Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. В. Жаринов, Анализ в дифференциальных алгебрах
и модулях, *ТМФ*, 2018, том 196, номер 1, 3–21

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf9566>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.219.149

26 апреля 2023 г., 13:57:46

© 2018 г.

В. В. Жаринов*

АНАЛИЗ В ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ АЛГЕБРАХ И МОДУЛЯХ

Предлагается краткое введение в математические методы и технику дифференциальных алгебр и модулей, адаптированную к задачам математической и теоретической физики.

Ключевые слова: алгебра, дифференциальная алгебра, модуль, дифференциальный модуль, мультипликатор, дифференцирование, комплекс де Рама, спектральная последовательность, вариационный бикомплекс.

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf9566>

1. ВВЕДЕНИЕ

Дифференциальные алгебры (см., например, [1]–[3]) широко известны и применяются в алгебре и топологии, тогда как их приложения в математической физике гораздо менее признанны (хотя и неявно используются, особенно в уравнениях в частных производных).

Здесь мы предлагаем короткое введение в математические методы и технику дифференциальных алгебр и модулей, адаптированную к задачам математической и теоретической физики. Изложение основано на личном опыте автора, книгах [1]–[7] и работах [8]–[13].

Мы пользуемся обозначениями, соглашениями и результатами статьи [14]. В частности:

- $\mathbb{F} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$;
- $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\} \subset \mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, \dots\} \subset \mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$.

Мы также пользуемся следующими обозначениями теории гомологий (см., например, [4]):

- $\text{Hom}(\mathcal{S}; \mathcal{S}')$ есть множество всех отображений множества $\mathcal{S}$ в множество $\mathcal{S}'$;

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 14-50-00005).

*Математический институт им. В. А. Стеклова Российской академии наук, Москва, Россия. E-mail: zharinov@mi.ras.ru

- $\text{Hom}_{\mathbb{F}}(\mathcal{L}; \mathcal{L}')$ есть линейное пространство всех линейных отображений линейного пространства $\mathcal{L}$ в линейное пространство $\mathcal{L}'$;
- $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathcal{M}; \mathcal{M}')$ есть $\mathcal{A}$ -модуль всех $\mathcal{A}$ -линейных отображений $\mathcal{A}$ -модуля $\mathcal{M}$ в $\mathcal{A}$ -модуль $\mathcal{M}'$, где $\mathcal{A}$ есть ассоциативная коммутативная алгебра;
- $\text{Hom}_{\text{alg}}(\mathcal{A}; \mathcal{A}')$ есть множество всех морфизмов категории алгебр алгебры $\mathcal{A}$ в алгебру $\mathcal{A}'$, где $\mathcal{A}, \mathcal{A}'$ – ассоциативные коммутативные алгебры;
- $\text{Hom}_{\text{Lie}}(\mathfrak{A}; \mathfrak{A}')$ есть множество всех морфизмов категории алгебр Ли алгебры Ли $\mathfrak{A}$ в алгебру Ли $\mathfrak{A}'$.

Напомним, что множество $\mathfrak{A}$ называется $\mathcal{A}$ -алгеброй Ли, если на ней заданы две структуры:

- структура алгебры Ли со скобкой Ли $[\cdot, \cdot]$;
- структура $\mathcal{A}$ -модуля, где $\mathcal{A}$ – ассоциативная коммутативная алгебра;

и эти структуры связаны условием согласования

- $[X, f \cdot Y] = Xf \cdot Y + f \cdot [X, Y]$ для всех $X, Y \in \mathfrak{A}$ и $f \in \mathcal{A}$.

Обозначим через $\text{Hom}_{\text{Lie} \cap \mathcal{A}}(\mathfrak{A}; \mathfrak{A}') = \text{Hom}_{\text{Lie}}(\mathfrak{A}; \mathfrak{A}') \cap \text{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathfrak{A}; \mathfrak{A}')$ множество всех морфизмов категории $\mathcal{A}$ -алгебр Ли $\mathcal{A}$ -алгебры Ли $\mathfrak{A}$ в $\mathcal{A}$ -алгебру Ли $\mathfrak{A}'$.

Все линейные операции выполняются над числовым полем $\mathbb{F}$. Как правило, предполагается суммирование по повторяющимся верхним и нижним индексам. Если соответствующее множество индексов бесконечное, мы предполагаем, что суммирование корректно определено. Если изучаемые объекты обладают естественными топологиями, мы предполагаем, что соответствующие отображения непрерывны. Например, если $\mathcal{S}$ и $\mathcal{S}'$ суть топологические пространства, то $\text{Hom}(\mathcal{S}; \mathcal{S}')$ есть множество всех непрерывных отображений пространства $\mathcal{S}$ в пространство $\mathcal{S}'$.

Мы используем терминологию, которая принята в алгебро-геометрическом подходе к уравнениям в частных производных, поскольку они являются основным объектом приложения развиваемой ниже техники.

2. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ АЛГЕБРЫ

В этом разделе (подробнее см. [11], [14]) используются следующие обозначения:

- $\mathcal{A}$ – ассоциативная коммутативная алгебра;
- $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}(\mathcal{A}) = \text{End}_{\mathcal{A}}(\mathcal{A})$ – унитарная ассоциативная алгебра всех мультипликаторов алгебры $\mathcal{A}$;
- $\mathfrak{D} = \mathfrak{D}(\mathcal{A})$ есть $\mathfrak{M}$ -алгебра Ли всех дифференцирований алгебры $\mathcal{A}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Дифференциальная алгебра есть пара $(\mathcal{A}, \mathcal{D})$, где $\mathcal{D} = \mathcal{D}(\mathcal{A})$ есть фиксированная подалгебра (картановская подалгебра) $\mathfrak{M}$ -алгебры Ли $\mathfrak{D} = \mathfrak{D}(\mathcal{A})$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Пара (F, φ) , где отображение $F \in \text{Hom}_{\text{alg}}(\mathcal{A}; \mathcal{B})$, а отображение $\varphi \in \text{Hom}_{\text{Lie} \cap \mathfrak{M}}(\mathcal{D}(\mathcal{A}); \mathcal{D}(\mathcal{B}))$, называется морфизмом дифференциальной алгебры $(\mathcal{A}, \mathcal{D}(\mathcal{A}))$ в дифференциальную алгебру $(\mathcal{B}, \mathcal{D}(\mathcal{B}))$, если $F(Xf) = (\varphi X)(Ff)$ для всех $f \in \mathcal{A}$, $X \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$. В этом случае мы будем писать $(F, \varphi): (\mathcal{A}, \mathcal{D}(\mathcal{A})) \rightarrow (\mathcal{B}, \mathcal{D}(\mathcal{B}))$.

Пусть $(\mathcal{A}, \mathcal{D})$ есть дифференциальная алгебра.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Подалгебра $\mathcal{B}$ (идеал $\mathcal{I}$) алгебры $\mathcal{A}$ называется дифференциальной (дифференциальным), если $\mathcal{D}\mathcal{B} \subset \mathcal{B}$, т.е. $Xf \in \mathcal{B}$ для всех $X \in \mathcal{D}$ и $f \in \mathcal{B}$ ($\mathcal{D}\mathcal{I} \subset \mathcal{I}$). В этом случае пара $(\mathcal{B}, \mathcal{D})$ (пара $(\mathcal{I}, \mathcal{D})$) есть дифференциальная алгебра.

В частности, если $(\mathcal{I}, \mathcal{D})$ есть дифференциальный идеал дифференциальной алгебры $(\mathcal{A}, \mathcal{D})$, то определена дифференциальная фактор-алгебра $(\mathbf{A}, \mathbf{D})$ правилом $\mathbf{A} = \mathcal{A}/\mathcal{I}$, $\mathbf{D} = \{\mathbf{X} = [X] \in \mathfrak{D}(\mathbf{A}) \mid X \in \mathcal{D}\}$, $[X][f] = [Xf]$ для всех $f \in \mathcal{A}$, где $[f] = f + \mathcal{I}$, $[Xf] = Xf + \mathcal{I} \in \mathbf{A}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Для всякого морфизма $(F, \varphi): (\mathcal{A}, \mathcal{D}(\mathcal{A})) \rightarrow (\mathcal{B}, \mathcal{D}(\mathcal{B}))$ ядро $\text{Ker } F$ есть дифференциальный идеал алгебры $(\mathcal{A}, \mathcal{D}(\mathcal{A}))$, тогда как образ $\text{Im } F$ является дифференциальной подалгеброй алгебры $(\mathcal{B}, \mathcal{D}(\mathcal{B}))$, если дополнительно отображение $\varphi: \mathcal{D}(\mathcal{A}) \rightarrow \mathcal{D}(\mathcal{B})$ сюръективно.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Элемент $f \in \mathcal{A}$ называется $\mathcal{D}$ -постоянным, если $\mathcal{D}f = 0$, т. е. $Xf = 0$ для всех $X \in \mathcal{D}$.

Пусть $\mathcal{A}_{\mathcal{D}}$ есть множество всех $\mathcal{D}$ -постоянных элементов алгебры $\mathcal{A}$. Очевидно, $\mathcal{A}_{\mathcal{D}}$ есть подалгебра алгебры $\mathcal{A}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Для всякого морфизма $(F, \varphi): (\mathcal{A}, \mathcal{D}(\mathcal{A})) \rightarrow (\mathcal{B}, \mathcal{D}(\mathcal{B}))$, где отображение φ сюръективно, сужение $F|_{\mathcal{A}_{\mathcal{D}}}: \mathcal{A}_{\mathcal{D}} \rightarrow \mathcal{B}_{\mathcal{D}}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Мультипликатор $R \in \mathfrak{M}$ называется $\mathcal{D}$ -постоянным, если $\mathcal{D}R = [\mathcal{D}, R] = 0$, т. е. $[X, R] = 0$ для всех $X \in \mathcal{D}$.

Пусть $\mathfrak{M}_{\mathcal{D}}$ есть множество всех $\mathcal{D}$ -постоянных мультипликаторов алгебры $\mathfrak{M}$. Очевидно,

- $\mathfrak{M}_{\mathcal{D}}$ есть унитарная подалгебра алгебры $\mathfrak{M}$;
- $\mathcal{A}_{\mathcal{D}}$ есть подмодуль $\mathfrak{M}_{\mathcal{D}}$ -модуля $\mathcal{A}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6. Дифференцирование $X \in \mathfrak{D}$ называется дифференцированием Ли–Беклунда, если $[\mathcal{D}, X] \subset \mathcal{D}$, т. е. $[Y, X] \in \mathcal{D}$ для всех $Y \in \mathcal{D}$.

Пусть $\mathfrak{D}_{\mathcal{D}} = \mathfrak{D}_{\mathcal{D}}(\mathcal{A})$ есть множество всех дифференцирований Ли–Беклунда дифференциальной алгебры $(\mathcal{A}, \mathcal{D})$. Очевидно,

- $\mathfrak{D}_{\mathcal{D}}$ есть подалгебра $\mathfrak{M}_{\mathcal{D}}$ -алгебры Ли $\mathfrak{D}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Определена возрастающая фильтрация

$$\mathcal{D} = \mathfrak{D}_{\mathcal{D}}^{(-1)} \subset \mathfrak{D}_{\mathcal{D}} = \mathfrak{D}_{\mathcal{D}}^{(0)} \subset \cdots \subset \mathfrak{D}_{\mathcal{D}}^{(q)} \subset \mathfrak{D}_{\mathcal{D}}^{(q+1)} \subset \cdots$$

$\mathfrak{M}_{\mathcal{D}}$ -алгебр Ли, где $\mathfrak{D}_{\mathcal{D}}^{(q)} = \{X \in \mathfrak{D} \mid [\mathcal{D}, X] \subset \mathfrak{D}_{\mathcal{D}}^{(q-1)}\}$, $q \in \mathbb{Z}_+$. Более того,

- $\mathcal{D}$ есть идеал $\mathfrak{M}_{\mathcal{D}}$ -алгебры Ли $\mathfrak{D}_{\mathcal{D}}$;
- $[\mathfrak{D}_{\mathcal{D}}^{(p)}, \mathfrak{D}_{\mathcal{D}}^{(q)}] \subset \mathfrak{D}_{\mathcal{D}}^{(p+q)}$ для всех $p, q \in \mathbb{Z}_+$.

Общее определение фильтрации можно найти в книгах [4], [5]. Отметим, что мы не утверждаем, что $\bigcup_{q \in \mathbb{Z}_+} \mathfrak{D}_{\mathcal{D}}^{(q)} = \mathfrak{D}$ или $\lim_{q \rightarrow \infty} \mathfrak{D}_{\mathcal{D}}^{(q)} = \mathfrak{D}$ в каком-либо смысле.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7. Дифференциальная алгебра $(\mathcal{A}, \mathcal{D})$ называется регулярной, если выполняются следующие условия:

- $\mathfrak{M}$ -алгебра Ли $\mathfrak{D}$ разбита на вертикальную и горизонтальную подалгебры, $\mathfrak{D} = \mathfrak{D}_V \oplus_{\mathfrak{M}} \mathfrak{D}_H$;
- вертикальная подалгебра $\mathfrak{D}_V = \mathfrak{D}_V(\mathcal{A})$ имеет $\mathfrak{M}$ -базис $\partial = \{\partial_a \in \mathfrak{D}_V \mid a \in \mathbf{a}\}$, где $\mathbf{a}$ – множество индексов, $[\partial_a, \partial_b] = 0$, $a, b \in \mathbf{a}$;

- горизонтальная (картановская) подалгебра $\mathfrak{D}_H = \mathfrak{D}_H(\mathcal{A}) = \mathcal{D}$ имеет $\mathfrak{M}$ -базис $D = \{D_\mu \in \mathfrak{D}_H \mid \mu \in \mathbf{m}\}$, $\mathbf{m} = \{1, \dots, m\}$, $m \in \mathbb{N}$, $[D_\mu, D_\nu] = 0$, $\mu, \nu \in \mathbf{m}$;
- коммутаторы $[D_\mu, \partial_a] = \Gamma_{\mu a}^b \partial_b \in \mathfrak{D}_V$, $\mu \in \mathbf{m}$, $a, b \in \mathbf{a}$, коэффициенты $\Gamma_{\mu b}^a \in \mathfrak{M}$, в частности, $[D_\mu, X] = \nabla_\mu X = (\nabla_\mu X)^a \partial_a \in \mathfrak{D}_V$ для всех $X = X^a \partial_a \in \mathfrak{D}_V$, $X^a \in \mathfrak{M}$, где $(\nabla_\mu X)^a = D_\mu X^a + \Gamma_{\mu b}^a X^b$.

Пусть $(\mathcal{A}, \mathfrak{D}_H)$ есть регулярная дифференциальная алгебра.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. *Коммутатор*

$$[\nabla_\mu, \nabla_\nu]^a X^b = ((D_\mu \Gamma_{\nu b}^a - D_\nu \Gamma_{\mu b}^a) + (\Gamma_{\mu c}^a \Gamma_{\nu b}^c - \Gamma_{\nu c}^a \Gamma_{\mu b}^c)) X^b, \quad a \in \mathbf{a},$$

или, в матричных обозначениях, $[\nabla_\mu, \nabla_\nu] = F_{\mu\nu}$, где

- ковариантная производная $\nabla = (\nabla_\mu) \in \text{Hom}_{\mathbb{F}}(\mathfrak{M}^{\mathbf{a}}; \mathfrak{M}_{\mathbf{m}}^{\mathbf{a}})$;
- связность $\Gamma = (\Gamma_\mu)$ с компонентами $\Gamma_\mu = (\Gamma_{\mu b}^a) \in \mathfrak{M}_{\mathbf{a}}^{\mathbf{a}}$;
- кривизна $F = (F_{\mu\nu})$ с компонентами $F_{\mu\nu} \in \mathfrak{M}_{\mathbf{a}}^{\mathbf{a}}$;
- $F_{\mu\nu} = D_\mu \Gamma_\nu - D_\nu \Gamma_\mu + [\Gamma_\mu, \Gamma_\nu]$, $\mu, \nu \in \mathbf{m}$.

ПРИМЕР 1. Пусть

- $X = \mathbb{R}^{\mathbf{m}} = \{x = (x^\mu) \mid x^\mu \in \mathbb{R}, \mu \in \mathbf{m}\}$ есть пространство независимых переменных;
- $U = \mathbb{R}^{\mathbf{a}} = \{u = (u^a) \mid u^a \in \mathbb{R}, a \in \mathbf{a}\}$ есть пространство дифференциальных переменных, $\mathbf{a}$ – бесконечное множество индексов;
- $\mathcal{A} = C_{\text{fin}}^\infty(XU)$ есть унитарная ассоциативная коммутативная алгебра $\mathbb{F}$ -значных гладких функций, зависящих от конечного числа аргументов x^μ, u^a , где $XU = X \times U$.

Разобьем $\mathcal{A}$ -алгебру Ли $\mathfrak{D} = \mathfrak{D}(\mathcal{A})$ на вертикальную и горизонтальную части $\mathfrak{D} = \mathfrak{D}_V \oplus_{\mathcal{A}} \mathfrak{D}_H$ следующим образом:

- $\mathfrak{D}_V$ имеет $\mathcal{A}$ -базис $\partial = \{\partial_{u^a} \mid a \in \mathbf{a}\}$;
- $\mathfrak{D}_H$ имеет $\mathcal{A}$ -базис $D = \{D_\mu \mid \mu \in \mathbf{m}\}$.

Здесь $D_\mu = \partial_{x^\mu} + h_\mu^a \cdot \partial_{u^a}$, а $\partial_{u^a}, \partial_{x^\mu}$ суть частные производные. Для выполнения условия $[D_\mu, D_\nu] = 0$ мы предположим, что коэффициенты $h_\mu^a \in \mathcal{A}$ удовлетворяют равенствам $D_\mu h_\nu^a - D_\nu h_\mu^a = 0$ для всех $a \in \mathbf{a}$, $\mu, \nu \in \mathbf{m}$.

В этом случае связность $\Gamma = (\Gamma_\mu)$ имеет компоненты $\Gamma_{\mu b}^a = -\partial_{u^b} h_\mu^a$, а кривизна $F = (F_{\mu\nu}) = 0$.

С геометрической точки зрения множество $D = \{D_\mu \mid \mu \in \mathbf{m}\}$ определяет инволютивное (в смысле Фробениуса) распределение на пространстве XU . Каждая функция $\phi = (\phi^a(x)) \in C^\infty(X; U)$ задает m -мерное подмногообразие $\Phi = \{u = \phi(x)\}$ в XU . Это подмногообразие будет интегральным многообразием распределения D , если $(D_\mu(u^a - \phi^a(x)))|_{u=\phi(x)} = 0$ для всех $\mu \in \mathbf{m}$, $a \in \mathbf{a}$, т.е. если функция $\phi(x)$ является решением определяющей системы: $\partial_{x^\mu} \phi^a(x) - h_\mu^a(x, \phi(x))$, $\mu \in \mathbf{m}$, $a \in \mathbf{a}$. Эта система имеет условие интегрирования $\partial_{x^\mu} h_\nu^a(x, \phi(x)) = \partial_{x^\nu} h_\mu^a(x, \phi(x))$, $\mu, \nu \in \mathbf{m}$, $a \in \mathbf{a}$, для любого решения $\phi(x)$ системы. Последнее условие выполнено в силу

предположения $D_\mu h_\nu^a - D_\nu h_\mu^a = 0$ и правила дифференцирования сложной функции

$$\partial_{x^\mu} f(x, \phi(x)) = (D_\mu f(x, \mathbf{u}))|_{\mathbf{u}=\phi(x)}$$

для всех $\mu \in \mathbf{m}$, $f \in \mathcal{A}$ и любого решения $\phi(x)$ определяющей системы.

Пусть снова $(\mathcal{A}, \mathfrak{D}_\mathbf{H})$ есть регулярная дифференциальная алгебра.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. *Определена возрастающая фильтрация*

$$0 \subset \mathcal{A}_\mathbf{H}^{(0)} = \mathcal{A}_\mathcal{D} \subset \mathcal{A}_\mathbf{H}^{(1)} \subset \dots \subset \mathcal{A}_\mathbf{H}^{(q)} \subset \mathcal{A}_\mathbf{H}^{(q+1)} \subset \dots$$

$\mathfrak{M}_\mathcal{D}$ -модулей, где $\mathcal{A}_\mathbf{H}^{(q)} = \{f \in \mathcal{A} \mid D_\mu f \in \mathcal{A}_\mathbf{H}^{(q-1)}, \mu \in \mathbf{m}\}$, $q \in \mathbb{N}$. В частности, $\mathcal{A}_\mathbf{H}^{(p)} \cdot \mathcal{A}_\mathbf{H}^{(q)} \subset \mathcal{A}_\mathbf{H}^{(p+q)}$ для всех $p, q \in \mathbb{Z}_+$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6. *Определена возрастающая фильтрация*

$$0 \subset \mathfrak{M}_\mathbf{H}^{(0)} = \mathfrak{M}_\mathcal{D} \subset \mathfrak{M}_\mathbf{H}^{(1)} \subset \dots \subset \mathfrak{M}_\mathbf{H}^{(q)} \subset \mathfrak{M}_\mathbf{H}^{(q+1)} \subset \dots$$

$\mathfrak{M}_\mathcal{D}$ -модулей, где $\mathfrak{M}_\mathbf{H}^{(q)} = \{R \in \mathfrak{M} \mid D_\mu(R) \in \mathfrak{M}_\mathbf{H}^{(q-1)}, \mu \in \mathbf{m}\}$, $q \in \mathbb{N}$. В частности, $\mathfrak{M}_\mathbf{H}^{(p)} \circ \mathfrak{M}_\mathbf{H}^{(q)} \subset \mathfrak{M}_\mathbf{H}^{(p+q)}$ для всех $p, q \in \mathbb{Z}_+$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7. *Определена возрастающая фильтрация*

$$0 = \mathcal{E}^{(-1)} \subset \mathcal{E} = \mathcal{E}^{(0)} \subset \dots \subset \mathcal{E}^{(q)} \subset \mathcal{E}^{(q+1)} \subset \dots$$

$\mathfrak{M}_\mathcal{D}$ -алгебр Ли, где $\mathcal{E}^{(q)} = \{X \in \mathfrak{D}_\mathbf{V} \mid [D_\mu, X] \in \mathcal{E}^{(q-1)}, \mu \in \mathbf{m}\}$, $q \in \mathbb{N}$. Более того,

- $[\mathcal{E}^{(p)}, \mathcal{E}^{(q)}] \subset \mathcal{E}^{(p+q)}$, $p, q \in \mathbb{Z}_+$;
- $\mathfrak{D}_\mathcal{D}^{(q)} = \mathcal{E}^{(q)} \oplus_{\mathfrak{M}_\mathcal{D}} \mathcal{D}$, $q \in \mathbb{Z}_+$.

3. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ МОДУЛИ

Пусть $(\mathcal{A}, \mathcal{D})$ – дифференциальная алгебра, $\mathcal{M}$ – $\mathcal{A}$ -модуль, $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}(\mathcal{M})$ – алгебра всех мультипликаторов $\mathcal{A}$ -модуля $\mathcal{M}$, и $\mathfrak{D} = \mathfrak{D}(\mathcal{M})$ – $\mathfrak{M}$ -алгебра Ли всех дифференцирований $\mathcal{A}$ -модуля $\mathcal{M}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8. *Дифференциальный модуль над дифференциальной алгеброй $(\mathcal{A}, \mathcal{D})$ (кратко, $(\mathcal{A}, \mathcal{D})$ -модуль) есть тройка $(\mathcal{M}, \kappa, \mathfrak{D})$, где*

- $\mathcal{M}$ есть $\mathcal{A}$ -модуль;
- отображение $\kappa \in \text{Hom}_{\text{Lie} \cap \mathcal{A}}(\mathfrak{D}; \mathfrak{D})$, в частности $\kappa[X, Y] = [\kappa X, \kappa Y]$ для всех $X, Y \in \mathfrak{D}$;
- $\mathfrak{D}$ есть картановская подалгебра $\mathfrak{M}$ -алгебры Ли $\mathfrak{D}$;
- условие согласования $\kappa|_{\mathcal{D}}: \mathcal{D} \rightarrow \mathfrak{D}$.

Пусть $(\mathcal{M}, \kappa, \mathfrak{D})$ есть дифференциальный модуль.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 9. Подмодуль $\mathcal{N}$ $\mathcal{A}$ -модуля $\mathcal{M}$ называется *дифференциальным*, если $\mathfrak{D}\mathcal{N} \subset \mathcal{N}$. В этом случае пара $(\mathcal{N}, \mathfrak{D})$ есть дифференциальный модуль.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 10. Элемент $M \in \mathcal{M}$ называется *$\mathfrak{D}$ -постоянным*, если $\mathfrak{D}M = 0$.

Пусть $\mathcal{M}_\mathfrak{D}$ есть множество всех $\mathfrak{D}$ -постоянных элементов $\mathcal{A}$ -модуля $\mathcal{M}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 11. Мультипликатор $\mathbf{R} \in \mathfrak{M}$ называется $\mathcal{D}$ -постоянным, если $\mathcal{D}(\mathbf{R}) = [\mathcal{D}, \mathbf{R}] = 0$.

Пусть $\mathfrak{M}_{\mathcal{D}}$ есть множество всех $\mathcal{D}$ -постоянных элементов алгебры $\mathfrak{M}$. Очевидно,

- $\mathfrak{M}_{\mathcal{D}}$ есть унитарная подалгебра алгебры $\mathfrak{M}$;
- $\mathcal{M}_{\mathcal{D}}$ есть подмодуль $\mathfrak{M}_{\mathcal{D}}$ -модуля $\mathcal{M}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 12. Дифференцирование $\mathbf{X} \in \mathfrak{D}$ называется *дифференцированием Ли–Беклунда*, если $[\mathcal{D}, \mathbf{X}] \subset \mathcal{D}$.

Пусть $\mathfrak{D}_{\mathcal{D}}$ есть множество всех дифференцирований Ли–Беклунда дифференциального модуля $(\mathcal{M}, \mathcal{D})$. Очевидно,

- $\mathfrak{D}_{\mathcal{D}}$ есть подалгебра $\mathfrak{M}_{\mathcal{D}}$ -алгебры Ли $\mathfrak{D}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 8. Определена возрастающая фильтрация

$$\mathcal{D} = \mathfrak{D}_{\mathcal{D}}^{(-1)} \subset \mathfrak{D}_{\mathcal{D}} = \mathfrak{D}_{\mathcal{D}}^{(0)} \subset \cdots \subset \mathfrak{D}_{\mathcal{D}}^{(q)} \subset \mathfrak{D}_{\mathcal{D}}^{(q+1)} \subset \cdots$$

$\mathfrak{M}_{\mathcal{D}}$ -алгебр Ли, где $\mathfrak{D}_{\mathcal{D}}^{(q)} = \{\mathbf{X} \in \mathfrak{D} \mid [\mathcal{D}, \mathbf{X}] \subset \mathfrak{D}_{\mathcal{D}}^{(q-1)}\}$, $q \in \mathbb{Z}_+$. Более того,

- $\mathcal{D}$ есть идеал $\mathfrak{M}_{\mathcal{D}}$ -алгебры Ли $\mathfrak{D}_{\mathcal{D}}$;
- $[\mathfrak{D}_{\mathcal{D}}^{(p)}, \mathfrak{D}_{\mathcal{D}}^{(q)}] \subset \mathfrak{D}_{\mathcal{D}}^{(p+q)}$ для всех $p, q \in \mathbb{Z}_+$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 13. Пусть $(\mathcal{A}, \mathcal{D})$ есть регулярная дифференциальная алгебра с вертикальным $\mathfrak{M}$ -базисом $\partial = \{\partial_a \mid a \in \mathbf{a}\}$ и горизонтальным $\mathfrak{M}$ -базисом $D = \{D_{\mu} \mid \mu \in \mathbf{m}\}$. Дифференциальный модуль $(\mathcal{M}, \kappa, \mathcal{D})$ называется *регулярным*, если выполняются следующие условия:

- $\mathfrak{M}$ -алгебра Ли $\mathfrak{D}$ разбита в вертикальную и горизонтальную подалгебры, $\mathfrak{D} = \mathfrak{D}_{\mathbf{V}} \oplus \mathfrak{M} \mathfrak{D}_{\mathbf{H}}$;
- вертикальная подалгебра $\mathfrak{D}_{\mathbf{V}}$ имеет $\mathfrak{M}$ -базис $\partial = \{\partial_s = (\nabla_s, \partial_s) \in \mathfrak{D}_{\mathbf{V}} \mid \partial_s \in \partial, s \in \mathbf{a}_{\mathcal{M}}\}$, $[\partial_s, \partial_t] = 0$, $s, t \in \mathbf{a}_{\mathcal{M}}$;
- горизонтальная подалгебра $\mathfrak{D}_{\mathbf{H}} = \mathcal{D}$ имеет $\mathfrak{M}$ -базис $\mathbf{D} = \{D_{\sigma} = (\nabla_{\sigma}, D_{\sigma}) \in \mathfrak{D}_{\mathbf{H}} \mid D_{\sigma} \in D, \sigma \in \mathbf{m}_{\mathcal{M}}\}$, $[D_{\sigma}, D_{\tau}] = 0$, $\sigma, \tau \in \mathbf{m}_{\mathcal{M}}$;
- коммутаторы $[D_{\sigma}, \partial_s] = \Gamma_{\sigma s}^t \partial_t \in \mathfrak{D}_{\mathbf{V}}$, $\Gamma_{\sigma s}^t = (\Delta_{\sigma s}^t, \Gamma_{\sigma s}^t) \in \mathfrak{M}$, в частности $[D_{\sigma}, \mathbf{X}] = \nabla_{\sigma} \mathbf{X} = (\nabla_{\sigma} \mathbf{X})^s \partial_s \in \mathfrak{D}_{\mathbf{V}}$ для всех $\mathbf{X} = \mathbf{X}^s \partial_s \in \mathfrak{D}_{\mathbf{V}}$, $\mathbf{X}^s \in \mathfrak{M}$, где $(\nabla_{\sigma} \mathbf{X})^s = D_{\sigma} \mathbf{X}^s + \Gamma_{\sigma t}^s \mathbf{X}^t$.

Пусть $(\mathcal{M}, \kappa, \mathfrak{D}_{\mathbf{H}})$ есть регулярный дифференциальный модуль.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 9. Определена возрастающая фильтрация

$$0 \subset \mathcal{M}_{\mathbf{H}}^{(0)} = \mathcal{M}_{\mathcal{D}} \subset \mathcal{M}_{\mathbf{H}}^{(1)} \subset \cdots \subset \mathcal{M}_{\mathbf{H}}^{(q)} \subset \mathcal{A}_{\mathbf{H}}^{(q+1)} \subset \cdots$$

$\mathfrak{M}_{\mathcal{D}}$ -модулей, где $\mathcal{M}_{\mathbf{H}}^{(q)} = \{M \in \mathcal{M} \mid D_{\mu'} M \in \mathcal{M}_{\mathbf{H}}^{(q-1)}, \mu' \in \mathbf{m}'\}$, $q \in \mathbb{N}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 10. *Определена возрастающая фильтрация*

$$0 \subset \mathfrak{M}_H^{(0)} = \mathfrak{M}_D \subset \mathfrak{M}_H^{(1)} \subset \dots \subset \mathfrak{M}_H^{(q)} \subset \mathfrak{M}_H^{(q+1)} \subset \dots$$

$\mathfrak{M}_D$ -модулей, где $\mathfrak{M}_H^{(q)} = \{R \in \mathfrak{M} \mid D_\mu(R) \in \mathfrak{M}_H^{(q-1)}, \mu \in \mathfrak{m}\}$, $q \in \mathbb{N}$. В частности, $\mathfrak{M}_H^{(p)} \circ \mathfrak{M}_H^{(q)} \subset \mathfrak{M}_H^{(p+q)}$ для всех $p, q \in \mathbb{Z}_+$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 11. *Определена возрастающая фильтрация*

$$0 = \mathcal{E}^{(-1)} \subset \mathcal{E} = \mathcal{E}^{(0)} \subset \dots \subset \mathcal{E}^{(q)} \subset \mathcal{E}^{(q+1)} \subset \dots$$

$\mathfrak{M}_D$ -алгебр Ли, где $\mathcal{E}^{(q)} = \{X \in \mathfrak{D}_V \mid [D_{\mu'}, X] \in \mathcal{E}^{(q-1)}, \mu' \in \mathfrak{m}'\}$, $q \in \mathbb{Z}_+$. Более того,

- $[\mathcal{E}^{(p)}, \mathcal{E}^{(q)}] \subset \mathcal{E}^{(p+q)}$ для всех $p, q \in \mathbb{Z}_+$;
- $\mathfrak{D}_D^{(q)} = \mathcal{E}^{(q)} \oplus \mathfrak{M}_D \mathfrak{D}$ для всех $q \in \mathbb{Z}_+$.

4. СПЕКТРАЛЬНЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

СОГЛАШЕНИЕ 1. Пусть $\mathcal{U} = \mathcal{A}, \mathcal{M}$ и $\mathcal{V} = \mathcal{A}, \mathcal{K}$, где

- $(\mathcal{A}, \mathcal{D})$ – унитарная ассоциативная коммутативная алгебра;
- $(\mathcal{M}, \kappa = \kappa_{\mathcal{M}}, \mathfrak{D})$ – $(\mathcal{A}, \mathcal{D})$ -модуль, $\mathcal{K}$ – $\mathcal{A}$ -модуль;
- $\kappa_{\mathcal{K}\mathcal{M}} \in \text{Hom}_{\text{Lie} \cap \mathcal{A}}(\mathfrak{D}(\mathcal{M}); \mathfrak{D}(\mathcal{K}))$, $\kappa_{\mathcal{K}} \in \text{Hom}_{\text{Lie} \cap \mathcal{A}}(\mathfrak{D}(\mathcal{A}); \mathfrak{D}(\mathcal{K}))$,
 $\kappa_{\mathcal{K}} = \kappa_{\mathcal{K}\mathcal{M}} \circ \kappa_{\mathcal{M}}$.

СОГЛАШЕНИЕ 2. Для упрощения обозначений ниже мы будем писать $\varkappa: \mathfrak{D}(\mathcal{U}) \rightarrow \mathfrak{D}(\mathcal{V})$, где

$$\begin{aligned} \varkappa &= \text{id}_{\mathfrak{D}(\mathcal{A})}, & \text{когда } \mathcal{U} = \mathcal{V} = \mathcal{A}, & & \varkappa &= \kappa_{\mathcal{K}}, & \text{когда } \mathcal{U} = \mathcal{A}, \mathcal{V} = \mathcal{K}, \\ \varkappa &= \Pi, & \text{когда } \mathcal{U} = \mathcal{M}, \mathcal{V} = \mathcal{A}, & & \varkappa &= \varkappa_{\mathcal{K}\mathcal{M}}, & \text{когда } \mathcal{U} = \mathcal{M}, \mathcal{V} = \mathcal{K}, \end{aligned}$$

проекция $\Pi: \mathfrak{D}(\mathcal{M}) \rightarrow \mathfrak{D}(\mathcal{A})$, $X = (\nabla_X, X) \mapsto X$ (см. [14]).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 14. $\mathcal{A}$ -модуль $\Omega(\mathcal{U}; \mathcal{V}) = \bigoplus_{r \in \mathbb{Z}} \Omega^r(\mathcal{U}; \mathcal{V})$ дифференциальных форм над $\mathcal{U}$ с коэффициентами в $\mathcal{V}$ определяется правилом (см., например, [14])

$$\Omega^r(\mathcal{U}, \mathcal{V}) = \begin{cases} 0, & r < 0, \\ \mathcal{V}, & r = 0, \\ \text{Hom}_{\mathcal{A}}(\wedge_A^r \mathfrak{D}(\mathcal{U}); \mathcal{V}), & r > 0. \end{cases}$$

Множество $\Omega(\mathcal{U}, \mathcal{A})$ имеет структуру внешней $\mathcal{A}$ -алгебры, а множество $\Omega(\mathcal{U}, \mathcal{K})$ имеет структуру внешнего $\Omega(\mathcal{U}, \mathcal{A})$ -модуля. Более того, в общем случае $\Omega(\mathcal{U}, \mathcal{V}) = \Omega(\mathcal{U}, \mathcal{A}) \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{V}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 12. *Для всякого дифференцирования $X \in \mathfrak{D}(\mathcal{U})$ справедливы следующие утверждения:*

- внутреннее произведение $i_X \in \text{End}_{\mathcal{A}}(\Omega(\mathcal{U}, \mathcal{V}))$ определяется правилом свертки $i_X \omega(X_1, \dots, X_{r-1}) = r\omega(X, X_1, \dots, X_{r-1})$ для всех $r \in \mathbb{Z}$, $\omega \in \Omega^r(\mathcal{U}, \mathcal{V})$, $X_1, \dots, X_{r-1} \in \mathfrak{D}(\mathcal{U})$;

- производная Ли $L_X \in \text{End}_{\mathbb{F}}(\Omega(\mathcal{U}, \mathcal{V}))$ определяется правилом

$$L_X \omega(X_1, \dots, X_r) = (\varkappa X) \omega(X_1, \dots, X_r) - \sum_{1 \leq s \leq r} \omega(X_1, \dots, [X, X_s], \dots, X_r)$$

для всех $r \in \mathbb{Z}$, $\omega \in \Omega^r(\mathcal{U}, \mathcal{V})$, $X_1, \dots, X_r \in \mathfrak{D}(\mathcal{U})$;

- i_X есть внешнее дифференцирование, а L_X есть дифференцирование $\Omega(\mathcal{U}, \mathcal{A})$ -модуля $\Omega(\mathcal{U}, \mathcal{V})$, т. е.

$$i_X(\omega \wedge \chi) = (i_X \omega) \wedge \chi + (-1)^r \omega \wedge (i_X \chi),$$

$$L_X(\omega \wedge \chi) = (L_X \omega) \wedge \chi + \omega \wedge (L_X \chi)$$

для всех $\omega \in \Omega^r(\mathcal{U}, \mathcal{A})$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $\chi \in \Omega(\mathcal{U}, \mathcal{V})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО предложения 12 можно найти, например, в работе [14].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 15. Форма $\omega \in \Omega^r(\mathcal{U}, \mathcal{V})$ называется p -картановской формой, $0 \leq p \leq r$, если $\omega(X_1, \dots, X_r) = 0$, когда по крайней мере $r - p + 1$ дифференцирований $X_1, \dots, X_r$ картановские, т. е. принадлежат подалгебре $\mathcal{D}(\mathcal{U}) \subset \mathfrak{D}(\mathcal{U})$.

Пусть $\Omega_p^r(\mathcal{U}, \mathcal{V})$ есть $\mathcal{A}$ -модуль всех p -картановских форм из $\Omega^r(\mathcal{U}, \mathcal{V})$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 13. Определена убывающая фильтрация $\mathcal{A}$ -модулей

$$\Omega_0^r(\mathcal{U}, \mathcal{V}) = \Omega^r(\mathcal{U}, \mathcal{V}) \supset \Omega_1^r(\mathcal{U}, \mathcal{V}) \supset \dots \supset \Omega_r^r(\mathcal{U}, \mathcal{V}) \supset 0, \quad r \in \mathbb{Z}.$$

Более того,

- $\Omega_p^r(\mathcal{U}, \mathcal{A}) \wedge_{\mathcal{A}} \Omega_q^s(\mathcal{U}, \mathcal{V}) \subset \Omega_{p+q}^{r+s}(\mathcal{U}, \mathcal{V})$ для всех возможных $p, q, r, s \in \mathbb{Z}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 14. Пусть $\omega \in \Omega_p^r(\mathcal{U}, \mathcal{V})$, $p, r \in \mathbb{Z}$, тогда

$$i_X \omega \in \begin{cases} \Omega_{p-1}^{r-1}(\mathcal{U}, \mathcal{V}), & X \in \mathfrak{D}(\mathcal{U}), \\ \Omega_p^{r-1}(\mathcal{U}, \mathcal{V}), & X \in \mathcal{D}(\mathcal{U}), \end{cases} \quad L_X \omega \in \begin{cases} \Omega_{p-1}^r(\mathcal{U}, \mathcal{V}), & X \in \mathfrak{D}(\mathcal{U}), \\ \Omega_p^r(\mathcal{U}, \mathcal{V}), & X \in \mathcal{D}(\mathcal{U}). \end{cases}$$

Напомним (см., например, [14]), что формулой Картана определено отображение $d = d_{\varkappa} \in \text{End}_{\mathbb{F}}(\Omega(\mathcal{U}, \mathcal{V}))$

$$\begin{aligned} d\omega(X_0, \dots, X_r) = & \frac{1}{r+1} \left\{ \sum_{0 \leq s \leq r} (-1)^s (\varkappa X_s) \omega(x_0, \dots, \check{X}_s, \dots, X_r) + \right. \\ & \left. + \sum_{0 \leq s < t \leq r} (-1)^{s+t} \omega([X_s, X_t], X_0, \dots, \check{X}_s, \dots, \check{X}_t, \dots, X_r) \right\} \end{aligned}$$

для всех $r \in \mathbb{Z}_+$, $\omega \in \Omega^r(\mathcal{U}, \mathcal{V})$, $X_0, \dots, X_r \in \mathfrak{D}(\mathcal{U})$, где предполагается, что аргументы под знаком “ $\smile$ ” пропущены.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 15. *Справедливы следующие утверждения:*

- $d^r = d|_{\Omega^r(\mathcal{U}, \mathcal{V})} : \Omega^r(\mathcal{U}, \mathcal{V}) \rightarrow \Omega^{r+1}(\mathcal{U}, \mathcal{V})$;
- эндоморфизм d есть внешнее дифференцирование внешней $\mathcal{A}$ -алгебры $\Omega(\mathcal{U}, \mathcal{A})$ и внешнего $\Omega(\mathcal{U}, \mathcal{A})$ -модуля $\Omega(\mathcal{U}, \mathcal{M})$;
- композиция $d \circ d = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО предложения 15 можно найти в работе [14] (теорема 6).

В частности, определен комплекс де Рама $\{\Omega^r(\mathcal{U}, \mathcal{V}), d^r \mid r \in \mathbb{Z}\}$ с пространствами когомологий $H^r(\mathcal{U}, \mathcal{V}) = \text{Ker } d^r / \text{Im } d^{r-1}$, $r \in \mathbb{Z}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 16. *Для всякого дифференцирования $X \in \mathfrak{D}(\mathcal{U})$ справедлива “матричная” формула Картана*

$$L_X = d \circ i_X + i_X \circ d.$$

В частности, $L_X \circ d = d \circ L_X$ для любого $X \in \mathfrak{D}(\mathcal{U})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО предложения 16 можно найти в работе [14] (теорема 7).

Фильтрация $\{\Omega_p^r(\mathcal{U}, \mathcal{V}) \mid p \in \mathbb{Z}\}$, $r \in \mathbb{Z}$, позволяет рафинировать комплекс де Рама до спектральной последовательности.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 17. *Фильтрация $\{\Omega_p^r(\mathcal{U}, \mathcal{V})\}$ совместима с дифференциалом $d \in \text{End}_{\mathbb{F}}(\Omega(\mathcal{U}, \mathcal{V}))$, а именно:*

$$d|_{\Omega_p^r(\mathcal{U}, \mathcal{V})} : \Omega_p^r(\mathcal{U}, \mathcal{V}) \rightarrow \Omega_p^{r+1}(\mathcal{U}, \mathcal{V}) \quad \text{для всех } r, p \in \mathbb{Z}_+.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 18. *Определена спектральная последовательность¹⁾ $\{E_r^{pq}, d_r^{pq} \mid p, q, r \in \mathbb{Z}\}$, где*

- $E_r^{pq} = Z_r^{pq} / (B_{r-1}^{pq} + Z_{r-1}^{p+1, q-1})$;
- $Z_r^{pq} = \{\omega \in \Omega_p^{p+q}(\mathcal{U}, \mathcal{V}) \mid d\omega \in \Omega_{p+r}^{p+q+1}(\mathcal{U}, \mathcal{V})\}$;
- $B_r^{pq} = \{\omega = d\chi \in \Omega_p^{p+q}(\mathcal{U}, \mathcal{V}) \mid \chi \in \Omega_{p-r}^{p+q-1}(\mathcal{U}, \mathcal{V})\}$;
- $d_r^{pq} : E_r^{pq} \rightarrow E_r^{p+q, q-r+1}$, $d_r^{pq}[\omega]_r^{pq} = [d\omega]_r^{p+q, q-r+1}$,
где $[\omega]_r^{pq}$ есть класс эквивалентности формы $\omega \in Z_r^{pq}$ в факторпространстве E_r^{pq} .

В частности, из предложения 18 вытекают следующие равенства:

- $E_r^{pq} = \Omega_p^{p+q}(\mathcal{U}, \mathcal{V}) / \Omega_{p+1}^{p+q}(\mathcal{U}, \mathcal{V})$ для всех $r \leq 0$, $p, q \in \mathbb{Z}$;
- $E_r^{pq} = 0$ для всех $p < 0$, $r, q \in \mathbb{Z}$ и всех $q < 0$, $r, p \in \mathbb{Z}$;
- $E_{r+1}^{pq} = \text{Ker } d_r^{pq} / \text{Im } d_r^{p-r, q+r-1}$ для всех $p, q, r \in \mathbb{Z}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 19. *Определены предельные члены спектральной последовательности $\{E_r^{pq}, d_r^{pq} \mid p, q, r \in \mathbb{Z}\}$, а именно:*

- $E_\infty^{pq} = Z_\infty^{pq} / (B_\infty^{pq} + Z_\infty^{p+1, q-1})$;
- $Z_\infty^{pq} = \{\omega \in \Omega_p^{p+q}(\mathcal{U}, \mathcal{V}) \mid d\omega = 0\}$;
- $B_\infty^{pq} = \{\omega = d\chi \in \Omega_p^{p+q}(\mathcal{U}, \mathcal{V}) \mid \chi \in \Omega^{p+q-1}(\mathcal{U}, \mathcal{V})\}$.

¹⁾Общее определение см., например, в [4], [5].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 16. Фильтрация $\{\Omega_p^r(\mathcal{U}, \mathcal{V})\}$ называется *картановской*, если

$$\Omega_0^r(\mathcal{U}, \mathcal{V}) = \cdots = \Omega_{r-m}^r(\mathcal{U}, \mathcal{V}) \supset \Omega_{r-m+1}^r(\mathcal{U}, \mathcal{V}) \supset \cdots \supset \Omega_r^r(\mathcal{U}, \mathcal{V}) \supset 0$$

для некоторого числа $m \in \mathbb{N}$. Это число называется *картановской размерностью* $\mathcal{A}$ -алгебры Ли $\mathcal{D}(\mathcal{U})$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 20. Пусть $\{\Omega_p^r(\mathcal{U}, \mathcal{V})\}$ есть картановская фильтрация. Тогда для всех $p, q \in \mathbb{Z}$ выполняются предельные равенства

$$\lim_{r \rightarrow \infty} E_r^{pq} = E_\infty^{pq}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Существование пределов следует из общих свойств спектральных последовательностей (подробнее см. [7]). ■

В приложениях, как правило, используются лишь отдельные члены спектральных последовательностей. Так, в алгебро-геометрическом подходе к уравнениям в частных производных возникает картановская спектральная последовательность $\{E_r^{pq}, d_r^{pq} \mid p, r \in \mathbb{Z}_+, 0 \leq q \leq m\}$ (m есть картановская размерность, см. [8] и, например, [15]), и важную роль играют следующие члены:

- E_1^{0m} есть пространство *функционалов*, элементы классов эквивалентности называются *лагранжианами*;
- $E_1^{0, m-1}$ есть пространство *законов сохранения*, элементы классов эквивалентности называются *сохраняющимися токами*;
- $E_1^{0, q}$, $0 \leq q \leq m-2$, суть пространства *законов сохранения низшего порядка*;
- E_1^{pm} , $p \in \mathbb{N}$, суть пространства *функциональных p -форм*;
- $d_1^{pm} : E_1^{pm} \rightarrow E_1^{p+1, m}$, $p \in \mathbb{Z}_+$, суть *функциональные (вариационные) дифференциалы*, дифференциал $\delta = d_1^{0m}$ называется *оператором Эйлера–Лагранжа*.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 17. Фактор-алгебра Ли $\text{Sym}_{\mathcal{D}} \mathcal{U} = \mathcal{D}_{\mathcal{D}}(\mathcal{U}) / \mathcal{D}(\mathcal{U})$ называется *алгеброй симметрий* дифференциальной алгебры (дифференциального модуля) $\mathcal{U}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 21. Для всякой симметрии $[X] = X + \mathcal{D}(\mathcal{U}) \in \text{Sym}_{\mathcal{D}} \mathcal{U}$, $X \in \mathcal{D}_{\mathcal{D}}(\mathcal{U})$, определены следующие фактор-морфизмы:

- $(i_{[X]})_r : E_r^{pq} \rightarrow E_r^{p-1, q}$, $[\omega]_r^{pq} \mapsto [i_X \omega]_r^{p-1, q}$;
- $(L_{[X]})_1 : E_1^{pq} \rightarrow E_1^{pq}$, $[\omega]_1^{pq} \mapsto [L_X \omega]_1^{pq}$.

5. ВАРИАЦИОННЫЕ БИКОМПЛЕКСЫ

Мы сохраняем все обозначения и соглашения предыдущего раздела.

СОГЛАШЕНИЕ 3. Будем предполагать, что дифференциальная алгебра $(\mathcal{A}, \mathcal{D})$ и дифференциальный модуль $(\mathcal{M}, \kappa = \kappa_{\mathcal{M}}, \mathcal{D})$ регулярные. В этом случае картановские размерности суть $m_{\mathcal{A}} = \dim_{\mathcal{A}} \mathcal{D}$, $m_{\mathcal{M}} = \dim_{\mathcal{A}} \mathcal{D}$.

Разбиение алгебр $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ и $\mathcal{D}(\mathcal{K})$ на вертикальную и горизонтальную части позволяет рафинировать спектральную последовательность до вариационного бикомплекса (подробную информацию о бикомплексах можно найти, например, в [4] или [16]).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 18. $\mathcal{A}$ -модули $\Omega^{pq}(\mathcal{U}, \mathcal{V})$, $p, q \in \mathbb{Z}$, задаются правилом

$$\Omega^{pq}(\mathcal{U}, \mathcal{V}) = \begin{cases} 0, & p < 0 \text{ и/или } q < 0, \\ \mathcal{V}, & p = q = 0, \\ \text{Hom}_{\mathcal{A}}((\wedge_{\mathcal{A}}^p \mathfrak{D}_{\mathcal{V}}(\mathcal{U})) \wedge_{\mathcal{A}} (\wedge_{\mathcal{A}}^q \mathfrak{D}_{\mathcal{H}}(\mathcal{U})); \mathcal{V}), & p + q > 0. \end{cases}$$

В частности, $\Omega_{\mathcal{V}}^p(\mathcal{U}; \mathcal{V}) = \Omega^{p0}(\mathcal{U}; \mathcal{V})$, $\Omega_{\mathcal{H}}^q(\mathcal{U}; \mathcal{V}) = \Omega^{0q}(\mathcal{U}; \mathcal{V})$ суть $\mathcal{A}$ -модули *вертикальных* и *горизонтальных* форм соответственно. Более того, в общем случае $\Omega^{pq}(\mathcal{U}; \mathcal{V}) = \Omega_{\mathcal{V}}^p(\mathcal{U}; \mathcal{A}) \wedge_{\mathcal{A}} \Omega_{\mathcal{H}}^q(\mathcal{U}; \mathcal{A}) \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{V}$.

Заметим, что $\Omega_{\mathcal{H}}^q(\mathcal{U}, \mathcal{V}) = 0$ для всех $q > m_{\mathcal{U}}$.

Разбиение $\mathfrak{D}(\mathcal{U}) = \mathfrak{D}_{\mathcal{V}}(\mathcal{U}) \oplus_{\mathcal{A}} \mathfrak{D}_{\mathcal{H}}(\mathcal{U})$ определяет проекцию

$$\pi_{\mathcal{V}, \mathcal{H}}: \mathfrak{D}(\mathcal{U}) \rightarrow \mathfrak{D}_{\mathcal{V}, \mathcal{H}}(\mathcal{U}), \quad X = X_{\mathcal{V}} + X_{\mathcal{H}} \mapsto \pi_{\mathcal{V}, \mathcal{H}} X = X_{\mathcal{V}, \mathcal{H}}.$$

Следовательно, определены дуальные инъекции

$$\pi_{\mathcal{V}, \mathcal{H}}^*: \Omega_{\mathcal{V}, \mathcal{H}}^r(\mathcal{U}, \mathcal{V}) \rightarrow \Omega^r(\mathcal{U}, \mathcal{V}), \quad \omega \mapsto \pi_{\mathcal{V}, \mathcal{H}}^* \omega = \omega \circ \pi_{\mathcal{V}, \mathcal{H}},$$

где $\pi_{\mathcal{V}, \mathcal{H}}^* \omega(X_1, \dots, X_r) = \omega(\pi_{\mathcal{V}, \mathcal{H}} X_1, \dots, \pi_{\mathcal{V}, \mathcal{H}} X_r)$, $X_1, \dots, X_r \in \mathfrak{D}(\mathcal{U})$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 22. *Отожествление $\pi_{\mathcal{V}, \mathcal{H}}^* \omega = \omega$ приводит к представлениям*

$$\Omega^r(\mathcal{U}, \mathcal{V}) = \oplus_{s \in \mathbb{Z}} \Omega^{s, r-s}(\mathcal{U}, \mathcal{V}), \quad \Omega_p^r(\mathcal{U}, \mathcal{V}) = \oplus_{s \geq p} \Omega^{s, r-s}(\mathcal{U}, \mathcal{V}).$$

В частности, $\mathcal{A}$ -модуль $\Omega(\mathcal{U}, \mathcal{V}) = \oplus_{p, q \in \mathbb{Z}} \Omega^{pq}(\mathcal{U}, \mathcal{V})$ биградуирован.

По соглашению 3 унитарная дифференциальная алгебра $(\mathcal{A}, \mathcal{D})$ регулярная, т. е. $\mathfrak{D}(\mathcal{A}) = \mathfrak{D}_{\mathcal{V}}(\mathcal{A}) \oplus_{\mathcal{A}} \mathfrak{D}_{\mathcal{H}}(\mathcal{A})$, где вертикальная подалгебра $\mathfrak{D}_{\mathcal{V}}(\mathcal{A})$ имеет $\mathcal{A}$ -базис $\partial = \{\partial_a \mid a \in \mathbf{a}\}$, $[\partial_a, \partial_b] = 0$, а горизонтальная подалгебра $\mathfrak{D}_{\mathcal{H}}(\mathcal{A}) = \mathcal{D}$ имеет $\mathcal{A}$ -базис $D = \{D_{\mu} \mid \mu \in \mathbf{m}\}$, $[D_{\mu}, D_{\nu}] = 0$.

В этом случае дуальный $\mathcal{A}$ -модуль $\mathfrak{D}_{\mathcal{V}}^*(\mathcal{A}) = \text{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathfrak{D}_{\mathcal{V}}(\mathcal{A}); \mathcal{A}) = \Omega_{\mathcal{V}}^1(\mathcal{A}, \mathcal{A})$ имеет дуальный $\mathcal{A}$ -базис $\rho = \{\rho^a \in \mathfrak{D}_{\mathcal{V}}^*(\mathcal{A}) \mid a \in \mathbf{a}\}$, $\rho^a(\partial_b) = \delta_b^a$. В частности, $\omega(X) = \omega_a \rho^a(X^b \partial_b) = \omega_a X^a$ для всех $\omega \in \mathfrak{D}_{\mathcal{V}}^*(\mathcal{A})$, $X \in \mathfrak{D}_{\mathcal{V}}(\mathcal{A})$ и $\omega(X) = 0$ для всех $\omega \in \mathfrak{D}_{\mathcal{V}}^*(\mathcal{A})$, $X \in \mathfrak{D}_{\mathcal{H}}(\mathcal{A})$.

Дуальный $\mathcal{A}$ -модуль $\mathfrak{D}_{\mathcal{H}}^*(\mathcal{A}) = \text{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathfrak{D}_{\mathcal{H}}(\mathcal{A}); \mathcal{A}) = \Omega_{\mathcal{H}}^1(\mathcal{A}, \mathcal{A})$ имеет дуальный $\mathcal{A}$ -базис $\vartheta = \{\vartheta^{\mu} \mid \mu \in \mathbf{m}\}$, $\vartheta^{\mu}(D_{\nu}) = \delta_{\nu}^{\mu}$. В частности, $\omega(X) = \omega_{\mu} \vartheta^{\mu}(X^{\nu} D_{\nu}) = \omega_{\mu} X^{\mu}$ для всех $\omega \in \mathfrak{D}_{\mathcal{H}}^*(\mathcal{A})$, $X \in \mathfrak{D}_{\mathcal{H}}(\mathcal{A})$ и $\omega(X) = 0$ для любых $\omega \in \mathfrak{D}_{\mathcal{H}}^*(\mathcal{A})$, $X \in \mathfrak{D}_{\mathcal{V}}(\mathcal{A})$.

То же самое верно и для $(\mathcal{A}, \mathcal{D})$ -модуля $(\mathcal{M}, \kappa = \kappa_{\mathcal{M}}, \mathcal{D})$. Именно²⁾, $\mathfrak{D}(\mathcal{M}) = \mathfrak{D}_{\mathcal{V}}(\mathcal{M}) \oplus_{\mathcal{A}} \mathfrak{D}_{\mathcal{H}}(\mathcal{M})$, вертикальная подалгебра $\mathfrak{D}_{\mathcal{V}}(\mathcal{M})$ имеет $\mathcal{A}$ -базис $\boldsymbol{\partial} = \{\boldsymbol{\partial}_s \mid s \in \mathbf{a}_{\mathcal{M}}\}$, $[\boldsymbol{\partial}_s, \boldsymbol{\partial}_t] = 0$, а горизонтальная подалгебра $\mathfrak{D}_{\mathcal{H}}(\mathcal{M})$ имеет $\mathcal{A}$ -базис $D = \{D_{\sigma} \mid \sigma \in \mathbf{m}_{\mathcal{M}}\}$, $[D_{\sigma}, D_{\tau}] = 0$.

Следовательно, дуальный $\mathcal{A}$ -модуль $\mathfrak{D}_{\mathcal{V}}^*(\mathcal{M}) = \text{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathfrak{D}_{\mathcal{V}}(\mathcal{M}); \mathcal{A}) = \Omega_{\mathcal{V}}^1(\mathcal{M}, \mathcal{A})$ имеет дуальный базис $\boldsymbol{\rho} = \{\boldsymbol{\rho}^s \mid s \in \mathbf{a}_{\mathcal{M}}\}$, $\boldsymbol{\rho}^s(\boldsymbol{\partial}_t) = \delta_t^s$. В частности, $\omega(X) = \omega_s \boldsymbol{\rho}^s(X^t \boldsymbol{\partial}_t) = \omega_s X^s$ для всех $\omega \in \mathfrak{D}_{\mathcal{V}}^*(\mathcal{M})$, $X \in \mathfrak{D}_{\mathcal{V}}(\mathcal{M})$ и $\omega(X) = 0$ для любых $\omega \in \mathfrak{D}_{\mathcal{V}}^*(\mathcal{M})$, $X \in \mathfrak{D}_{\mathcal{H}}(\mathcal{M})$.

²⁾Мы упрощаем обозначения для удобства записи.

Дуальный $\mathcal{A}$ -модуль $\mathfrak{D}_{\mathbb{H}}^*(\mathcal{M}) = \text{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathfrak{D}_{\mathbb{H}}(\mathcal{M}); \mathcal{A}) = \Omega_{\mathbb{H}}^1(\mathcal{M}, \mathcal{A})$ имеет дуальный $\mathcal{A}$ -базис $\vartheta = \{\vartheta^\sigma \mid \sigma \in \mathbf{m}_{\mathcal{M}}\}$, $\vartheta^\sigma(\mathbf{D}_\tau) = \delta_\tau^\sigma$. В частности, $\omega(X) = \omega_\sigma \vartheta^\sigma(X^\tau \mathbf{D}_\tau) = \omega_\sigma X^\sigma$ для всех $\omega \in \mathfrak{D}_{\mathbb{H}}^*(\mathcal{M})$, $X \in \mathfrak{D}_{\mathbb{H}}(\mathcal{M})$ и $\omega(X) = 0$ для любых $\omega \in \mathfrak{D}_{\mathbb{H}}(\mathcal{M})$, $X \in \mathfrak{D}_{\mathbb{V}}(\mathcal{M})$.

СОГЛАШЕНИЕ 4. Ниже мы еще больше упрощаем обозначения: ∂, D означают вертикальный и горизонтальный базисы в $\mathfrak{D}(\mathcal{U})$, а ρ, ϑ означают дуальные базисы.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 23. *Представления*

$$\Omega^{pq}(\mathcal{U}, \mathcal{V}) = \left\{ \omega = \frac{1}{p!q!} \omega_{a_1 \dots a_p \mu_1 \dots \mu_q} \cdot \rho^{a_1} \wedge \dots \wedge \rho^{a_p} \wedge \vartheta^{\mu_1} \wedge \dots \wedge \vartheta^{\mu_q} \right\}$$

справедливы для всех $p \in \mathbb{Z}_+$ и $0 \leq q \leq m$, где коэффициенты $\omega_{a_1 \dots a_p \mu_1 \dots \mu_q} \in \mathcal{V}$ кососимметрические по индексам $a_1, \dots, \mu_q$.

Внешнее дифференцирование $d : \Omega^{pq}(\mathcal{U}, \mathcal{V}) \rightarrow \Omega^{p+1,q}(\mathcal{U}, \mathcal{V}) \oplus_{\mathbb{F}} \Omega^{p,q+1}(\mathcal{U}, \mathcal{V})$ также разбивается на вертикальную и горизонтальную части, $d = d_{\mathbb{V}} + d_{\mathbb{H}}$, где

$$d_{\mathbb{V}} : \Omega^{pq}(\mathcal{U}, \mathcal{V}) \rightarrow \Omega^{p+1,q}(\mathcal{U}, \mathcal{V}), \quad d_{\mathbb{H}} : \Omega^{pq}(\mathcal{U}, \mathcal{V}) \rightarrow \Omega^{p,q+1}(\mathcal{U}, \mathcal{V}).$$

Действительно, согласно формуле Картана:

- $dv = \varkappa \partial_a v \cdot \rho^a + \varkappa D_\mu v \cdot \vartheta^\mu$ для всех $v \in \mathcal{V}$, следовательно,
 $d_{\mathbb{V}} v = \varkappa \partial_a v \cdot \rho^a, \quad d_{\mathbb{H}} v = \varkappa D_\mu v \cdot \vartheta^\mu;$
- $d\rho^a = \Gamma_{\mu b}^a \cdot \rho^b \wedge \vartheta^\mu$ для всех $\rho^a \in \rho$, следовательно,
 $d_{\mathbb{V}} \rho^a = 0, \quad d_{\mathbb{H}} \rho^a = \Gamma_{\mu b}^a \cdot \rho^b \wedge \vartheta^\mu;$
- $d\vartheta^\mu = 0$ для всех $\vartheta^\mu \in \vartheta$, следовательно, $d_{\mathbb{V}, \mathbb{H}} \vartheta^\mu = 0$.

В силу предложений 15 и 23 эти формулы позволяют вычислить дифференциалы $d_{\mathbb{V}} \omega$ и $d_{\mathbb{H}} \omega$ для всякой формы $\omega \in \Omega^{pq}(\mathcal{U}, \mathcal{V})$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 24. *Равенство $d \circ d = 0$ влечет равенства*

$$d_{\mathbb{V}} \circ d_{\mathbb{V}} = d_{\mathbb{V}} \circ d_{\mathbb{H}} + d_{\mathbb{H}} \circ d_{\mathbb{V}} = d_{\mathbb{H}} \circ d_{\mathbb{H}} = 0.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 25. *Определен вариационный бикомплекс*

$$\{\Omega^{pq}(\mathcal{U}, \mathcal{V}); d_{\mathbb{V}}^{pq}, d_{\mathbb{H}}^{pq} \mid p, q \in \mathbb{Z}\}, \quad \text{где} \quad d_{\mathbb{V}, \mathbb{H}}^{pq} = d_{\mathbb{V}, \mathbb{H}}|_{\Omega^{pq}(\mathcal{U}, \mathcal{V})}.$$

Вертикальные и горизонтальные когомологии этого бикомплекса определяются следующим образом:

$$H_{\mathbb{V}}^{pq}(\mathcal{U}, \mathcal{V}) = \text{Ker } d_{\mathbb{V}}^{pq} / \text{Im } d_{\mathbb{V}}^{p-1,q}, \quad H_{\mathbb{H}}^{pq}(\mathcal{U}, \mathcal{V}) = \text{Ker } d_{\mathbb{H}}^{pq} / \text{Im } d_{\mathbb{H}}^{p,q-1}$$

для всех $p, q \in \mathbb{Z}$.

Для сокращения обозначений ниже в этой секции мы опускаем аргументы $\mathcal{U}$ и $\mathcal{V}$ и пишем Ω^{pq} вместо $\Omega^{pq}(\mathcal{U}, \mathcal{V})$, $H_{\mathbb{V}, \mathbb{H}}^{pq}$ вместо $H_{\mathbb{V}, \mathbb{H}}^{pq}(\mathcal{U}, \mathcal{V})$, $\mathfrak{D}$ вместо $\mathfrak{D}(\mathcal{U})$ и т. д.

Для любых $p, q \in \mathbb{Z}$ определены вторые дифференциалы:

- $d_{\text{HV}}^{pq} \in \text{Hom}_{\mathbb{F}}(H_V^{pq}, H_V^{p,q+1})$, $\omega_V^{pq} \mapsto d_{\text{HV}}^{pq} \omega_V^{pq} = [d_{\text{H}} \omega^{pq}]_V$,
- $d_{\text{VH}}^{pq} \in \text{Hom}_{\mathbb{F}}(H_H^{pq}, H_H^{p+1,q})$, $\omega_H^{pq} \mapsto d_{\text{VH}}^{pq} \omega_H^{pq} = [d_V \omega^{pq}]_H$,

где

- $\omega_V^{pq} = [\omega^{pq}]_V = \omega^{pq} + d_V \Omega^{p-1,q} \in H_V^{pq}$, $\omega^{pq} \in \Omega^{pq}$, $d_V \omega^{pq} = 0$,
- $\omega_H^{pq} = [\omega^{pq}]_H = \omega^{pq} + d_H \Omega^{p,q-1} \in H_H^{pq}$, $\omega^{pq} \in \Omega^{pq}$, $d_H \omega^{pq} = 0$.

Следовательно, определены комплексы

$$\{H_V^{pq}; d_{\text{HV}}^{pq} \mid q \in \mathbb{Z}\}, \quad p \in \mathbb{Z}, \quad \{H_H^{pq}; d_{\text{VH}}^{pq} \mid p \in \mathbb{Z}\}, \quad q \in \mathbb{Z},$$

с пространствами вторых когомологий:

$$\begin{aligned} H_{\text{HV}}^{pq} &= \text{Ker } d_{\text{HV}}^{pq} / \text{Im } d_{\text{HV}}^{p,q-1} = \\ &= \{\omega_{\text{HV}}^{pq} = \omega^{pq} + d_V \Omega^{p-1,q} \mid \omega^{pq} \in \Omega^{pq}, d_V \omega^{pq} = 0, d_H \omega^{pq} \in d_V \Omega^{p-1,q+1}\}, \\ H_{\text{VH}}^{pq} &= \text{Ker } d_{\text{VH}}^{pq} / \text{Im } d_{\text{VH}}^{p-1,q} = \\ &= \{\omega_{\text{VH}}^{pq} = \omega^{pq} + d_H \Omega^{p,q-1} \mid \omega^{pq} \in \Omega^{pq}, d_H \omega^{pq} = 0, d_V \omega^{pq} \in d_H \Omega^{p+1,q-1}\}. \end{aligned}$$

Все дальнейшие дифференциалы и когомологии тривиальные.

ТЕОРЕМА 1. *В регулярном случае элементы спектральной последовательности $\{E_r^{pq}, d_r^{pq}\}$ имеют вид*

- $E_0^{pq} = \Omega_p^{p+q} / \Omega_{p+1}^{p+q} = \Omega^{pq}$, $d_0^{pq} = d_{\text{H}}^{pq} : \Omega^{pq} \rightarrow \Omega^{p,q+1}$;
- $E_1^{pq} = \text{Ker } d_{\text{H}}^{pq} / \text{Im } d_{\text{H}}^{p,q-1} = H_{\text{H}}^{pq}$, $d_1^{pq} = d_{\text{VH}}^{pq} : H_{\text{H}}^{pq} \rightarrow H_{\text{H}}^{p+1,q}$;
- $E_2^{pq} = \text{Ker } d_{\text{VH}}^{pq} / \text{Im } d_{\text{VH}}^{p-1,q} = H_{\text{VH}}^{pq}$, $d_2^{pq} = 0$;
- $E_r^{pq} = E_2^{pq} = H_{\text{VH}}^{pq}$, $d_r^{pq} = 0$, $r \geq 2$;
- $\lim_{r \rightarrow \infty} E_r^{pq} = E_2^{pq} = E_{\infty}^{pq}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО теоремы 1 базируется на общих свойствах спектральных последовательностей и приведенных выше вычислениях для вариационного бикомплекса.

Пусть $X = X_V + X_H = X^a \partial_a + X^\mu D_\mu \in \mathfrak{D} = \mathfrak{D}_V + \mathfrak{D}_H$. Тогда справедливы следующие утверждения:

- $i_X F = 0$ для любого $F \in \mathcal{V}$;
- $i_X \rho^a = X^a = i_{X_V} \rho^a$ для любого $a \in \mathbf{a}$;
- $i_X \vartheta^\mu = X^\mu = i_{X_H} \vartheta^\mu$ для любого $\mu \in \mathbf{m}$;
- $L_X F = (\varkappa X) F$ для любого $F \in \mathcal{V}$;
- $L_X \rho^a = (\partial_b X^a - \Gamma_{\mu b}^a X^\mu) \cdot \rho^b + (\nabla_\mu X_V)^a \cdot \vartheta^\mu$ для любого $a \in \mathbf{a}$;
- $L_X \vartheta^\mu = \partial_a X^\mu \cdot \rho^a + D_\nu X^\mu \cdot \vartheta^\nu$ для любого $\mu \in \mathbf{m}$.

Напомним, что $(\nabla_\mu X)^a = D_\mu X^a + \Gamma_{\mu b}^a X^b = (\nabla_\mu X_V)^a$ (см. определение 7). В силу предложений 12 и 23 эти формулы позволяют вычислить формы $i_X \omega$ и $L_X \omega$ для любой формы $\omega \in \Omega^{pq}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 26. Пусть $\omega \in \Omega^{pq}$, $p, q \in \mathbb{Z}$, $X \in \mathfrak{D}$, тогда

$$i_X \omega \in \begin{cases} \Omega^{p-1, q}, & X \in \mathfrak{D}_V, \\ \Omega^{p, q-1}, & X \in \mathfrak{D}_H, \end{cases} \quad L_X \omega \in \begin{cases} \Omega^{p+1, q-1} \oplus \Omega^{pq} \oplus \Omega^{p-1, q+1}, & X \in \mathfrak{D}, \\ \Omega^{pq}, & X \in \mathcal{E}. \end{cases}$$

Напомним, что $\mathcal{E} \subset \mathfrak{D}$ (см. предложения 7 и 11).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 27. Для любых $X \in \mathcal{E}$, $p, q \in \mathbb{Z}$, определены эндоморфизмы

$$[L_X]^{pq} \in \text{End}_{\mathbb{F}}(H_{V, H}^{pq}), \quad [\omega^{pq}]_{V, H} \mapsto [L_X]^{pq}[\omega^{pq}]_{V, H} = [L_X \omega^{pq}]_{V, H},$$

$$\text{где } [\omega^{pq}]_V = \omega^{pq} + d_V^{p-1, q} \Omega^{p-1, q}, \quad [\omega^{pq}]_H = \omega^{pq} + d_H^{p, q-1} \Omega^{p, q-1}.$$

6. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ АЛГЕБРЫ В УРАВНЕНИЯХ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

6.1. Обозначения. Введем следующие обозначения:

- $X = \mathbb{R}^{\mathbf{m}} = \{x = (x^\mu) \mid x^\mu \in \mathbb{R}, \mu \in \mathbf{m}\}$ есть линейное пространство *независимых* переменных;
- $U = \mathbb{R}^A = \{u = (u^\alpha) \mid u^\alpha \in \mathbb{R}, \alpha \in A\}$ есть линейное пространство *зависимых* переменных, где A – конечное множество индексов;
- $U = \mathbb{R}_I^A = \{u = (u_i^\alpha) \mid u_i^\alpha \in \mathbb{R}, \alpha \in A, i \in I\}$ есть линейное пространство *дифференциальных* переменных, $I = \mathbb{Z}_+^{\mathbf{m}}$ (заметим, $\dim U = \infty$);
- $\mathcal{A} = C_{\text{fin}}^\infty(XU)$ есть унитарная ассоциативная коммутативная алгебра $\mathbb{F}$ -значных гладких функций, зависящих от конечного числа аргументов x^μ, u_i^α , $XU = X \times U$.

В этом случае $\mathfrak{M}(\mathcal{A}) = \mathcal{A}$, поскольку алгебра $\mathcal{A}$ унитарная. $\mathcal{A}$ -алгебра Ли $\mathfrak{D} = \mathfrak{D}(\mathcal{A})$ имеет стандартный $\mathcal{A}$ -базис $\{\partial_{u_i^\alpha}, \partial_{x^\mu} \mid \alpha \in A, i \in I, \mu \in \mathbf{m}\}$, где $\partial_{u_i^\alpha}, \partial_{x^\mu}$ суть частные производные.

В алгебраическом подходе к уравнениям в частных производных $\mathcal{A}$ -алгебра Ли $\mathfrak{D}$ разбивается как $\mathfrak{D} = \mathfrak{D}_V \oplus_{\mathcal{A}} \mathfrak{D}_H$, где

- вертикальная подалгебра $\mathfrak{D}_V$ имеет $\mathcal{A}$ -базис $\partial = \{\partial_{u_i^\alpha} \mid \alpha \in A, i \in I\}$, $[\partial_{u_i^\alpha}, \partial_{u_j^\beta}] = 0$;
- горизонтальная подалгебра $\mathfrak{D}_H$ имеет $\mathcal{A}$ -базис $D = \{D_\mu \mid \mu \in \mathbf{m}\}$, $D_\mu = \partial_{x^\mu} + u_{i+(\mu)}^\alpha \partial_{u_i^\alpha}$, $i + (\mu) = (i^1, \dots, i^\mu + 1, \dots, i^m)$, $[D_\mu, D_\nu] = 0$.

Горизонтальные базисные дифференцирования D_μ называются *полными производными*, они характеризуются *правилом дифференцирования сложной функции*:

$$\partial_{x^\mu} (f(x, \mathbf{u})|_{\mathbf{u}=\phi(x)}) = (D_\mu f(x, \mathbf{u}))|_{\mathbf{u}=\phi(x)}$$

для всех $\mu \in \mathbf{m}$, $f \in \mathcal{A}$ и $\phi \in \mathcal{C}^\infty(X; U)$, где $\phi(x) = (\phi^\alpha(x))$, $\phi(x) = (\phi_i^\alpha(x))$, $\phi_i^\alpha(x) = \partial_{x^i} \phi^\alpha(x)$, $\partial_{x^i} = (\partial_{x^1})^{i^1} \dots (\partial_{x^m})^{i^m}$, $i = (i^1, \dots, i^m) \in I$.

- Коммутаторы $[D_\mu, \partial_{u_i^\alpha}] = -\partial_{u_{i-(\mu)}^\alpha}$, так что связность $\Gamma = (\Gamma_{\mu\alpha j}^{i\beta})$, $\Gamma_{\mu\alpha j}^{i\beta} = -\delta_\alpha^\beta \delta_{j+(\mu)}^i$, $\mu \in \mathbf{m}$, $\alpha, \beta \in A$, $i, j \in I$.

Итак, определена регулярная унитарная дифференциальная алгебра $(\mathcal{A}, \mathfrak{D}_H)$.

Здесь коммутатор $[D_\mu, X] = (\nabla_\mu \zeta)_i^\alpha \partial_{u_i^\alpha}$ для любого $X = \zeta_i^\alpha \partial_{u_i^\alpha} \in \mathfrak{D}_V$, где

$$\nabla_\mu \in \text{End}_{\mathbb{F}}(\mathcal{A}_I^A), \quad \zeta = (\zeta_i^\alpha) \mapsto \nabla_\mu \zeta = ((\nabla_\mu \zeta)_i^\alpha), \quad (\nabla_\mu \zeta)_i^\alpha = D_\mu \zeta_i^\alpha - \zeta_{i+(\mu)}^\alpha.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 28. Коммутатор $[\nabla_\mu, \nabla_\nu] = 0$ для всех $\mu, \nu \in \mathbf{m}$, т.е. кривизна $F = (F_{\mu\nu}) = 0$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 19. Число $n \in \mathbb{Z}_+$ называется *порядком дифференциальной функции* $f \in \mathcal{A}$, если $\partial_{u_i^\alpha} f \neq 0$ для некоторых $\alpha \in A$ и $i \in I$, $|i| = i^1 + \dots + i^m = n$, тогда как $\partial_{u_j^\beta} f = 0$ для всех $\beta \in A$ и $j \in I$, $|j| = j^1 + \dots + j^m > n$.

ЛЕММА 1. Подалгебра $\mathcal{A}_{\mathcal{D}} = \mathcal{A}_H^{(0)} = \mathbb{F}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО леммы 1 опирается на конечность порядка дифференциальных функций.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 29. В фильтрации $\{\mathcal{A}_H^{(q)} \mid q \in \mathbb{Z}_+\}$ линейные пространства

$$\mathcal{A}_H^{(q)} = \mathbb{F}_q[x] = \left\{ f(x) = \sum_{|i| \leq q} f_i x^i \mid f_i \in \mathbb{F} \right\}$$

являются пространствами многочленов q -го порядка по переменной $x \in X$, где $x^i = (x^1)^{i^1} \dots (x^m)^{i^m}$, $i \in I$, $|i| = i^1 + \dots + i^m$.

Предел $\lim_{q \rightarrow \infty} \mathcal{A}_H^{(q)}$ зависит от выбранной топологии. Так, если выбрать естественную топологию линейного пространства всех многочленов $\mathbb{F}[x]$, получим $\lim_{q \rightarrow \infty} \mathcal{A}_H^{(q)} = \mathbb{F}[x]$, а если выбрать естественную топологию линейного пространства всех гладких функций $C^\infty(X; \mathbb{F})$, получим $\lim_{q \rightarrow \infty} \mathcal{A}_H^{(q)} = C^\infty(X; \mathbb{F})$.

ЛЕММА 2. Справедливы равенства

$$(\nabla_r \zeta)_i^\alpha = \sum_{k+j=r} (-1)^k \binom{r}{k} D_j \zeta_{i+k}^\alpha,$$

где $\alpha \in I$, $i, r, k, j \in I$, $\nabla_r = (\nabla_1)^{r^1} \dots (\nabla_m)^{r^m}$, $D_j = (D_1)^{j^1} \dots (D_m)^{j^m}$.

Для доказательства леммы 2 следует воспользоваться предложением 29, индукцией по r и хорошо известным равенством $\binom{r}{k} + \binom{r}{k-(\mu)} = \binom{r+(\mu)}{k}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Мы используем стандартные мультииндексные обозначения, в частности $(-1)^r = (-1)^{|r|} = (-1)^{r^1 + \dots + r^m}$, $\binom{r}{k} = \binom{r^1}{k^1} \dots \binom{r^m}{k^m}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 20. Для каждого $k \in I$ определим линейное подпространство

$$\Phi^k = \left\{ \epsilon_\phi^k = (\epsilon_{\phi i}^{k\alpha}) \in \mathcal{A}_I^A \mid \epsilon_{\phi i}^{k\alpha} = \binom{i}{k} D_{i-k} \phi^\alpha, \phi = (\phi^\alpha) \in \mathcal{A}^A \right\} \subset \mathcal{A}_I^A.$$

Положим также $\Phi^k = 0$ при $k \notin I$.

ЛЕММА 3. Для любых $r, k \in I$ отображение

$$\nabla_r \in \text{Hom}_{\mathbb{F}}(\Phi^k; \Phi^{k-r}), \quad \epsilon_\phi^k \mapsto \nabla_r \epsilon_\phi^k = (-1)^r \epsilon_\phi^{k-r}.$$

В частности, $\nabla_r \epsilon_\phi^k = 0$ для всех $k - r \notin I$ и $\phi \in \mathcal{A}^A$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно,

$$\begin{aligned} (\nabla_\mu \epsilon_\phi^k)_i^\alpha &= D_\mu \epsilon_{\phi i}^{k\alpha} - \epsilon_{\phi, i+(\mu)}^{k\alpha} = \binom{i}{k} D_{i+(\mu)-k} \phi^\alpha - \binom{i+(\mu)}{k} D_{i+(\mu)-k} \phi^\alpha = \\ &= \left(\binom{i}{k} - \binom{i+(\mu)}{k} \right) D_{i+(\mu)-k} \phi^\alpha = - \binom{i}{k-(\mu)} D_{i-k+(\mu)} \phi^\alpha = - \epsilon_{\phi i}^{k-(\mu), \alpha}. \end{aligned}$$

Для завершения доказательства следует воспользоваться индукцией по индексу r . ■

ТЕОРЕМА 2. Для каждого $\zeta = (\zeta_i^\alpha) \in \mathcal{A}_I^A$ имеется единственное представление

$$\zeta = \sum_{k \in I} \epsilon_{\phi_k}^k, \quad \phi_k = (\phi_k^\alpha) \in \mathcal{A}^A, \quad \phi_k^\alpha = \sum_{i+j=k} (-1)^j \binom{k}{i} D_j \zeta_i^\alpha.$$

Другими словами, линейное пространство $\mathcal{A}_I^A$ I-градуировано линейными пространствами Φ^k , т. е. $\mathcal{A}_I^A = \bigoplus_{k \in I} \Phi^k$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, для данного $\zeta \in \mathcal{A}_I^A$ необходимо найти функции $\phi_k \in \mathcal{A}^A$, $k \in I$, такие, чтобы выполнялось равенство $\zeta = \sum_{k \in I} \epsilon_{\phi_k}^k$. Применяя к обеим частям этого равенства операторы ∇_r , $r \in I$, получим (см. леммы 2, 3)

$$\begin{aligned} (\nabla_r \zeta)_i^\alpha &= \sum_{k+j=r} (-1)^k \binom{r}{k} D_j \zeta_{i+k}^\alpha = \sum_{k \in I} (\nabla_r \epsilon_{\phi_k}^k)_i^\alpha = (-1)^r \sum_{k \in I} (\epsilon_{\phi_k}^{k-r})_i^\alpha = \\ &= (-1)^r \sum_{j \in I} (\epsilon_{\phi_{j+r}}^j)_i^\alpha = (-1)^r \sum_{j \in I} \binom{i}{j} D_{i-j} \phi_{i+r}^\alpha. \end{aligned}$$

Таким образом, следует удовлетворить равенствам

$$\sum_{j \in I} \binom{i}{j} D_{i-j} \phi_{i+r}^\alpha = \sum_{k+j=r} (-1)^{k+r} \binom{r}{k} D_j \zeta_{i+k}^\alpha, \quad \alpha \in A, \quad i \in I.$$

В частности, для $i = 0$ имеем

$$\phi_r^\alpha = \sum_{k+j=r} (-1)^{k+r} \binom{r}{k} D_j \zeta_k^\alpha.$$

Простая проверка показывает, что этот единственный выбор решает задачу.

СЛЕДСТВИЕ 1. Справедливы следующие утверждения:

- В фильтрации $\{\mathcal{E}^{(q)} \mid q \in \mathbb{Z}_+\}$ линейные пространства $\mathcal{E}^{(q)} = \bigoplus_{|k| \leq q} \mathcal{E}^k$, $\mathcal{E}^k = \{X = \epsilon_{\phi i}^{k\alpha} \cdot \partial_{u_i^\alpha} \mid \epsilon_\phi^k = (\epsilon_{\phi i}^{k\alpha}) \in \Phi^k\}$;
- $\lim_{q \rightarrow \infty} \mathcal{E}^{(q)} = \mathfrak{D}_V = \bigoplus_{k \in I} \mathcal{E}^k$.

Рассмотрим вариационный бикомплекс

$$\{\Omega^{pq}; d_V^{pq}, d_H^{pq} \mid p \in \mathbb{Z}_+, 0 \leq q \leq m\}, \quad \text{где} \quad \Omega^{pq} = \Omega^{pq}(\mathcal{A}, \mathcal{A}).$$

Здесь

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
 & & d_V^{20} \uparrow & & d_V^{21} \uparrow & & d_V^{2m} \uparrow \\
 0 & \longrightarrow & \Omega^{20} & \xrightarrow{d_H^{20}} & \Omega^{21} & \xrightarrow{d_H^{21}} & \dots \xrightarrow{d_H^{2,m-1}} \Omega^{2m} \longrightarrow \mathfrak{F}^2 \longrightarrow 0 \\
 & & d_V^{10} \uparrow & & d_V^{11} \uparrow & & d_V^{1m} \uparrow \\
 0 & \longrightarrow & \Omega^{10} & \xrightarrow{d_H^{10}} & \Omega^{11} & \xrightarrow{d_H^{11}} & \dots \xrightarrow{d_H^{1,m-1}} \Omega^{1m} \longrightarrow \mathfrak{F}^1 \longrightarrow 0 \\
 & & d_V^{00} \uparrow & & d_V^{01} \uparrow & & d_V^{0m} \uparrow \\
 0 & \longrightarrow & \mathbb{F} & \longrightarrow & \Omega^{00} & \xrightarrow{d_H^{00}} & \Omega^{01} \xrightarrow{d_H^{01}} \dots \xrightarrow{d_H^{0,m-1}} \Omega^{0m} \longrightarrow \mathfrak{F}^0 \longrightarrow 0 \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
 0 & \longrightarrow & \mathbb{F} & \longrightarrow & \Omega_R^0 & \xrightarrow{d_R^0} & \Omega_R^1 \xrightarrow{d_R^1} \dots \xrightarrow{d_R^{m-1}} \Omega_R^m \longrightarrow 0 \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
 0 & & 0 & & 0 & & 0
 \end{array}$$

Рис. 1

- вертикальный $\mathcal{A}$ -базис $\partial = \{\partial_{u_i^\alpha} \mid \alpha \in A, i \in I\}$ имеет дуальный базис $\rho = \{\rho_i^\alpha = du_i^\alpha - u_{i+(\mu)}^\alpha dx^\mu \mid \alpha \in A, i \in I\}$, $\rho_i^\alpha(\partial_{u_j^\beta}) = \delta_\beta^\alpha \delta_i^j$, $\rho_i^\alpha(D_\mu) = 0$,
- горизонтальный $\mathcal{A}$ -базис $D = \{D_\mu \mid \mu \in \mathbf{m}\}$ имеет дуальный базис $\vartheta = \{\vartheta^\mu = dx^\mu \mid \mu \in \mathbf{m}\}$, $dx^\mu(\partial_{u_j^\alpha}) = 0$, $dx^\mu(D_\nu) = \delta_\nu^\mu$.

Пополним вариационный бикомплекс, добавив

- горизонтальный комплекс $\{\Omega_R^q; d_R^q \mid 0 \leq q \leq m\}$, где $\Omega_R^q = \Omega^q(\mathcal{C}^\infty(X))$, $d_R^q = d^q$, т.е. стандартный комплекс де Рама пространства $X = \mathbb{R}^m$;
- вертикальный комплекс $\{\mathfrak{F}^p; \delta^p \mid p \in \mathbb{Z}_+\}$, где $\mathfrak{F}^p = \Omega^{pm} / \text{Im } d^{p,m-1}$ суть линейные факторпространства функциональных p -форм, δ^p суть линейные фактор-дифференциалы, $[\omega] \mapsto \delta^p[\omega] = [d_V^{pm} \omega]$, $[\omega]$ есть класс эквивалентности формы $\omega \in \Omega^{pm}$.

Полученный пополненный бикомплекс приведен на рис. 1.

ТЕОРЕМА 3. *Пополненный бикомплекс ациклический, т.е. все его строки и столбцы точные.*

Подробное доказательство этой знаменитой теоремы, ее историю и связанные с ней результаты можно найти, например, в [6], [9], [10].

В алгебраическом подходе нелинейная система уравнений в частных производных записывается в виде $F = 0$, где $F = \{F^\sigma \in \mathcal{A} \mid \sigma \in S\}$, S – множество индексов. С ней ассоциируется дифференциальный идеал $\mathcal{I}_F = \{f = P_\sigma(\mathcal{D})F^\sigma \mid P_\sigma(\mathcal{D}) \in \mathcal{A}[\mathcal{D}], \sigma \in S\}$, где $\mathcal{A}[\mathcal{D}]$ – унитарная ассоциативная некоммутативная алгебра всех многочленов от $\mathcal{D} = \{D_\mu \mid \mu \in \mathbf{m}\}$ с коэффициентами в $\mathcal{A}$. Дифференциальная фактор-алгебра $(\mathcal{A}, \mathcal{D})$ называется *дифференциальной алгеброй, ассоциированной с системой $F = 0$* (подробнее см., например, [15], [16]). Такая конструкция позволяет выписать спектральную последовательность (*спектральную последовательность*

Виноградова [8]), ассоциированную с системой $F = 0$. Вычисление этой последовательности или ее отдельных членов совершенно другая задача, обычно чрезвычайно трудная. Для построения ассоциированного вариационного бикомплекса сначала следует записать ассоциированную дифференциальную алгебру $(\mathcal{A}, \mathcal{D})$ в регулярной форме, а затем следовать процедуре, изложенной в разделе 5. По-прежнему остается задача вычисления всего бикомплекса или отдельных его членов.

7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Техника и методы, изложенные выше, были использованы в работах автора [11]–[15], [17], [18]. Они могут оказаться полезными в исследованиях [19]–[26].

Список литературы

- [1] J. F. Ritt, *Differential Algebra*, American Mathematical Society Colloquium Publications, **33**, AMS, New York, 1950.
- [2] E. R. Kolchin, *Differential Algebra and Algebraic Groups*, Acad. Press, New York, 1973.
- [3] I. Kaplansky, *An Introduction to Differential Algebra*, Hermann, Paris, 1957.
- [4] С. Маклейн, *Гомология*, М., Мир, 1966.
- [5] Р. Гудеман, *Алгебраическая топология и теория пучков*, ИЛ, М., 1961.
- [6] П. Олвер, *Приложения групп Ли к дифференциальным уравнениям*, Мир, М., 1989.
- [7] V. V. Zharinov, *Lecture Notes on Geometrical Aspects of Partial Differential Equations*, Series on Soviet and East European Mathematics, **9**, World Sci., Singapore–New Jersey–London–Hong Kong, 1992.
- [8] А. М. Виноградов, “Одна спектральная последовательность, связанная с нелинейным дифференциальным уравнением, алгебро-геометрические основания лагранжевой теории поля со связями”, *Докл. АН СССР*, **238**:5 (1978), 1028–1031.
- [9] Т. Tsujishita, “On variation bicomplexes associated to differential equations”, *Osaka J. Math.*, **19**:2 (1982), 311–363.
- [10] I. M. Anderson, *The variational bicomplex*, Dept. Math., Utah State University, Logan, UT, 2004.
- [11] V. V. Zharinov, “On differentiations in differential algebras”, *Integral Transform. Spec. Funct.*, **4**:1–2 (1996), 163–180.
- [12] В. В. Жаринов, “Формальный комплекс де Рама”, *ТМФ*, **174**:2 (2013), 256–271.
- [13] В. В. Жаринов, “Алгебраический взгляд на калибровочные теории”, *ТМФ*, **180**:2 (2014), 217–233.
- [14] В. В. Жаринов, “Анализ в алгебрах и модулях”, *Тр. МИАН*, **301** (2018), в печати.
- [15] В. В. Жаринов, “О преобразовании Беклунда”, *ТМФ*, **189**:3 (2016), 323–334.
- [16] В. В. Жаринов, “Алгебро-геометрические основы математической физики”, *Лекц. курсы НОЦ*, **9** (2008), 3–209.
- [17] В. В. Жаринов, “Законы сохранения, дифференциальные тождества и связи уравнений в частных производных”, *ТМФ*, **185**:2 (2015), 227–251.
- [18] В. В. Жаринов, “О гамильтоновых операторах в дифференциальных алгебрах”, *ТМФ*, **193**:3 (2017), 369–380.
- [19] S. V. Kozyrev, A. A. Mironov, A. E. Teretenkov, I. V. Volovich, “Flows in nonequilibrium quantum systems and quantum photosynthesis”, *Infin. Dimens. Anal. Quantum Probab. Relat. Top.*, **20**:4 (2017), 1750021, 19 pp., arXiv: 1612.00213.
- [20] N. G. Marchuk, D. S. Shirokov, “General solutions of one class of field equations”, *Rep. Math. Phys.*, **78**:3 (2016), 305–326, arXiv: 1406.6665.

- [21] М. О. Катанаев, “Векторные поля Киллинга и однородная и изотропная вселенная”, *УФН*, **186**:7 (2016), 763–775.
- [22] А. Г. Сергеев, “Спинорная геометрия Дирака и некоммутативная геометрия Конна”, *Тр. МИАН*, **298** (2017), 276–314.
- [23] A. S. Trushechkin, I. V. Volovich, “Perturbative treatment of inter-site couplings in the local description of open quantum networks”, *Europhys. Lett.*, **113**:3 (2016), 30005, 6 pp., arXiv: 1509.05754.
- [24] А. К. Гущин, “О разрешимости задачи Дирихле для неоднородного эллиптического уравнения второго порядка”, *Матем. сб.*, **206**:10 (2015), 71–102.
- [25] Ю. Н. Дрожжинов, “Многомерные тауберовы теоремы для обобщенных функций”, *УМН*, **71**:6(432) (2016), 99–154.
- [26] И. В. Волович, С. В. Козырев, “Манипуляция состояниями вырожденной квантовой системы”, *Тр. МИАН*, **294** (2016), 256–267.

Поступила в редакцию 10.03.2018