта-функции (3.11), запишем функцию Вигнера:

$$\begin{aligned} W_{p_0}(q, p) &= \int \Psi_{p_0}\left(q + \frac{u}{2}\right) \Psi_{p_0}^*\left(q - \frac{u}{2}\right) e^{-ipu} du = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int e^{ip_0(q+u/2)} e^{-ip_0(q-u/2)} e^{-ipu} du = \delta(p - p_0). \end{aligned}$$

Применяя это представление, можно легко восстановить матрицу плотности (4.2). Заметим, что данная функция Вигнера не удовлетворяет условию нормировки (2.2),

$$\frac{1}{2\pi} \iint_{-\infty}^{\infty} W_{p_0}(q, p) dp dq = \frac{1}{2\pi} \iint_{-\infty}^{\infty} \delta(p - p_0) dp dq \neq 1.$$

Таким образом, функция Вигнера, являющаяся дельта-функцией, не удовлетворяет условию 2, преобразование Радона функции Вигнера (3.4) неприменимо и томограмма не определена. Так как дельта-функция является распределением, нужно строго следить за производимыми преобразованиями. Должно быть задано пространство тестовых функций. Несмотря на то что нельзя определить произведение на всем топологическом пространстве распределений, некоторые распределения все же могут быть в некотором смысле перемножены. Так, возможный метод умножения распределений был предложен Коломбо в работах [26], [27]. Мы не будем приводить подробное изложение этого метода, так как для этого требуются значительные математические усложнения, что выходит за рамки настоящей статьи.

Основная идея заключается в том, что дельта-функцию Дирака можно задать с помощью предельного соотношения для некоторой последовательности гладких функций, нормированных на единицу. Чтобы обойти возникшие трудности при определении томограммы для плоской волны, используем следующее предельное представление дельта-функции:

$$\delta(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\varepsilon} e^{-x^2/2\varepsilon^2} \right). \quad (4.3)$$

Применим преобразование Радона в форме (3.6) (где сохранен изначальный порядок интегрирования) и проинтегрируем по q и p , получим

$$\mathcal{W}_{p_0 \text{ int}}(X, \mu, \nu) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int \delta(p - p_0) e^{ik(X - \mu q - \nu p)} dk dq dp = \frac{1}{2\pi} \int \delta(k\mu) e^{ik(X - \nu p_0)} dk.$$

Как было отмечено выше, неправомерно проводить интегрирование по k . Если сделать это, полученная функция будет иметь вид

$$\mathcal{W}_{p_0}(X, \mu, \nu) = \frac{1}{2\pi|\mu|}. \quad (4.4)$$

Она не удовлетворяет условию нормировки и не зависит от переменных X и ν . Тогда очевидно, что функция (4.4) не удовлетворяет условию 2, и обратное преобразование (3.10) неприменимо, т. е.

$$\rho_{p_0}(x, x') = \int \frac{1}{2\pi|\mu|} e^{i(X-\mu(x+x')/2)} dX d\mu \neq \frac{1}{2\pi} e^{ip_0(x-x')}.$$

Таким образом, томограмма в форме (4.4), не зависящая от X и ν , не содержит всю информацию о состоянии и не восстанавливает его.

Однако дельта-функция в $\mathcal{W}_{p_{0\text{int}}}(X, \mu, \nu)$ может быть заменена предельным выражением (4.3). Тогда можно записать выражение для томограммы как предел:

$$\mathcal{W}_{p_{0\text{int}}}(X, \mu, \nu) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi|\mu|} e^{-\varepsilon^2(X-\nu p_0)^2/2\mu^2}. \quad (4.5)$$

Очевидно, что этот предел согласуется с (4.4). Предельное выражение содержит переменные X , μ , ν и удовлетворяет условию 2. Используя (4.5), можно преобразовать томограмму в матрицу плотности.

Также можно воспользоваться другим подходом, а именно определением томограммы через волновую функцию (3.9). Несмотря на то что параметр p_0 в (4.1) действителен, все приведенные выражения верны и в случае, когда справедливо представление $p_0 = p_1 + ip_2$, $\text{Im } p_0 < 0$. В этом случае томограмма записывается как

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_{p_{0\text{com}}}(X, \mu, \nu) &= \frac{1}{2\pi} \frac{1}{2\pi|\nu|} \left| \int e^{i(p_1+ip_2)y} \exp\left\{\frac{i\mu}{2\nu}y^2 - \frac{iX}{\nu}y\right\} dy \right|^2 = \\ &= \frac{1}{2\pi|\mu|} \exp\left\{\frac{2}{\mu} p_2(p_1\nu - X)\right\}. \end{aligned}$$

Томограмма в такой форме содержит X , μ , ν , и условия (2) выполняются. Тогда обратное преобразование (3.10) дает

$$\rho_{p_{0\text{com}}}(x, x') = \frac{1}{2\pi} e^{ip_1(x-x')} e^{-ip_2(x-x')},$$

а так как $p_2 = 0$ и $p_1 \equiv p_0$, этот результат согласуется с (4.2).

Рассмотрим волну де Бройля в координатном представлении. Ее волновая функция имеет вид

$$\Psi_{x_0}(x) = \delta(x - x_0). \quad (4.6)$$

Соответствующая ей матрица плотности равна

$$\rho_{x_0}(x, x') = \Psi_{x_0}(x) \Psi_{x_0}^*(x') = \delta(x - x_0) \delta(x' - x_0). \quad (4.7)$$

Легко проверить, что функция Вигнера имеет вид $W_{x_0}(q, p) = \delta(q - x_0)$. Аналогично предыдущему случаю томограмму можно записать как

$$\mathcal{W}_{x_0}(X, \mu, \nu) = \frac{1}{2\pi} \int \delta(k\nu) e^{ik(X - \mu x_0)} dk. \quad (4.8)$$

Заменяя дельта-функцию в (4.8) предельным соотношением (4.3), с помощью обратного преобразования реконструируем матрицу плотности.

4.2. Затвор Мошинского. В качестве следующего примера состояния с томограммой и функцией Вигнера, нарушающими условия нормировки, рассмотрим задачу о затворе Мошинского (дифракции во времени) [13]. Поток частиц массы $m = 1$ и энергии $k^2/2$ движется параллельно оси x . Перед ним в точке $x = 0$ ставится абсолютно непроницаемая стенка, открывающаяся в момент времени $t = 0$. Задача состоит в том, чтобы найти функцию $\psi(x, t)$, удовлетворяющую уравнению Шредингера

$$i \frac{\partial \psi(x, t)}{\partial t} = -\frac{1}{2} \frac{\partial^2 \psi(x, t)}{\partial x^2} \quad (4.9)$$

с начальными условиями $\psi(x, 0) = e^{ikx} \theta(-x)$, где $\theta(x)$ – функция Хевисайда,

$$\theta(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Здесь k считается действительным. Решение данной задачи имеет вид [13], [14], [28]

$$\psi_M(x, k, t) = \frac{1}{2} \exp \left\{ i \left(kx - \frac{k^2 t}{2} \right) \right\} \operatorname{erfc}(e^{-i\pi/4} \omega),$$

где $\omega = (x - kt)/\sqrt{2t}$, а функция ошибок $\operatorname{erfc}(z) = (2/\sqrt{\pi}) \int_z^\infty e^{-y^2} dy$. В работе [13] решение было переписано в виде

$$\psi_M(x, k, t) = e^{-i\pi/4} e^{i(kx - k^2 t/2)} \frac{1/2 - C(\omega) + i(1/2 - S(\omega))}{\sqrt{2}},$$

где

$$C(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\omega \cos y^2 dy, \quad S(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\omega \sin y^2 dy \quad (4.10)$$

суть интегралы Френеля. Легко проверить, что матрица плотности, описывающая заданную квантовую систему, имеет вид

$$\rho(x, x', k, t) = \frac{1}{4} e^{ik(x-x')} \operatorname{erfc}(e^{-i\pi/4} \omega) \operatorname{erfc}(e^{i\pi/4} \omega'). \quad (4.11)$$

Функция Вигнера для дифракции задается как [14]

$$W(x, p, k, t) = -\frac{1}{2\pi^2} e^{2ip(x-pt)} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-2i\kappa(x-pt)}}{(\kappa - k)(\kappa + k - 2p)} d\kappa.$$

В явном виде ее можно записать как

$$W(x, p, k, t) = \frac{\theta(pt - x)}{4\pi i(k - p)} (e^{2i(k-p)(x-pt)} - e^{-2i(k-p)(x-pt)}). \quad (4.12)$$

Нетрудно проверить, что условие нормировки (2.2) не выполняется. Томограмма также была найдена в [14] и имеет вид

$$\mathcal{W}(X, \mu, \nu, k, t) = \frac{1}{2|\mu|} \left(\left(\frac{1}{2} + C(\rho) \right)^2 + \left(\frac{1}{2} + S(\rho) \right)^2 \right), \quad \rho = \frac{k(\mu t + \nu) - X}{\sqrt{2\mu(\mu t + \nu)}},$$

где $C(\cdot)$ и $S(\cdot)$ – интегралы Френеля (4.10). Можно видеть, что для дифракции во времени ни функция Вигнера, ни томограмма не удовлетворяют условиям нормировки. Однако, в отличие от случая плоской волны, функция Вигнера удовлетворяет условию 2, а томограмма – условию 1. Легко проверить, что все формулы раздела 2 для них выполняются.

4.3. Движение заряда в однородном электрическом поле. Рассмотрим задачу о заряженной частице, движущейся в равномерном и постоянном электрическом поле. Функция Вигнера и томограмма состояния для этой модели были найдены в работе [29]. Уравнение Шредингера стационарного состояния частицы в электрическом поле имеет вид

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2} (\mathcal{E} + \mathcal{F}x) \psi = 0, \quad (4.13)$$

и для всех значений энергии $\mathcal{E}$ существует решение $\psi_{\mathcal{E}}(x) = A\Phi(\alpha x + \varepsilon)$. Здесь использованы следующие обозначения:

$$A = \frac{(2m)^{1/3}}{\pi^{1/2} \mathcal{F}^{1/6} \hbar^{2/3}}, \quad \alpha = -\left(\frac{2m\mathcal{F}}{\hbar^2} \right)^{1/3}, \quad \varepsilon = \alpha \frac{\mathcal{E}}{\mathcal{F}},$$

где $\mathcal{F}$ – однородное электрическое поле.

Функция Эйри первого рода $\text{Ai}(x) = \Phi(x)/\sqrt{\pi}$ ограничена на $\mathbb{R}$ и ее интегральное представление для $x \in \mathbb{R}$ имеет вид

$$\text{Ai}(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \cos\left(x\xi + \frac{\xi^3}{3}\right) d\xi.$$

Согласно работе [30] произведение двух функций Эйри задается как

$$\text{Ai}(x) \text{Ai}(y) = \frac{1}{2\pi^{3/2}} \int_0^{\infty} \cos\left(\frac{x+y}{2}\xi + \frac{\xi^3}{12} - \frac{(x-y)^2}{4\xi} + \frac{\pi}{4}\right) \frac{d\xi}{\sqrt{\xi}}. \quad (4.14)$$

Тогда матрица плотности может быть записана в виде

$$\begin{aligned} \rho(x, x') &= A^2 \Phi(\alpha x + \varepsilon) \Phi^\dagger(\alpha x' + \varepsilon) = \\ &= \frac{A^2}{2\pi^{3/2}} \int_0^\infty \cos\left(\frac{\alpha(x + x') + 2\varepsilon}{2} \xi + \frac{\xi^3}{12} - \frac{\alpha^2(x - x')^2}{4\xi} + \frac{\pi}{4}\right) \frac{d\xi}{\sqrt{\xi}}. \end{aligned} \quad (4.15)$$

Функция Вигнера стационарного состояния заряженной частицы с заданной энергией задается формулой

$$W_{\mathcal{E}}(q, p) = \frac{1}{\pi} \sqrt[3]{\frac{m}{\mathcal{F}^2 \hbar^2}} \Phi\left(\sqrt[3]{4}\left(\frac{p^2}{\alpha^2 \hbar^2} + \alpha q + \varepsilon\right)\right),$$

а томограмма равна

$$W_{\mathcal{E}}(X, \mu, \nu) = \frac{A^2 \hbar}{4\pi|\mu|} \left| \Phi\left(\varepsilon - \frac{\alpha X}{\mu} - \frac{\hbar^2 \alpha^2 \nu^2}{4\mu^2}\right) \right|^2. \quad (4.16)$$

Имеет место следующее представление [31], [32]:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \text{Ai}(x - a) \text{Ai}(x - b) dx = \delta(a - b), \quad x, a, b \in \mathbb{R}.$$

Следовательно, условие нормировки для томограммы $W_{\mathcal{E}}(X, \mu, \nu)$ не выполняется,

$$\frac{A^2 \hbar}{4|\mu|} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \text{Ai}\left(\varepsilon - \frac{\alpha X}{\mu} - \frac{\hbar^2 \alpha^2 \nu^2}{4\mu^2}\right) \right|^2 dX.$$

Однако функция Вигнера удовлетворяет условию 2, а томограмма (4.16) зависит от всех переменных X, μ, ν и удовлетворяет условию 1. Таким образом, все формулы раздела 2 справедливы.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Мы рассмотрели специальный класс квантовых состояний, для которых томограмма и функция Вигнера не удовлетворяют условиям нормировки (1.1). Получены условия на функцию Вигнера, позволяющие использовать преобразование Радона для определения томограммы. Так, например, показано, что если функция Вигнера содержит дельта-функцию Дирака, то классическое преобразование Радона (3.3) неприменимо. Это означает, что для такого класса функций Вигнера невозможно определить томограмму. Чтобы можно было применять преобразование Радона, функция Вигнера должна удовлетворять условию 2. Мы показали, что это затруднение можно преодолеть, используя предельное представление дельта-функции. Эффективность предложенного подхода иллюстрируется на примере плоской волны. Мы рассмотрели две модели: затвор Мошинского и движение заряда в однородном электрическом поле. Квазираспределения и томограммы в этих случаях имеют сложные структуры и зависят от функций Эйри и интегралов Френеля, но содержат все необходимые переменные в явном виде и являются непрерывными функциями (удовлетворяют условиям 1 и 2). Все обратные преобразования, восстанавливающие матрицу плотности или волновую функцию, применимы без ограничений.

Список литературы

- [1] E. Wigner, “On the quantum correction for thermodynamic equilibrium”, *Phys. Rev.*, **40**:5 (1932), 749–759.
- [2] R. J. Glauber, “Photon correlations”, *Phys. Rev. Lett.*, **10**:3 (1963), 84–86.
- [3] E. C. G. Sudarshan, “Equivalence of semiclassical and quantum mechanical descriptions of statistical light beams”, *Phys. Rev. Lett.*, **10**:7 (1963), 277–279.
- [4] K. Husimi, “Some formal properties of the density matrix”, *Proc. Phys. Math. Soc. Japan*, **22**:4 (1940), 264–314.
- [5] Y. Hagiwaraa, Y. Hatta, “Use of the Husimi distribution for nucleon tomography”, *Nucl. Phys. A.*, **940** (2015), 158–166.
- [6] H.-W. Lee, “Theory and application of the quantum phase-space distribution functions”, *Phys. Rep.*, **259**:3 (1995), 147–211.
- [7] T. Kunihiroa, B. Muller, A. Ohnishi, A. Schafer, “Towards a theory of entropy production in the little and big bang”, *Progr. Theor. Phys.*, **121**:3 (2009), 555–575, arXiv:0809.4831.
- [8] S. Mancini, V. I. Man’ko, P. Tombesi, “Symplectic tomography as classical approach to quantum systems”, *Phys. Lett. A*, **213**:1–2 (1996), 1–6.
- [9] S. Mancini, V. I. Man’ko, P. Tombesi, “Classical-like description of quantum dynamics by means of symplectic tomography”, *Found. Phys.*, **27**:6 (1997), 801–824.
- [10] J. Radon, “Über die Bestimmung von Funktionen durch ihre Integralwerte längs gewisser Mannigfaltigkeiten”, *Ber. Verh. Sächs. Akad. Wiss Leipzig*, **69** (1917), 262–277.
- [11] V. I. Man’ko, L. A. Markovich, “Symplectic tomography of de Broglie wave”, *J. Russ. Laser Res.*, **38**:6 (2017), 507–515.
- [12] G. G. Amosov, V. I. Man’ko, “Characteristic functions of states in star-product quantization”, *J. Russ. Laser Res.*, **30**:5 (2009), 435–442.
- [13] M. Moshinsky, “Diffraction in time”, *Phys. Rev.*, **88**:3 (1952), 625–631.
- [14] V. I. Man’ko, M. Moshinsky, A. Sharma, “Diffraction in time in terms of Wigner distributions and tomographic probabilities”, *Phys. Rev. A*, **59**:3 (1999), 1809–1816, arXiv:quant-ph/9902075.
- [15] F. Bayen, M. Flato, M. Fronsdal, C. Lichnerowicz, D. Sternheimer, “Quantum mechanics as a deformation of classical mechanics”, *Lett. Math. Phys.*, **1**:6 (1977), 521–530.
- [16] O. V. Man’ko, V. I. Man’ko, G. Marmo, “Star-product of generalized Wigner–Weyl symbols on $SU(2)$ group, deformations, and tomographic probability distribution”, *Phys. Scr.*, **62**:6 (2000), 446–452.
- [17] O. V. Man’ko, V. I. Man’ko, G. Marmo, C. Stornaiolo, “Radon transform of the Wheeler–De Witt equation and tomography of quantum states of the universe”, *Gen. Rel. Grav.*, **37**:1 (2005), 99–114.
- [18] O. V. Man’ko, V. I. Man’ko, G. Marmo, P. Vitale, “Star products, duality, double Lie algebras”, *Phys. Lett. A*, **360**:4–5 (2007), 522–532.
- [19] K. E. Cahill, R. J. Glauber, “Ordered expansions in boson amplitude operators”, *Phys. Rev.*, **177**:5 (1969), 1857–1881.
- [20] K. E. Cahill, R. J. Glauber, “Density operators, quasiprobability distributions”, *Phys. Rev.*, **177**:5 (1969), 1882–1902.
- [21] И. М. Гельфанд, М. И. Граев, Н. Я. Виленкин, *Обобщенные функции. Вып. 5. Интегральная геометрия и связанные с ней вопросы теории представлений*, Физматлит, М., 1962.
- [22] M. A. Man’ko, V. I. Man’ko, R. V. Mendes, “A probabilistic operator symbol framework for quantum information”, *J. Russ. Laser Res.*, **27**:6 (2006), 507–532.
- [23] A. D. Poularikas, *The Handbook of Formulas and Tables for Signal Processing*, CRC Press, Boca Raton, 1999.
- [24] L. Schwartz, *Théorie des distributions*, Hermann, Paris, 1950.

- [25] D. Serre, *Is square of Delta function defined somewhere?*, MathOverflow, <https://mathoverflow.net/questions/48067>.
- [26] J. F. Colombeau, *Multiplication of Distributions. A Tool in Mathematics, Numerical Engineering, Theoretical Physics*, Lecture Notes in Mathematics, **1532**, Springer, Berlin, 1992.
- [27] J. F. Colombeau, A. Meril, “Generalized functions and multiplication of distributions on $\mathcal{C}^\infty$ manifolds”, *J. Math. Anal. Appl.*, **186**:2 (1994), 357–364.
- [28] H. M. Nussenzveig, “Moshinsky functions, resonances and tunneling”, *Symmetries in Physics*, Proceedings of the International Symposium Held in Honor of Professor Marcos Moshinsky (Cocoyoc, Morelos, México, June 3–7, 1991), eds. A. Frank, K. B. Wolf, Springer, Berlin, Heidelberg, 1992, 293–310.
- [29] V. I. Man’ko, E. V. Shchukin, “A charged particle in an electric field in the probability representation of quantum mechanics”, *J. Russ. Las. Res.*, **22**:6 (2001), 545–560.
- [30] O. Vallée, M. Soares, Ch. de Izarra, “An integral representation for the product of Airy functions”, *Z. Angew. Math. Phys.*, **48**:1 (1997), 156–160.
- [31] D. Dominici, R. S. Maier (eds.), *Special Functions and Orthogonal Polynomials* (University of Arizona, Tucson, AZ, April 21–22, 2007), Contemporary Mathematics, **471**, AMS, Providence, RI, 2007.
- [32] O. Vallée, M. Soares, *Airy Functions and Applications to Physics*, World Sci., Singapore, 2004.

Поступила в редакцию 11.03.2018