Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Б. Шабат, В. Э. Адлер, Матрицы Картана в теории цепочек Тоды–Дарбу, *ТМФ*, 2018, том 196, номер 1, 22–29

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf9564>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.84.234.179

26 апреля 2023 г., 15:18:19

© 2018 г.

А. Б. Шабат*, В. Э. Адлер*

МАТРИЦЫ КАРТАНА В ТЕОРИИ ЦЕПОЧЕК ТОДЫ–ДАРБУ

Обсуждается взаимно однозначное соответствие полиномиальных первых интегралов гамильтоновых систем с экспоненциальным взаимодействием и гиперинтегралов двумеризованной цепочки Тоды. Установлены формулы пересчета соответствующих многочленов и некоторые общие свойства их алгебраической структуры.

Ключевые слова: матрицы Картана, полиномиальные первые интегралы, экспоненциальные системы.

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf9564>

1. ВВЕДЕНИЕ

Опираясь на известные работы Лезнова [1] и Козлова, Трещева [2], мы рассматриваем вопросы, связанные с интегрируемостью системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{d^2}{dt^2}\mathbf{u} = e^{A\mathbf{u}}, \quad \ddot{u}^i = \exp\left(\sum_{j=1}^r a_{ij}u^j\right) = e_i(\mathbf{u}), \quad i \in [r], \quad (1)$$

удовлетворяющей условиям невырожденности и симметризуемости

$$\det A \neq 0, \quad (CA)^T = CA, \quad C = \text{diag}(c_1, \dots, c_r). \quad (2)$$

Обобщенные первые интегралы, представляющие собой однородные многочлены W от старших производных $\mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_t$, $\mathbf{u}_2 = \mathbf{u}_{tt}$, $\mathbf{u}_3 = \mathbf{u}_{ttt}, \dots$,

$$\frac{dW}{dt} = \frac{d}{dt} \left[\sum C_\alpha \mathbf{u}_1^{\alpha_1} \mathbf{u}_2^{\alpha_2} \dots \mathbf{u}_m^{\alpha_m} \right] = 0, \quad \deg \stackrel{\text{def}}{=} |\alpha_1| + 2|\alpha_2| + \dots + m|\alpha_m| = m, \quad (3)$$

используются для формулировки условий существования классических первых интегралов в виде однородных многочленов $K(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)$:

$$\frac{d}{dt}K = \frac{d}{dt} \sum c_{\alpha,\beta} \mathbf{u}_1^\alpha \mathbf{u}_2^\beta = 0, \quad \deg(\mathbf{u}_1^\alpha \mathbf{u}_2^\beta) = |\alpha| + 2|\beta| = m. \quad (4)$$

*Институт теоретической физики им. Л. Д. Ландау РАН, Черноголовка, Московская обл., Россия. E-mail: shabatab@mail.ru, adler@itp.ac.ru

Отметим, что замена $(\mathbf{u}, \mathbf{u}_1 \equiv \dot{\mathbf{u}}) \leftrightarrow (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 = e^{A\mathbf{u}})$ обратима в силу условия $\det A \neq 0$. Именно эта замена позволяет избавиться от экспонент в уравнениях (1) и записывать первые интегралы в виде (3) и (4). Второе из условий (2) гарантирует гамильтоновость рассматриваемых уравнений:

$$L = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^r c_i a_{ij} u_t^i u_t^j + \sum_{i=1}^r c_i e^{\hat{u}^i}, \quad H = \sum_{i=1}^r u_t^i \frac{\partial L}{\partial u_t^i} - L, \quad (5)$$

и наличие первого интеграла (4) второго порядка $m = 2$ с $K = H$. Величины $\hat{u}_1^i = \sum a_{ij} u_t^j$ играют роль импульсов в формуле (5), и сокращенные обозначения

$$\hat{u}^i \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{j=1}^r a_{ij} u^j, \quad e_i(\mathbf{u}) \stackrel{\text{def}}{=} e^{\hat{u}^i}, \quad i \in [r], \quad (6)$$

систематически используются в дальнейшем.

Основной интерес для нас представляет взаимосвязь классических и обобщенных интегралов и алгебраические структуры, связанные с уравнениями (3) и (4)¹⁾. Грубо говоря, формализация этих уравнений основана на введении дополнительного “внутреннего” дифференцирования $D: \mathcal{W} \mapsto \mathcal{W}$, $\ker D = \text{const}$, в алгебре многочленов $\mathcal{W}$ от дифференциальных переменных $\mathbf{u}_j$, $j \geq 1$:

$$D: \mathbf{u}_j \rightarrow \mathbf{u}_{j+1}, \quad \deg \mathbf{u}_j = j, \quad j \geq 1, \quad (7)$$

и использовании при дифференцировании правых частей $e_i(\mathbf{u})$ уравнений (1) формул типа Фаа ди Бруно:

$$\frac{1}{n!} \left(\frac{d}{dt} \right)^n f(u) = \left(\sum_{k_1+2k_2+\dots+nk_n=n} \frac{B_1^{k_1} B_2^{k_2} \dots B_n^{k_n}}{k_1! k_2! \dots k_n!} \right) f(u),$$

$$[D, u_j \partial_u] = u_{j+1} \partial_u \Leftrightarrow [D, B_j] = (j+1) B_{j+1}, \quad B_j \stackrel{\text{def}}{=} \frac{u_j}{j!} \partial_u, \quad j \geq 1.$$

В частности, $\partial_u(f) = f$ при $f(u) = e^u$ и мы имеем

$$f_{n+1} = (D + u_1) f_n, \quad f_1 = u_1, \quad f_n \stackrel{\text{def}}{=} e^{-u} \left(\frac{d}{dt} \right)^n e^u, \quad n \geq 1, \quad (8)$$

и, таким образом,

$$f_2 = u_2 + u_1^2, \quad f_3 = u_3 + 3u_1 u_2 + u_1^3, \quad f_4 = u_4 + 4u_1 u_3 + 3u_2^2 + 3u_1^2 u_2 + u_1^4,$$

$$f_5 = u_5 + 5u_1 u_4 + 10f_2 u_3 + 15u_1 u_2^2 + 10u_1^3 u_2 + u_1^5.$$

2. ПОЛИНОМИАЛЬНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ ПРИ $r = 2$ И $r = 3$

В соответствии с классической теорией интегрируемость гамильтоновой системы (1), (2) означает существование r независимых первых интегралов, находящихся в инволюции. При $r = 2$ дело сводится к построению одного дополнительного

¹⁾Мы использовали программы символьных вычислений для экспериментов с уравнениями (3) и (4).

к гамильтониану полиномиального интеграла $K(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)$, удовлетворяющего уравнению (4). Используя масштабные преобразования и сдвиги, мы приводим матрицу A рассматриваемой экспоненциальной системы к следующему виду:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \gamma & -2 \end{pmatrix}, \quad H = v_2 + v_1^2 + \gamma(u_2 + u_1^2) - \gamma u_1 v_1, \quad (9)$$

$$a_{11}a_{22} \neq 0, \quad a_{12}a_{21} \neq 0 \quad (u \equiv u^1, \quad v \equiv u^2).$$

При указанных выше условиях невырожденности квадратичной формы, связанной с лагранжианом (5), можно доказать, что только при $\gamma \in [3]$ (ср. ниже пример 2) существуют дополнительные полиномиальные интегралы. В случаях $\gamma = 1$ и $\gamma = 2$ вид этих интегралов следующий:

$$\begin{aligned} K_3 &= u_1 v_2 - v_1 u_2 + u_1 v_1 (v_1 - u_1), \\ H &= v_2 + v_1^2 + u_2 + u_1^2 - u_1 v_1, \quad \gamma = 1; \\ K_4 &= u_2^2 + u_1^2 (2u_2 + v_2) - 2u_1 v_1 u_2 + u_1^2 (u_1 - v_1)^2, \\ H &= v_2 + v_1^2 + 2(u_2 + u_1^2) - 2u_1 v_1. \end{aligned} \quad (10)$$

При $\gamma = 3$ вычисление коэффициентов соответствующего многочлена K_6 шестой степени при помощи компьютера дает

$$\begin{aligned} K_6 &= 12u_1^4 u_2 + 12u_1^2 u_2^2 + 4u_2^3 - 24u_1^3 v_1 u_2 - 12u_1 v_1 u_2^2 + 14u_1^2 v_1^2 u_2 + v_1^2 u_2^2 - \\ &\quad - 2u_1 v_1^3 u_2 + 4u_1^4 v_2 + 8u_1^2 u_2 v_2 + 4u_2^2 v_2 - 6u_1^3 v_1 v_2 - 2u_1 v_1 u_2 v_2 + u_1^2 v_2^2 + \\ &\quad + 2u_1^2 v_1^2 v_2 + u_1^2 (v_1 - u_1)^2 (v_1 - 2u_1)^2. \end{aligned} \quad (11)$$

Прежде чем перейти к определению полиномиальных интегралов вида (3), остановимся кратко на случае $r = 3$. В отличие от случая $r = 2$, здесь в дополнение к гамильтониану (5) требуется найти два первых интеграла (4), и роль матриц (9) играют здесь две матрицы

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & \gamma & -2 \end{pmatrix}, \quad \gamma = 1, 2. \quad (12)$$

При $\gamma = 3$ матрица A становится, как легко проверить, вырожденной, и это приводит к следующему примеру системы уравнений (1) с $\det A = 0$.

ПРИМЕР 1. Записав рассматриваемую систему дифференциальных уравнений для $u^1 = u$, $u^2 = v$, $u^3 = w$ в “полиномиальном” виде

$$\dot{u}_1 = u_2, \quad \dot{u}_2 = \hat{u}_1 u_2; \quad \dot{v}_1 = v_2, \quad \dot{v}_2 = \hat{v}_1 v_2; \quad \dot{w}_1 = w_2, \quad \dot{w}_2 = \hat{w}_1 w_2, \quad (13)$$

мы находим три интеграла порядков 2, 6 и 8:

$$\begin{aligned} H &= 3(u_2 + v_2) + w_2 + w_1^2 + 3(u_1^2 + v_1^2 - u_1 v_1 - v_1 w_1), \\ K_6 &= 4u_1^6 - 12u_1^5 v_1 - 3u_1^4 v_1^2 + 26u_1^3 v_1^3 - 3u_1^2 v_1^4 - 12u_1 v_1^5 + 4v_1^6 + \\ &\quad + 24u_1^4 v_1 w_1 - 48u_1^3 v_1^2 w_1 - 18u_1^2 v_1^3 w_1 + 42u_1 v_1^4 w_1 - 12v_1^5 w_1 - 8u_1^4 w_1^2 + \\ &\quad + 16u_1^3 v_1 w_1^2 + 42u_1^2 v_1^2 w_1^2 - 50u_1 v_1^3 w_1^2 + 13v_1^4 w_1^2 - 24u_1^2 v_1 w_1^3 + \\ &\quad + 24u_1 v_1^2 w_1^3 - 6v_1^3 w_1^3 + 4u_1^2 w_1^4 - 4u_1 v_1 w_1^4 + v_1^2 w_1^4 + \dots, \\ K_8 &= u_2 v_2^2 w_2. \end{aligned}$$

Вычисленные при помощи компьютера члены интеграла K_6 , содержащие вторые производные $\mathbf{u}_2$, обозначены здесь многоточием. Последний интеграл K_8 восьмого порядка является прямым следствием вырожденности матрицы A , и вопрос о существовании нужного числа дополнительных первых интегралов уравнений (13) остается, таким образом, открытым.

Приведенные выше примеры (9) и (12) подтверждают гипотезу о том, что критерий интегрируемости гамильтоновой системы (1) при любом r заключается в сводимости матрицы A , определяющей лагранжиан (5) и удовлетворяющей условиям (2), к матрицам Картана [3]. На наш взгляд, дополнительным доводом в пользу этой гипотезы является обнаруженная при $r = 2$ и подтвержденная дополнительными экспериментами прямая связь старших членов $\omega(\mathbf{u}_1)$ многочлена (4) и диаграммы Дынкина соответствующей матрицы Картана. Например, при $\gamma = 3$ в случае (9) в силу формулы (11) мы находим, что

$$\omega(u_1, v_1) = u_1^2(v_1 - u_1)^2(v_1 - 2u_1)^2, \quad \gamma = 3;$$

а в случае (12) при $\gamma = 1$ и $\gamma = 2$ соответственно имеем

$$\omega(u_1, v_1, w_1) = \begin{cases} u_1 w_1 (u_1 - v_1)(v_1 - w_1), & \gamma = 1, \\ u_1^2 (u_1 - v_1)^2 (v_1 - w_1)^2, & \gamma = 2. \end{cases} \quad (14)$$

Важно отметить, что эти однородные многочлены $\omega(\mathbf{u}_1)$ приводимы над кольцом многочленов с целыми коэффициентами. Это далеко не очевидное требование не выполняется, например, для $\omega(\mathbf{u}_1)$ из примера 1.

Переход от классических первых интегралов (4) к полиномиальным интегралам общего вида (3) основан на следующем определении²⁾.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Однородный многочлен (3) степени m от дифференциальных переменных (7) с ненулевой линейной по старшим переменным частью: $W_m = \sum \alpha_i u_m^i + \dots$, называется *гиперинтегралом* экспоненциальной системы (1), если после подстановки $\mathbf{u}_k \rightarrow D_x^k \mathbf{u}$ выполняется уравнение

$$D_y W(\mathbf{u}_x, \mathbf{u}_{xx}, \mathbf{u}_{xxx}, \dots) = 0, \quad \text{mod } \mathbf{u}_{xy} = e^{A\mathbf{u}}. \quad (15)$$

Ассоциированная с (1) гиперболическая система уравнений с частными производными

$$\mathbf{u}_{xy} = e^{A\mathbf{u}}, \quad u_{xy}^i = \exp\left(\sum_{j=1}^r a_{ij} u^j\right) \stackrel{\text{def}}{=} e_i, \quad i \in [r], \quad (16)$$

является *двумеризацией* дифференциальных уравнений лагранжевой системы в смысле замены $D_t^2 \leftrightarrow D_x D_y$. Заметим также, что решения вида плоской волны $\mathbf{u}(x, y) = \vec{f}(x + y)$ гиперболической системы дают решения дифференциальных уравнений (1) и что гиперболические уравнения можно рассматривать как ослабленный вариант дифференциальных уравнений (1).

Очевидно, уравнение (15) для гиперинтегралов можно рассматривать независимо от (4). Например, при $m = 2$, дифференцируя многочлен второй степени $W(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)$

²⁾Связь этого определения с матрицами Картана была установлена в препринте [4].

при помощи формул

$$D_y(u_1^i) = e_i, \quad D_y(u_{xx}^i) = D_x D_y(u_x^i) = \hat{u}_1^i e_i, \quad \hat{u}_1^i \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{j=1}^r a_{ij} u_1^j, \quad (17)$$

можно убедиться, что решением уравнения (15) является “гамильтониан” $H(\mathbf{u}_x, \mathbf{u}_{xx})$ и что при $m = 2$ и условиях (2) уравнения (4) и (15) эквивалентны. Для того чтобы подчеркнуть независимость подхода к интегралам, основанного на двумеризованной версии (16) системы, мы будем, как правило, называть гиперинтегралы y -интегралами. Условие невырожденности матрицы A является существенным при сопоставлении уравнений (4) и (15), и в рассмотренном выше примере 1 вообще не удастся найти y -интегралов порядка $m > 2$, хотя имеется интеграл четвертого порядка вида (4). Основное отличие y -интегралов от классических связано с операцией внутреннего дифференцирования (7), действие которой совпадает с действием оператора D_x на функциях от дифференциальных переменных $\mathbf{u}_j$, $j \geq 1$. Решением уравнения (15) при $r = 2$ является

$$H_x = v_3 + \gamma u_3 + \gamma(2u_1 - v_1)u_2 + (2v_1 - \gamma u_1)v_2, \quad (18)$$

а также H_{xx} и т. д. Аналогичный классический первый интеграл, соответствующий замене $u_2^i \leftrightarrow e_i$ в (18) при использовании формул (8), оказывается, как легко понять, тривиальным.

Дополнительное дифференцирование (7) позволяет выделить главную, линейную по старшим переменным часть y -интегралов, и в силу [4] мы имеем

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Невырожденная гиперболическая система (16), ассоциированная с гамильтоновой системой (1), (2), обладает полным набором y -интегралов следующего вида:*

$$W_m^i = u_m^i - u_1^i \hat{u}_{m-1}^i + \dots, \quad i \in [r], \quad m \gg 1, \quad (19)$$

в том и только том случае, если соответствующая матрица A является одной из матриц Картана (см. [3]).

Таким образом, определение 1 и условие существования базиса y -интегралов (19), которые являются условиями расщепления гамильтониана, предлагаются нами в качестве альтернативы классического условия существования r интегралов (4) в инволюции для гамильтоновой системы (1).

Для иллюстрации сформулированного выше утверждения рассмотрим задачу о построении y -интеграла вида (19) при $r = 2$.

ПРИМЕР 2. Пусть нарушено условие невырожденности $a_{12}a_{21} \neq 0$ (ср. (9)) и $a_{12} = a_{21} = 0$. Тогда динамическая система и ее гамильтониан выглядят просто:

$$\ddot{u} = e^v, \quad \ddot{v} = e^u, \quad H = u_2 + v_2 - u_1 v_1,$$

но задача о дополнительных классических первых интегралах вида (4) является сложной. Рассмотрим задачу о построении y -интеграла

$$W = u_{m+1} - u_1 v_m + f(u_1, v_1) u_{m-1} + g(u_1, v_1) v_{m-1} + \dots, \quad m > 3, \quad (20)$$

в виде (3) однородного многочлена от дифференциальных переменных. В случае

$$u_{xy} = e_1, \quad v_{xy} = e_2, \quad e_1 = e^v, \quad e_2 = e^u$$

для доказательства несуществования подходящих квадратичных форм f и g в разложении многочлена (21), удовлетворяющего уравнению $D_y(W) = 0$, достаточно следующих двух формул:

$$\begin{aligned} D_y(u_{m+1} - u_1 v_m) &= m e_1 v_1 v_{m-1} - e_2 u_1 u_{m-1} + \dots, \\ D_y[au_1^2 + bu_1 v_1 + cv_1^2] &= e_1(2au_1 + bv_1) + e_2(bu_1 + 2cv_1). \end{aligned}$$

Рассмотрим кратко вопрос о взаимосвязи классического и альтернативного подходов к интегралам. Пусть для определенности $r = 3$. Ясно, что любой y -интеграл W можно превратить в классический интеграл K , используя, например, уравнения вида (13). Однако ответ будет тривиальным $K = 0$, если $W = D_x W$. Ответ будет зависеть от старших по степени членов, которые образуют однородный многочлен от u_1, v_1, w_1 , который мы обозначаем $\omega(W)$ и который образует “хвост” рассматриваемого многочлена W . Нетрудно доказать, что $\omega(W) = \omega(K)$ и что в случае классических интегралов “хвост” $\omega(K)$ (см. (10)) однозначно определяет все оставшиеся коэффициенты многочлена K . Предположим теперь, что выполнены альтернативные условия интегрируемости и существует базис из трех y -интегралов (19). Тогда в силу предложения 1 матрица A является матрицей Картана и при построении базиса y -интегралов остается вопрос о выборе минимально возможного $m > 2$ в формулах (19), иначе соответствующие классические интегралы K будут заведомо нулевыми. Нетрудно понять, что подходящим выбором m является верхняя грань степеней классических первых интегралов. Например, при $\gamma = 1$ в матрице Картана (12)³⁾, полагая $m = 4$, мы получаем

$$\begin{aligned} \omega_4 &\stackrel{\text{def}}{=} u_1 w_1 (u_1 - v_1) (v_1 - w_1), \\ W_4^1 &= u_4 - u_1 \hat{u}_3 + u_2(2u_2 - v_2 - w_2) + u_2(2u_1 v_1 - v_1^2 + v_1 w_1 - w_1^2) + \\ &\quad + v_2 u_1 (u_1 - 2v_1) + w_2(u_1 v_1 - u_1^2) + \omega_4, \\ W_4^2 &= v_4 - v_1 \hat{v}_3 + 2v_2^2 - u_2 v_2 + 2u_2 w_2 - v_2 w_2 + u_2(-2u_1 v_1 + v_1^2 - 2v_1 w_1 + 2w_1^2) + \\ &\quad + v_2(-u_1^2 + 2u_1 v_1) + 2v_1 w_1 - w_1^2 + \\ &\quad + w_2(2u_1^2 + v_1^2 - 2u_1 v_1 - 2v_1 w_1) - 2\omega_4, \\ W_4^3 &= w_4 - w_1 \hat{w}_3 + w_2(2w_2 - v_2 - u_2) + u_2 w_1 (v_1 - w_1) + v_2 w_1 (w_1 - 2v_1) + \\ &\quad + w_2(u_1 v_1 + 2v_1 w_1 - u_1^2 - v_1^2) + \omega_4. \end{aligned}$$

Классические интегралы в этом случае имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} H &= u_2 + v_2 + w_2 + u_1^2 + v_1^2 + w_1^2 - u_1 v_1 - v_1 w_1, \\ K_3 &= u_1 v_1 (v_1 - u_1) + v_1 w_1 (w_1 - v_1) + u_1 v_2 + v_1 w_2 - u_2 v_1 - v_2 w_1, \\ K_4 &= \omega_4 + v_1 w_1 u_2 + u_1 v_1 w_2 - u_1 w_1 v_2 - w_1^2 u_2 - u_1^2 w_2 - u_2 w_2. \end{aligned} \tag{21}$$

Можно проверить, используя приведенные выше формулы, что

$$K_4 \equiv W_4^1 \pmod{(13)}, \quad H_{xx} = W_4^1 + W_4^2 + W_4^3. \tag{22}$$

³⁾В линейной теории колебаний это соответствует жесткому закреплению концов.

В случае (12) при $\gamma = 2$ и $m = 6$ имеем аналогичные соотношения:

$$K_6 \equiv W_6^1 \pmod{(13)}, \quad H_{xxxx} = 2W_6^1 + 2W_6^2 + W_6^3. \quad (23)$$

Эти соотношения приводят нас к следующему утверждению о разделении переменных в продифференцированном гамильтониане $H_{x\dots x}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Для матриц Картана при $r = 3$ базис (19) из y -интегралов W_m^i осуществляет в силу (22) и (23) разложение линейной части продифференцированного гамильтониана H :*

$$H = \gamma(u_2 + v_2) + w_2 + w_1^2 + \gamma(u_1^2 + v_1^2 - u_1v_1 - v_1w_1), \quad \gamma = 1, 2.$$

Случай матриц Картана (9) при $r = 2$ подтверждает гипотезу об универсальном характере этого утверждения о разделении переменных в продифференцированном гамильтониане:

$$\begin{aligned} H &= v_2 + v_1^2 + \gamma(u_2 + u_1^2 - u_1v_1), & \gamma &= 1, 2, 3, \\ \gamma = 1 &\Rightarrow W_3^{(1)} + W_3^{(2)} = H_x, \\ \gamma = 2 &\Rightarrow W_4^{(2)} + 2W_4^{(1)} = H_{xx}, & \omega_4 &= u_1^2(u_1 - v_1)^2, \\ \gamma = 3 &\Rightarrow W_6^{(2)} + 3W_6^{(1)} = H_{xxx}, & \omega_6 &= u_1^2(v_1 - u_1)^2(v_1 - 2u_1)^2. \end{aligned}$$

Соответствующие формулы при $\gamma = 1, 2$ имеют вид

$$\begin{aligned} W_4^{(1)} &= u_4 - u_1\hat{u}_3 - u_2v_2 + u_2(u_2 - 2u_1^2 + 4u_1v_1 - v_1^2) + v_2(u_1^2 - 2u_1v_1) - \omega, \\ W_4^{(2)} &= v_4 - v_1\hat{v}_3 - 2u_2v_2 + 2u_2(2u_1^2 + v_1^2 - 4u_1v_1) + 2v_2(v_2 + 2u_1v_1 - u_1^2) + 2\omega, \\ W_3^{(1)} &= u_3 - u_1\hat{u}_2 + u_1v_1(u_1 - v_1), & W_3^{(2)} &= v_3 - v_1\hat{v}_2 + u_1v_1(v_1 - u_1). \end{aligned}$$

При $\gamma = 3$

$$H = 3u_2 + 3u_1^2 + v_2 + v_1^2 - 3u_1v_1, \quad \omega = u_1^2(v_1 - u_1)^2(v_1 - 2u_1)^2$$

и формула для $W_6^{(1)}$ становится заметно длиннее своего классического аналога (11), и мы ее не приводим. Напомним, что соответствующие друг другу классический и обобщенные интегралы отвечают одной и той же однородной форме $\omega(u_1, v_1)$ и что гамильтониан H , удовлетворяющий обоим уравнениям (4) и (15), однозначно определяет элементы матрицы A .

В случае $r = 3$ приведенные ниже точные формулы для $\omega(u_1, v_1, w_1)^4$:

$$\begin{aligned} A_3 : \quad H &= u_2 + v_2 + w_2 + u_1^2 + v_1^2 + w_1^2 - u_1v_1 - v_1w_1 : \\ &\quad \omega = u_1w_1(u_1 - v_1)(v_1 - w_1), \\ B_3 : \quad H &= u_1^2 + u_2 + v_1^2 + v_2 - u_1v_1 + 2w_1^2 + 2w_2 - 2v_1w_1 : \\ &\quad \omega = u_1^2(u_1 - v_1)^2(v_1 - 2w_1)^2, \\ C_3 : \quad H &= 2u_1^2 + 2u_2 + 2v_1^2 + 2v_2 - 2u_1v_1 + w_1^2 + w_2 - 2v_1w_1 : \\ &\quad \omega = u_1^2(u_1 - v_1)^2(v_1 - w_1)^2, \end{aligned}$$

соответствующие классическим сериям матриц Картана (см. [1]), обобщаются очевидным образом на любое $r > 3$. Серия D_r , $r \geq 4$, и особые случаи F_4 , E_6 , E_7 , E_8 заслуживают, по-видимому, дополнительного исследования.

⁴⁾ Аналогичные приведенным выше для $r = 2$.

3. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

При заданной матрице Картана A задача о построении полиномиальных первых интегралов гамильтоновой экспоненциальной системы (1) вида (4) и (15) сводится к задаче линейной алгебры. Причем классическая форма (4) “главного” первого интеграла максимально возможного порядка m однозначно восстанавливается по однородной форме $\omega(\mathbf{u}_1)$ степени m , вид которой определяется матрицей A (см. формулы выше).

Установленная в данной работе взаимосвязь классических первых интегралов гамильтоновых уравнений с так называемыми y -интегралами ассоциированной гиперболической системы открывает новые возможности в исследовании симметричных свойств последней, начатом в совместной с Лезновым работе [5] и продолженном не так давно в работах [6], [7].

Список литературы

- [1] А. Н. Лезнов, “О полной интегрируемости одной нелинейной системы дифференциальных уравнений в частных производных в двумерном пространстве”, *ТМФ*, **42**:3 (1980), 343–349.
- [2] В. В. Козлов, Д. В. Трещёв, “Полиномиальные интегралы гамильтоновых систем с экспоненциальным взаимодействием”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **53**:3 (1989), 537–556.
- [3] У. Фултон, Дж. Харрис, *Теория представлений. Начальный курс*, Изд-во МЦНМО, М., 2017.
- [4] А. Шабат, Р. Ямилов, *Экспоненциальные системы типа I и матрицы Картана*, Препринт Башкирского филиала АН СССР, БФАН СССР, Уфа, 1981.
- [5] А. Н. Лезнов, А. Б. Шабат, “Условия обрыва рядов теории возмущений”, *Интегрируемые системы*, ред. А. Б. Шабат, БФАН СССР, Уфа, 1982, 34–44.
- [6] Д. К. Демской, С. Я. Старцев, “О построении симметрий по интегралам гиперболических систем уравнений”, *Фундамент. и прикл. матем.*, **10**:1 (2004), 29–37.
- [7] В. В. Соколов, С. Я. Старцев, “Симметрии нелинейных гиперболических систем типа цепочек Тоды”, *ТМФ*, **155**:2 (2008), 344–355.

Поступила в редакцию 7.03.2018