Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. В. Антонов, А. Н. Васильев, Ренормализационная группа в теории развитой турбулентности. Проблема обоснования гипотез Колмогорова для составных операторов, *ТМФ*, 1997, том 110, номер 1, 122–136

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf957>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.174.16.151

26 апреля 2023 г., 15:19:06

Н. В. Антонов*, А. Н. Васильев*

РЕНОРМАЛИЗАЦИОННАЯ ГРУППА В ТЕОРИИ РАЗВИТОЙ ТУРБУЛЕНТНОСТИ. ПРОБЛЕМА ОБОСНОВАНИЯ ГИПОТЕЗ КОЛМОГОРОВА ДЛЯ СОСТАВНЫХ ОПЕРАТОРОВ

Стохастическая теория развитой турбулентности рассматривается в рамках квантово-полевой ренормгруппы и операторного разложения. Обсуждается проблема обоснования теоремы Колмогорова–Обухова применительно к корреляционным функциям составных операторов. Получено явное выражение для критической размерности составного оператора общего вида. Для произвольного УФ-конечного оператора доказана вторая гипотеза Колмогорова (независимость корреляторов от вязкости). Найдена зависимость различных корреляторов от внешнего масштаба турбулентности. Показано, что в задаче имеется бесконечное число галилеево-инвариантных скалярных составных операторов с отрицательной критической размерностью.

1. ВВЕДЕНИЕ

В стохастической формулировке теории изотропной развитой турбулентности несжимаемой вязкой жидкости (газа) рассматривается уравнение Навье–Стокса с внешней случайной силой [1, 2]

$$\nabla_t \varphi_i = \nu_0 \partial^2 \varphi_i - \partial_i p + f_i, \quad \nabla_t \equiv \partial_t + (\varphi \partial). \quad (1)$$

Здесь φ_i – поперечное (в силу условия несжимаемости) поле скорости, p и f_i – соответственно давление и поперечная случайная сила в расчете на единицу массы (все эти величины зависят от $x \equiv (t, \mathbf{x})$), ν_0 – кинематический коэффициент вязкости, ∂^2 – лапласиан. Задача (1) доопределяется условием запаздывания и нулевым асимптотическим условием для φ при $t \rightarrow -\infty$.

Для f предполагается гауссово распределение с нулевым средним и заданным коррелятором

$$\langle f_i(x) f_j(x') \rangle = \frac{\delta(t-t')}{(2\pi)^d} \int d\mathbf{k} P_{ij}(\mathbf{k}) d_f(k) e^{i\mathbf{k}(\mathbf{x}-\mathbf{x}')}, \quad (2)$$

в котором $P_{ij}(\mathbf{k}) = \delta_{ij} - k_i k_j / k^2$ – поперечный проектор, d – размерность пространства $\mathbf{x}$ и $d_f(k)$ – некоторая функция $k \equiv |\mathbf{k}|$ и параметров модели. Случайная сила компенсирует диссипацию и имитирует накачку энергии в систему от взаимодействия

* Санкт-Петербургский государственный университет

с крупномасштабными движениями. Средняя мощность накачки W связана с функцией $d_f(k)$ в (2) известным соотношением

$$W = \frac{(d-1)}{2(2\pi)^d} \int d\mathbf{k} d_f(k). \quad (3)$$

В реалистической модели накачка должна быть инфракрасной (ИК-), т.е. основной вклад в интеграл (3) дается областью малых $k \lesssim m$, где $m \equiv L^{-1}$ – обратный внешний масштаб турбулентности.

Одной из главных задач теории является обоснование в рамках микромодеи (1), (2) феноменологической теории Колмогорова–Обухова [1], а также исследование поправок к ней, если они есть. В этой теории корреляционные функции фурье-образа $\varphi_i(t, \mathbf{k})$ поля скорости $\varphi_i(t, \mathbf{x})$ удовлетворяют следующим гипотезам:

ГИПОТЕЗА 1. В области $k \gg m$ они зависят от полной мощности накачки W , но не от “деталей ее устройства”, в частности от величины m .

ГИПОТЕЗА 2. Эти корреляционные функции не зависят от коэффициента вязкости ν_0 в области $k \ll \Lambda$, где $\Lambda \equiv (W/\nu_0^3)^{1/4}$ – обратный внутренний масштаб турбулентности (диссипационная длина).

Таким образом, в инерционном интервале $m \ll k \ll \Lambda$ остается зависимость от единственного параметра W . В действительности перенос турбулентных вихрей как целого крупномасштабными движениями приводит к существенной зависимости корреляторов от m [3]. Поэтому гипотеза 1, в отличие от универсальной гипотезы 2, заведомо может быть справедливой лишь для одновременных галилеево-инвариантных корреляторов с необходимыми вычитаниями, в которых эффект переноса исключен. Однако и для таких объектов имеются некоторые экспериментальные [4, 5] и феноменологические [1, 6–8] аргументы в пользу слабого нарушения гипотезы 1, поэтому ее проверка на основе микротеории является весьма актуальной.

Гипотеза 2 означает наличие в ИК-области $m, k \ll \Lambda$ критической масштабной инвариантности (скейлинга) при фиксированных W, ν_0 с определенными (“колмогоровскими”) значениями критических размерностей $\Delta_F \equiv \Delta[F]$ основных величин $F = \{t, \mathbf{x}, \varphi, m\}$:

$$\Delta_\varphi = -1/3, \quad \Delta_t = -2/3, \quad \Delta_m = 1, \quad (4)$$

с условием нормировки $\Delta_{\mathbf{k}} = -\Delta_{\mathbf{x}} = 1$. Гипотеза 1 есть утверждение о существовании конечного предела при $m \rightarrow 0$ в соответствующих скейлинговых функциях.

В ряде работ, в частности в [9–19], к модели (1), (2) применялся метод ренормализационной группы (РГ). В работах [9, 14] функция накачки $d_f(k)$ в (2) выбиралась в виде

$$d_f(k) = D_0 k^{4-d-2\varepsilon} h(m/k). \quad (5)$$

Здесь $h(m/k)$ – некоторая “достаточно хорошая” функция, обеспечивающая сходимость интеграла (3) при малых $k \lesssim m$ и нормированная на единицу при больших k/m , D_0 – явно выделенный нормировочный множитель. Параметр ε в показателе (5) аналогичен $\varepsilon = 4-d$ в теории критического поведения [20]. Реальной ИК-накачке отвечает область $\varepsilon > 2$. При $\varepsilon < 2$ накачка (5) ультрафиолетовая (УФ-) и тогда в (3) подразумевается УФ-обрезание на величину порядка Λ .

Соотношение (3) позволяет выразить амплитуду D_0 в (5) через параметры W, m, ν_0 , имеющие непосредственный физический смысл. Учитывая, что для развитой турбулентности $m \ll \Lambda$, получаем [14]

$$D_0 = \begin{cases} c_1 W \Lambda^{2\varepsilon-4} & \text{при } 0 < \varepsilon < 2, \\ c_2 W m^{2\varepsilon-4} & \text{при } \varepsilon > 2, \end{cases} \quad (6)$$

где коэффициенты c_i зависят от явного вида функции (5).

Во многих работах по РГ-теории турбулентности, например в [10–13], рассматривалась упрощенная модель с чисто степенной функцией накачки, получаемой из (5) при $m = 0$:

$$d_f(k) = D_0 k^{4-d-2\varepsilon}. \quad (7)$$

Реальным значением ε при этом считается значение 2, отвечающее границе области ИК-накачки $\varepsilon > 2$ в (5). Такой подход внутренне непротиворечив лишь в предположении асимптотической малости ε , когда все величины вычисляются в форме рядов по ε , поскольку коэффициенты последних конечны при $m \rightarrow 0$ в согласии с гипотезой 1. Однако это отнюдь не доказывает ее при конечных ε (простой пример – функция $m^{2-\varepsilon}$: коэффициенты ее разложения по ε конечны при $m \rightarrow 0$, но сама она для $\varepsilon > 2$ расходится). Поэтому корректный анализ вопросов, касающихся гипотезы 1, возможен лишь в “массивной” модели типа (5) и обязательно с выходом за рамки ε -разложения.

В работе [9] для модели типа (5) методом РГ доказано наличие скейлинга с критическими размерностями

$$\Delta_\varphi = 1 - 2\varepsilon/3, \quad \Delta_t = -2 + 2\varepsilon/3, \quad \Delta_m = 1, \quad (8)$$

совпадающими с (4) при $\varepsilon = 2$ (ответы точные, т.е. не имеют поправок порядка ε^2 , ε^3 и т.д.). В работе [14] было показано, что размерности (8) фактически описывают масштабную инвариантность при фиксированных D_0, ν_0 , тогда как в теории Колмогорова–Обухова речь идет о скейлинге при фиксированных W, ν_0 . Соответствующие ему размерности (всюду далее обозначаемые как $\bar{\Delta}_F$) совпадают с (8) при $\varepsilon < 2$, а для $\varepsilon > 2$ перестают зависеть от ε и “замораживаются” на колмогоровских значениях (4) во всей области ИК-накачки. Это доказывает гипотезу 2 для корреляционных функций поля скорости при всех $\varepsilon > 2$ [14].

По аналогии с теорией критического поведения [20] для анализа асимптотики $m \rightarrow 0$ в модели (1), (2) в работе [14] было применено операторное разложение Вильсона. Для произведения двух полей оно имеет вид

$$\varphi(x_1)\varphi(x_2) = \sum_F C_F(\mathbf{r}, t) F(x), \quad x \equiv (x_1 + x_2)/2, \quad (9)$$

где C_F – аналитичные по m^2 коэффициенты, зависящие от $\mathbf{r} \equiv \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2$ и $t = t_1 - t_2$; $F(x)$ – всевозможные ренормированные локальные составные операторы, т.е. ренормированные аналоги мономов, построенных из полей $\Phi = (\varphi, \varphi')$ (вспомогательное поле φ' возникает в квантово-полевой формулировке модели, см. раздел 2) и их производных в одной точке $x = (t, \mathbf{x})$, например $\varphi^n(x)$, $\varphi(x)\partial^2\varphi(x)$ и т.п. Коррелятор $\langle\varphi\varphi\rangle$ получается усреднением (9). Для возникающих при этом средних $\langle F \rangle$ метод РГ доказывает

асимптотику вида $\langle F \rangle \sim m^{\Delta_F}$ при $m \rightarrow 0$ с определенными критическими размерностями Δ_F . Поэтому из (9) вытекает следующее асимптотическое представление коррелятора:

$$\langle \varphi \varphi \rangle = \sum_F C_F(m^2) m^{\Delta_F} \quad (10)$$

с аналитическими по m^2 коэффициентами C_F .

При асимптотически малых ε ведущий вклад в (10) порождается простейшим оператором $F(x) = 1$ с $\Delta_F = 0$ (только он и учитывается в упрощенной модели (7)). Вклады прочих операторов с $\Delta_F > 0$ определяют лишь ИК-поправки к “безмассовой” асимптотике. Благодаря функциональным уравнениям Швингера и тождествам Уорда, выражающим галилееву симметрию задачи, критические размерности ряда операторов в модели (1), (2) вычисляются точно подобно размерностям основных величин (8) [11, 13]. С ростом ε некоторые из них становятся отрицательными. Такие операторы являются “опасными” для гипотезы 1, поскольку им отвечают расходящиеся при $m \rightarrow 0$ вклады в (10). Таковы, в частности, все операторы вида $\varphi^n(x)$, размерности которых равны [14, 15]

$$\Delta[\varphi^n] = n\Delta_\varphi = n(1 - 2\varepsilon/3). \quad (11)$$

Все они становятся “опасными” при $\varepsilon = 3/2$, т.е. еще до достижения границы $\varepsilon = 2$ области ИК-накачки, что приводит к существенной зависимости коррелятора (10) от m в согласии с [3]. С помощью так называемой ИК-теории возмущений (ИКТВ) в работах [14, 15] было показано, что вклады этих операторов в одновременный коррелятор исчезают, т.е. соответствующие коэффициенты C_F в (9) обращаются в нуль при $t = 0$. В работе [19] были вычислены размерности всех операторов, построенных из поля φ и производной ∂_t . Некоторые из них становятся “опасными” еще при $\varepsilon < 2$, но их вклады в (9) при $t = 0$ также исчезают. Это – проявления общего правила, согласно которому в операторные разложения галилеево-инвариантных объектов дают вклад только инвариантные операторы [18].

Вместе с предположением об отсутствии других “опасных” операторов это доказывает гипотезу 1 для одновременного коррелятора, но лишь при $\varepsilon < 2$, т.к. при $\varepsilon = 2$ становится “опасным” по крайней мере один инвариантный оператор, именно оператор скорости локальной диссипации энергии:

$$E(x) = \nu_0 (\partial_i \varphi_j + \partial_j \varphi_i)^2 / 2, \quad (12)$$

размерность которого $\Delta_E = 4 - 2\varepsilon$ также известна точно [11].

Проблема обоснования теории Колмогорова–Обухова в рамках микромоделей рассматривалась в ряде работ на основе скелетных уравнений самосогласования и техники ИКТВ (см. обзор [21] и цитированную в нем литературу). Так, в работах [22, 23] было получено доказательство конечности предела $m \rightarrow 0$ для одновременного парного коррелятора скорости. Однако техника ИКТВ не дает конструктивного рецепта вычисления критических размерностей составных операторов. Сам факт нетривиальности этих размерностей, очевидный с точки зрения РГ и хорошо известный в теории критического поведения [20], был лишь недавно отмечен в рамках уравнений самосогласования в работе [24].

Расчет критических размерностей составных операторов представляет интерес не только в связи с проблемой асимптотики $m \rightarrow 0$, но и сам по себе, т.к. корреляционные функции некоторых операторов измеряются экспериментально [4, 5].

В настоящей работе мы продолжим исследование [14, 15], обобщив полученные там результаты на случай различных составных операторов.

В разделе 2 приводятся необходимые сведения о квантово-полевой формулировке и ренормировке модели (1), (2) и соответствующих уравнениях РГ.

В разделе 3 на примере парного коррелятора скорости обсуждается решение уравнений РГ и приводится с некоторыми изменениями доказательство [14] “замораживания” критических размерностей (8) в области ИК-накачки $\varepsilon > 2$. Получены выражения, связывающие затравочные и инвариантные переменные в модели (1), (2).

В разделе 4 получено выражение для критической размерности $\bar{\Delta}_F$ составного оператора общего вида, описывающее скейлинг при фиксированных W, ν_0 . При $\varepsilon < 2$ оно совпадает со стандартным выражением для Δ_F [11], а при $\varepsilon > 2$ отличается, хотя в общем случае сохраняет зависимость от ε . Показано, что для любого составного оператора, УФ-конечного в неренормированной модели, гипотеза 2 (независимость корреляторов от ν_0) справедлива во всей области ИК-накачки $\varepsilon > 2$, а его размерность $\bar{\Delta}_F$ “замораживается” при $\varepsilon > 2$ на колмогоровском значении при $\varepsilon = 2$.

В разделе 5 исследуется асимптотика $m \rightarrow 0$ для наиболее важных случаев одно-временных галилеево-инвариантных корреляторов старших степеней поля скорости φ и оператора диссипации (12). При этом в аналогичных (9), (10) операторных разложениях для этих величин учитывается лишь вклад единственного известного пока составного оператора нужной симметрии, становящегося “опасным” при $\varepsilon = 2$ – оператора диссипации (12). Это позволило обнаружить сингулярную зависимость корреляторов от m при $m \rightarrow 0$, что означает наличие отклонений от предсказаний гипотезы 1 Колмогорова. Для показателей q_n и μ , описывающих эти отклонения, получено точное соотношение, близкое к известной формуле Новикова–Стюарта (см. [1]), но с отрицательным “показателем перемежаемости” μ . Это указывает на существование в теории бесконечного числа инвариантных скалярных операторов, “опасных” при $\varepsilon > 2$. Практически известен лишь один – сам оператор диссипации (12). Нахождение остальных операторов, становящихся “опасными” при $\varepsilon = 2$, расчет их критических размерностей и суммирование их вкладов в представлениях типа (10), необходимое для точного исследования асимптотики $m \rightarrow 0$, остаются основной нерешенной проблемой РГ-теории турбулентности.

2. КВАНТОВО-ПОЛЕВАЯ ФОРМУЛИРОВКА УРАВНЕНИЯ РГ

Стохастическая задача (1), (2) эквивалентна квантовой теории двух поперечных векторных полей $\Phi \equiv (\varphi, \varphi')$ с функционалом действия [9]

$$S(\Phi) = \varphi' D_f \varphi' / 2 + \varphi' [-\nabla_t \varphi + \nu_0 \partial^2 \varphi], \quad (13)$$

в котором D_f – коррелятор (2) с функцией (5). Подразумеваются нужные суммирования по векторным индексам полей и интегрирования по их аргументам $x = (t, \mathbf{x})$. Действию (13) отвечает обычная квантово-полевая диаграммная теория возмущений (известная в теории турбулентности как диаграммная техника Уайльда [1]). Роль константы связи (“заряда”) в ней играет параметр $g_0 \equiv D_0 / \nu_0^3$ с D_0 из (5).

Для каждой величины F в модели (13) можно ввести две независимые канонические размерности: импульсную d_F^k и частотную d_F^ω , а по ним – суммарную $d_F = d_F^k + 2d_F^\omega$ [11]. По определению $d_{\mathbf{k}}^k = -d_{\mathbf{x}}^k = 1$, $d_{\mathbf{k}}^\omega = d_{\mathbf{x}}^\omega = 0$, $d_\omega^\omega = -d_t^\omega = 1$, $d_\omega^k = d_t^k = 0$, а размерности прочих величин находятся из требования безразмерности (импульсной и частотной отдельно) всех слагаемых действия (13). Размерности приведены в таблице, в нее включены и параметры ренормированной теории g , ν , μ , которые появятся ниже.

F	φ	φ'	μ, m, Λ	ν, ν_0	g_0	g
d_F^k	-1	$d + 1$	1	-2	2ε	0
d_F^ω	1	-1	0	1	0	0
d_F	1	$d - 1$	1	0	2ε	0

Модель (13) логарифмична (суммарная размерность константы связи g_0 обращается в нуль) при $\varepsilon = 0$, УФ-расходимости имеют вид полюсов по ε . Для их устранения при всех $d > 2$ достаточно одного контрчлена $\varphi' \partial^2 \varphi$ [9], что эквивалентно мультипликативной ренормировке вида

$$\nu_0 = \nu Z_\nu, \quad g_0 = g \mu^{2\varepsilon} Z_g, \quad Z_g = Z_\nu^{-3}. \quad (14)$$

Здесь μ – ренормировочная масса (дополнительный произвольный параметр ренормированной теории); g , ν – ренормированные аналоги параметров g_0 , ν_0 ; $Z = Z(g, \varepsilon)$ – константы ренормировки в схеме минимальных вычитаний. Их связь в (14) – следствие отсутствия ренормировки вклада случайной силы в (13). Обычной для теории поля ренормировки полей и “массы” m не требуется, т.е. $m_0 = m$ и $Z_m = Z_\Phi = 1$.

Ренормированное действие имеет вид

$$S_R(\Phi) = \varphi' D_f \varphi' / 2 + \varphi' [-\nabla_t \varphi + \nu Z_\nu \partial^2 \varphi], \quad (15)$$

где коррелятор D_f выражен через g , ν , μ . Исходный (13) и ренормированный (15) функционалы действия связаны соотношением $S(\Phi, e_0) = S_R(\Phi, e, \mu)$, где $e = \{g, \nu, m\}$ – набор параметров теории. Отсюда вытекает аналогичное соотношение $G_n(e_0, \dots) = G_{nR}(e, \mu, \dots)$ (многоточие обозначает аргументы типа координат и времен) для соответствующих корреляционных функций $G_n = \langle \varphi(x_1) \dots \varphi(x_n) \rangle$. Обозначим через $\tilde{\mathcal{D}}_\mu$ операцию $\mathcal{D}_\mu \equiv \mu \partial / \partial \mu$ при фиксированных значениях затравочных параметров e_0 и подействуем ею на обе его части. Это дает основное уравнение РГ

$$\mathcal{D}_{\text{РГ}} G_{nR}(e, \mu, \dots) = 0, \quad \mathcal{D}_{\text{РГ}} = \mathcal{D}_\mu + \beta \partial_g - \gamma_\nu \mathcal{D}_\nu, \quad (16)$$

в котором $\mathcal{D}_{\text{РГ}}$ есть операция $\tilde{\mathcal{D}}_\mu$, выраженная через переменные e , μ , и обозначено $\mathcal{D}_y \equiv y \partial / \partial y$ для любой переменной y . РГ-функции (коэффициенты дифференциального оператора $\mathcal{D}_{\text{РГ}}$) определяются соотношениями

$$\gamma_F(g) \equiv \tilde{\mathcal{D}}_\mu \ln Z_F, \quad F = \{\nu, g\}, \quad (17)$$

$$\beta(g) \equiv \tilde{\mathcal{D}}_\mu g = g(-2\varepsilon - \gamma_g) = g(-2\varepsilon + 3\gamma_\nu). \quad (18)$$

Последнее равенство в (18) – следствие вытекающей из (14) связи РГ-функций $\gamma_g = -3\gamma_\nu$. В однопетлевом приближении РГ-функции имеют вид (см. [11])

$$\gamma_\nu = ag, \quad \beta = -2\varepsilon g + 3ag^2, \quad a = (d-1)/[2(4\pi)^{d/2}\Gamma(d/2)(d+2)]. \quad (19)$$

Из (19) следует, что РГ-уравнение (16) имеет положительную ИК-притягивающую неподвижную точку $g_* = 2\varepsilon/3a + O(\varepsilon^2)$, в которой $\beta(g_*) = 0$, $\beta'(g_*) > 0$. В силу последнего равенства в (18) значение $\gamma_\nu(g_*) = 2\varepsilon/3$ в неподвижной точке находится точно, т.е. не имеет поправок порядка ε^2 , ε^3 и т.д.

3. РЕШЕНИЕ РГ-УРАВНЕНИЙ ДЛЯ ПАРНОГО КОРРЕЛЯТОРА СКОРОСТИ

Рассмотрим решение РГ-уравнений (16) на примере парного коррелятора $G = \langle \varphi\varphi \rangle$. По векторным индексам он кратен поперечному проектору, который для простоты будем в дальнейшем опускать. В ренормированных переменных G зависит от $r = |\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|$, $t = t_1 - t_2$ и параметров g, ν, m, μ . Из соображений размерности (см. таблицу) имеем

$$G = (\nu/r)^2 R(s, g, u, z), \quad s = \mu r, \quad u = mr, \quad z = \nu tr^{-2}, \quad (20)$$

где R – функция полностью безразмерных аргументов. Коррелятор (20) удовлетворяет РГ-уравнению (16), поэтому для него справедливо представление

$$G = (\bar{\nu}/r)^2 R(1, \bar{g}, u, \bar{z}), \quad \bar{z} = \bar{\nu} tr^{-2} \quad (21)$$

с той же функцией R . “Инвариантные переменные” $\bar{g} = \bar{g}(s, g)$ и $\bar{\nu} = \bar{\nu}(s, g, \nu)$ в (21) суть первые интегралы уравнения (16), нормированные при $s = 1$ на g и ν , соответственно. Тожество $\bar{u} = u$ вытекает из отсутствия в операторе $\mathcal{D}_{\text{РГ}}$ вклада $\mathcal{D}_m$ (следствие отсутствия ренормировки параметра $m_0 = m$). Представление (21) справедливо, поскольку обе его части удовлетворяют уравнению (16) и совпадают при $s = 1$ в силу условия нормировки инвариантных переменных.

Для исследования ИК-асимптотики необходимо получить явные выражения инвариантных переменных $\bar{e}$ через r и затравочные параметры e_0 . Это возможно, поскольку параметры e_0 удовлетворяют уравнению $\mathcal{D}_{\text{РГ}} e_0 = 0$ в силу определения $\mathcal{D}_{\text{РГ}}$, т.е. являются первыми интегралами уравнений (16) и как следствие некоторыми функциями другого набора $\bar{e}$. С учетом характера зависимости $\bar{e}$ от e и соображений размерности (полностью безразмерны только g и $\bar{g}$) очевидны соотношения

$$\varkappa \equiv g_0 r^{2\varepsilon} = F_1(\bar{g}), \quad \nu_0 = \bar{\nu} F_2(\bar{g}) \quad (22)$$

с некоторыми функциями F_i . Подставляя в первое из них выражение (14) для g_0 , получаем $\varkappa = F_1(\bar{g}) = s^{2\varepsilon} g Z_g(g)$, откуда с учетом нормировки $\bar{g} = g$ при $s = 1$ находим $F_1(g) = g Z_g(g)$. Аналогично из второго равенства (22) и формулы ренормировки ν_0 в (14) находим $F_2(g) = Z_\nu(g)$. Таким образом, искомая связь между инвариантными и затравочными параметрами имеет вид

$$\varkappa \equiv g_0 r^{2\varepsilon} = \bar{g} Z_g(\bar{g}), \quad \nu_0 = \bar{\nu} Z_\nu(\bar{g}). \quad (23)$$

Из (23) и связи констант ренормировки в (14) с учетом определения $D_0 = g_0 \nu_0^3$ вытекает точное соотношение между инвариантными переменными $\bar{g}$ и $\bar{\nu}$:

$$\bar{\nu} = (D_0 r^{2\epsilon} / \bar{g})^{1/3}. \quad (24)$$

Входящие в формулы (14), (23) константы ренормировки можно выразить через более простые объекты – РГ-функции (17), (18). Из формулы ренормировки заряда в (14) и определения β -функции (18) вытекает равенство $\partial_g \ln Z_g(g) = -1/g - 2\epsilon/\beta(g)$, интегрирование которого с очевидным условием нормировки $Z_g(g=0) = 1$ дает

$$\ln Z_g(g) = - \int_0^g dx [2\epsilon/\beta(x) + 1/x]. \quad (25)$$

Из приведенного выше выражения для $\partial_g \ln Z_g(g)$ вытекает равенство $\partial_g \ln(g Z_g) = -2\epsilon/\beta(g) \geq 0$, доказывающее монотонное возрастание функции $F_1(g) = g Z_g(g)$ в интервале $0 < g < g_*$, где β -функция (18) отрицательна. При $g \rightarrow g_*$ функция $F_1(g)$ расходится.

На рисунке сплошной линией показано поведение β -функции в модели (13), а штриховой – функции $F_1(g) = g Z_g(g)$; там же дано графическое решение уравнения ренормировки $g_0 \mu^{-2\epsilon} = F_1(g)$ относительно g (соответственно кривые I, II, III). Согласно первому равенству (22) аналогичное соотношение связывает величины $\varkappa$ и $\bar{g}$. Из рисунка видно, что g и $\bar{g}$ находятся в интервале $(0, g_*)$ при любых g_0, r и $\bar{g} \rightarrow g_*$ при $\varkappa \rightarrow \infty$.

Оценим величину $\varkappa = g_0 r^{2\epsilon}$. Из (6) при $0 < \epsilon < 2$ находим $\varkappa \cong (\Lambda r)^{2\epsilon}$, а при $\epsilon > 2$ имеем $\varkappa \cong (\Lambda/m)^4 (mr)^{2\epsilon}$. Поэтому условие $\varkappa \gg 1$ выхода в ИК-асимптотику при всех $\epsilon > 0$ выполняется в ИК-области $1/r \ll \Lambda$, включающей как энергосодержащую

область $mr \gtrsim 1$, так и инерционный интервал $m \ll 1/r \ll \Lambda$. Асимптотику коррелятора в ИК-области получим, заменив в (21), (24) $\bar{g}$ на g_* :

$$\begin{aligned} G &= (\bar{\nu}_*/r)^2 R(1, g_*, u, \bar{z}_*), \\ \bar{z}_* &= \bar{\nu}_* t r^{-2}, \quad \bar{\nu}_* = (D_0 r^{2\varepsilon}/g_*)^{1/3}. \end{aligned} \quad (26)$$

Независимость ИК-асимптотики (26) от коэффициента вязкости ν_0 при $\varepsilon > 2$ [14] следует из (6) и того факта (впервые отмеченного в [10]), что параметры g_0 и ν_0 входят в выражение типа (26) только через их комбинацию $D_0 = g_0 \nu_0^3$ в выражении для $\bar{\nu}_*$ (см. (24)). В области $0 < \varepsilon < 2$ так не будет, поскольку здесь остается зависимость от ν_0 через Λ в (6).

Это утверждение доказывает при $\varepsilon > 2$ гипотезу 2 Колмогорова (см. раздел 1), из которой автоматически вытекает ИК-скейлинг с размерностями (4). Поясним механизм “замораживания” размерностей (8) в области $\varepsilon > 2$ на колмогоровских значениях (4) при $\varepsilon = 2$. Для размерности поля $\Delta_\varphi = \Delta[G]/2$ из (26) имеем $\Delta_\varphi = 1 + \Delta[\bar{\nu}_*]$, а из (24) для $\bar{\nu}_*$ следует $\Delta[\bar{\nu}_*] = (1/3)\{\Delta[D_0] - 2\varepsilon\}$.

В обычной для теории критического поведения постановке задачи параметры типа g_0 , D_0 всегда считаются фиксированными и в этом смысле критически безразмерными: $\Delta[g_0] = \Delta[D_0] = 0$. Тогда с учетом (24) находим $\Delta[\bar{\nu}_*] = -2\varepsilon/3$, откуда вытекает $\Delta_\varphi = 1 - 2\varepsilon/3$ при всех $\varepsilon > 0$. Как уже отмечалось, в теории Колмогорова–Обухова фиксированными следует считать параметры W и ν_0 , следовательно, и их функцию $\Lambda = (W/\nu_0^3)^{1/4}$, тогда как m – размерная величина с $\bar{\Delta}_m = \Delta_m = 1$. Из (6) ясно, что при $0 < \varepsilon < 2$ параметры g_0 , D_0 и в этом случае остаются безразмерными (поэтому в данной области $\bar{\Delta}_F = \Delta_F$ для любой величины F), а при $\varepsilon > 2$ они приобретают критические размерности:

$$\bar{\Delta}[g_0] = \bar{\Delta}[D_0] = \begin{cases} 0 & \text{при } 0 < \varepsilon < 2, \\ 2\varepsilon - 4 & \text{при } \varepsilon > 2. \end{cases} \quad (27)$$

Из (26) и (27) для $\bar{\nu}_*$ находим

$$\bar{\Delta}[\bar{\nu}_*] = \begin{cases} -2\varepsilon/3 & \text{при } 0 < \varepsilon < 2, \\ -4/3 & \text{при } \varepsilon > 2, \end{cases} \quad (28)$$

а для размерности поля скорости отсюда следует $\bar{\Delta}_\varphi = \Delta_\varphi = 1 - 2\varepsilon/3$ при $0 < \varepsilon < 2$ и $\bar{\Delta}_\varphi = -1/3$ при всех $\varepsilon > 2$.

Из требования критической безразмерности аргумента $\bar{z}_*$ скейлинговой функции в (26) следует равенство $\Delta_t + \Delta[\bar{\nu}_*] + 2 = 0$ в любом критическом режиме, откуда с учетом (28) получаем $\bar{\Delta}_t = \Delta_t = -2 + 2\varepsilon/3$ при $0 < \varepsilon < 2$ и $\bar{\Delta}_t = -2/3$ при $\varepsilon > 2$. Аналогичное “замораживание” размерности $\bar{\Delta}_{\varphi'}$ можно обнаружить, рассмотрев функцию отклика $\langle \varphi \varphi' \rangle$.

Таким образом, метод РГ доказывает наличие в модели (13) ИК-скейлинга для основных величин с критическими размерностями (8) при $0 < \varepsilon < 2$ и (4) при всех $\varepsilon > 2$ [14].

В заключение отметим, что зависимость от выбора режима (фиксировано g_0 или W) входит только через величину D_0 в выражении (26) для $\bar{\nu}_*$. Из определений (26) ясно,

что вид самой скейлинговой функции $f(u, z) \equiv R(1, g_*, u, z)$ от выбора режима не зависит. Операторные разложения типа (9) можно рассматривать для любого режима, но утверждение об аналитичности коэффициентов C_F по m^2 относится только к стандартному ($g_0 = \text{const}$).

4. КРИТИЧЕСКИЕ РАЗМЕРНОСТИ СОСТАВНЫХ ОПЕРАТОРОВ

Пусть $F(x)$ – некоторый локальный составной оператор в модели (13), построенный из полей $\Phi = (\varphi, \varphi')$ и их производных в одной точке $x = (t, \mathbf{x})$. Допустим сначала, что F мультипликативно ренормируем, т.е. существует константа ренормировки $Z_F = Z_F(g, \varepsilon)$ такая, что для определенного равенством $F = Z_F F_R$ ренормированного оператора F_R в ренормированной теории (15) УФ-конечны (не имеют полюсов по ε) все корреляционные функции $G_{FR} = \langle F_R(x) \Phi(x_1) \dots \Phi(x_n) \rangle$ с одним F_R и любым числом полей $\Phi = (\varphi, \varphi')$.

Функция G_{FR} удовлетворяет РГ-уравнению вида

$$(\mathcal{D}_{RG} + \gamma_F) G_{FR} = 0, \quad \gamma_F \equiv \tilde{\mathcal{D}}_\mu \ln Z_F, \quad (29)$$

где операции $\mathcal{D}_{RG}$ и $\tilde{\mathcal{D}}_\mu$ определены в разделе 2. Обозначим $\mathbf{r}_i \equiv \mathbf{x} - \mathbf{x}_i$ и введем общий масштаб $r \equiv \sum_i |\mathbf{r}_i|$ и “угловые переменные” $\mathbf{n}_i \equiv \mathbf{r}_i/r$. Временные аргументы G_{FR} будем для сокращения записи опускать. Из соображений размерности имеем

$$G_{FR} = r^{-d_G} \nu^{d_G^\omega} R(s, u, g, \mathbf{n}_i), \quad s = \mu r, \quad u = m r, \quad (30)$$

где d_G и d_G^ω – соответственно суммарная и частотная канонические размерности функции G_{FR} , равные сумме соответствующих размерностей оператора F_R и полей Φ (см. таблицу). Из уравнения (29) для функции (30) вытекает аналогичное (21) представление

$$G_{FR} = r^{-d_G} \bar{\nu}^{d_G^\omega} R(1, u, \bar{g}, \mathbf{n}_i) \exp \int_{\bar{g}}^g dx \gamma_F(x) / \beta(x), \quad (31)$$

входящие в него инвариантные переменные определены в разделе 3. Представление (31) верно, поскольку обе его части удовлетворяют уравнению (29) и совпадают при $s = 1$ вследствие нормировки инвариантных переменных; последний множитель в (31) возникает из-за наличия неоднородности в уравнении (29).

Непосредственный физический смысл имеет корреляционная функция G_F исходного неренормированного оператора F , получаемая из (31) домножением на константу ренормировки Z_F . Для нее из уравнения $\gamma_F = \tilde{\mathcal{D}}_\mu \ln Z_F = \beta(g) \partial_g \ln Z_F$ и условия нормировки $Z_F(g = 0) = 1$ получаем представление

$$\ln Z_F(g) = \int_0^g dx \gamma_F(x) / \beta(x). \quad (32)$$

Объединяя его с (31), для G_F находим

$$G_F = r^{-d_G} \bar{\nu}^{d_G^\omega} R(1, u, \bar{g}, \mathbf{n}_i) Z_F(\bar{g}). \quad (33)$$

Асимптотика инвариантных переменных $\bar{g} \rightarrow g_*$, $\bar{\nu} \rightarrow \bar{\nu}_*$ в ИК-области известна (см. раздел 3), остается найти асимптотику последнего множителя в (33). Равенство (32) для $\ln Z_F(\bar{g})$ можно переписать в виде

$$\ln Z_F(\bar{g}) = f_1(\bar{g}) + f_2(\bar{g}), \quad (34)$$

где обозначено

$$\begin{aligned} f_1(\bar{g}) &= (\gamma_F^*/2\varepsilon) \int_0^{\bar{g}} dx \{2\varepsilon/\beta(x) + 1/x\}, \\ f_2(\bar{g}) &= \int_0^{\bar{g}} dx \left\{ \frac{\gamma_F(x) - \gamma_F^*}{\beta(x)} - \frac{\gamma_F^*}{2\varepsilon x} \right\}, \quad \gamma_F^* \equiv \gamma_F(g_*). \end{aligned} \quad (35)$$

С помощью равенств (23) и (25) функцию $f_1(\bar{g})$ можно представить в виде

$$f_1(\bar{g}) = -(\gamma_F^*/2\varepsilon) \ln Z_g(\bar{g}) = -(\gamma_F^*/2\varepsilon) \ln(\varkappa/\bar{g}). \quad (36)$$

Асимптотика $\varkappa \rightarrow \infty$ получается заменой $\bar{g} \rightarrow g_*$ в (36) и выражении (35) для $f_2(\bar{g})$. Важно, что при этом интеграл (35) остается сходящимся, т.е. ошибка имеет порядок величины $f_2(\bar{g}) - f_2(g_*) \cong \bar{g} - g_*$ и мала при больших $\varkappa$.

Таким образом, для ИК-асимптотики величины $Z_F(\bar{g})$ находим

$$Z_F(\bar{g}) \cong (\varkappa/g_*)^{-\gamma_F^*/2\varepsilon} \exp f_2(g_*). \quad (37)$$

Из (33), (37) для критической размерности оператора F (в любом критическом режиме) находим

$$\Delta_F = d_F + d_F^\omega \Delta[\bar{\nu}_*] - (\gamma_F^*/2\varepsilon) \{ \Delta[g_0] - 2\varepsilon \}. \quad (38)$$

Учитывая соотношения (27), (28), при $0 < \varepsilon < 2$ из (38) получаем известное [11] выражение для критической размерности произвольного составного оператора в модели (13):

$$\bar{\Delta}_F = \Delta_F = d_F - (2\varepsilon/3)d_F^\omega + \gamma_F^* = d_F^k + \Delta_\omega d_F^\omega + \gamma_F^*, \quad (39)$$

где $\Delta_\omega = 2 - 2\varepsilon/3$, тогда как при $\varepsilon > 2$ находим

$$\bar{\Delta}_F = d_F - 4d_F^\omega/3 + 2\gamma_F^*/\varepsilon = d_F^k + 2d_F^\omega/3 + 2\gamma_F^*/\varepsilon. \quad (40)$$

Это и есть искомое выражение для критической размерности составного оператора в модели (13), описывающее ИК-скейлинг при фиксированных W , ν_0 в области ИК-накачки $\varepsilon > 2$. Скейлинг при фиксированных g_0 , ν_0 описывается формулой (39) для любых $\varepsilon > 0$.

Обсудим теперь кратко общий случай ренормировки со смешиванием. Пусть $F_\alpha(x)$ – некоторый полный набор операторов, смешивающихся при ренормировке только между собой, $F_{\alpha R}(x)$ – соответствующий набор ренормированных операторов. Они связаны соотношением $F_\alpha = Z_{\alpha\beta} F_{\beta R}$ (суммирование по β), в котором $Z_F = \{Z_{\alpha\beta}\}$ – матрица констант ренормировки. Выражения (39), (40) остаются верными, если понимать в них под γ_F матрицу аномальных размерностей $\gamma_F = Z_F^{-1} \tilde{D}_\mu Z_F$, а под d_F , d_F^ω – диагональные матрицы канонических размерностей.

Для УФ-конечного составного оператора имеем $Z_F = 1$ и $\gamma_F = 0$. Тогда из (40) следует, что его критическая размерность $\bar{\Delta}_F$ в области $\varepsilon > 2$ перестает зависеть от ε и “замораживается” на колмогоровском значении при $\varepsilon = 2$ подобно размерностям основных величин $\bar{\Delta}_\varphi$, $\bar{\Delta}_t$ в разделе 3. Далее, для такого оператора последний множитель в представлении (33) отсутствует и аргументы, аналогичные приведенным в разделе 3, доказывают исчезновение зависимости от ν_0 (гипотеза 2 Колмогорова) для функций G_F при всех $\varepsilon > 2$.

Примерами УФ-конечных операторов являются скорость диссипации (12) и другие операторы, входящие в законы сохранения импульса и энергии [11, 13]. Операторы вида φ^n также являются УФ-конечными с точностью до вкладов, исчезающих в ИК-асимптотике [15].

5. ПРОБЛЕМА АСИМПТОТИКИ $m \rightarrow 0$ ДЛЯ ГАЛИЛЕЕВО-ИНВАРИАНТНЫХ КОРРЕЛЯТОРОВ

Рассмотрим в качестве примера случай экспериментально измеряемых корреляторов скорости диссипации (12) и старших степеней скорости φ . Конкретно в литературе обсуждаются следующие одновременные галилеево-инвариантные объекты [1, 4–8]:

$$\begin{aligned} G_n(r) &\equiv \langle (\varphi_r(\mathbf{x}) - \varphi_r(\mathbf{x}'))^n \rangle = \text{const} \cdot (Wr)^{n/3} (mr)^{q_n}, \\ G_E(r) &\equiv \langle E(\mathbf{x})E(\mathbf{x}') \rangle = \text{const} \cdot W^2 (mr)^{-\mu}, \end{aligned} \quad (41)$$

где φ_r – компонента скорости φ вдоль направления $\mathbf{x} - \mathbf{x}'$; общий для всех полей аргумент t в записи (41) опущен. Степенные функции в правых частях (41) используются обычно при феноменологическом описании экспериментальных данных, для показателей $|q_n|$ и μ получаются небольшие положительные значения [4, 5]. Это указывает на наличие слабых отклонений от предсказаний гипотезы 1 Колмогорова, согласно которой корреляторы типа (41) в инерционном интервале не должны зависеть от m . Подобные отклонения обычно связывают с сильно развитыми флуктуациями спектрального потока энергии (“перемежаемость”) и описывают в рамках различных феноменологических моделей, не основанных, как правило, непосредственно на уравнении Навье–Стокса (см. [6–8]). При этом имеются сомнения в универсальности представлений типа (41) и самом наличии отклонений от теории Колмогорова–Обухова при достаточно больших числах Рейнольдса (см. обсуждение в [5, 8]), поэтому исследование корреляторов (41) на основе микротeorии представляет особый интерес.

С точки зрения РГ входящие в (41) объекты – локальные составные операторы, причем $E(x)$ – УФ-конечный оператор с определенной критической размерностью [11, 13], а $\varphi^n(x)$ могут считаться таковыми с точностью до несущественных в ИК-асимптотике поправок [14, 15]. Аналогичное (26) асимптотическое РГ-представление для корреляторов (41) в модели (1), (2) имеет вид

$$\begin{aligned} G_n(r) &= D_0^{n/3} r^{-n\Delta_\varphi} f_n(mr), \\ G_E(r) &= D_0^2 r^{-2\Delta_E} f_E(mr) \end{aligned} \quad (42)$$

с D_0 из (5) и некоторыми скейлинговыми функциями $f(mr)$, аналогичными $f(u, z) \equiv R(1, g_*, u, z)$ в (26).

Из обобщающего (9), (10) операторного разложения для произведений входящих в (41) операторов вытекает следующее асимптотическое представление для скейлинговых функций при $m \rightarrow 0$:

$$f(u) = \sum_F C_F(u^2) u^{\Delta_F}, \quad u = m\tau. \quad (43)$$

Как уже отмечалось (см. конец раздела 3), вид скейлинговых функций f от выбора критического режима при $\varepsilon > 2$ (фиксированы g_0, ν_0 или W, ν_0) не зависит. Смена режима приводит лишь к перераспределению степеней m между сомножителями C_F и u^{Δ_F} в (43) при сохранении неизменным их произведения. Практически удобнее рассматривать операторные разложения в стандартном режиме ($g_0 = \text{const}$). Тогда коэффициенты C_F можно считать аналитичными по u^2 , а все размерности $\Delta_\varphi, \Delta_E, \Delta_F$ в (42), (43) определять обычными равенствами $\Delta_\varphi = 1 - 2\varepsilon/3$, $\Delta_E = 4 - 2\varepsilon$ и аналогично для прочих Δ_F при любом $\varepsilon > 0$.

Согласно результатам раздела 4 корреляторы (42) при $\varepsilon > 2$ не зависят от ν_0 (гипотеза 2 Колмогорова), при этом общее “замораживание” размерностей обеспечивается зависимостью D_0 от m в силу (6). При $0 < \varepsilon < 2$ зависимость от ν_0 остается, т.е. гипотеза 2 там не выполняется.

Благодаря галилеевой инвариантности величин (41) в разложении (43) входят критические размерности только инвариантных скалярных операторов [18]. При асимптотически малых ε главный вклад в (43) порождается простейшим оператором $F = 1$ с $\Delta_F = 0$, прочие вклады с $\Delta_F > 0$ определяют лишь исчезающие при $u \rightarrow 0$ поправки. Это доказывает гипотезу 1 для величин (41) при малых ε .

При $\varepsilon = 2$ становится “опасным” ($\Delta_F < 0$) оператор диссипации (12) с $\Delta_E = 4 - 2\varepsilon$. Предположим, что других таких операторов нет (практически они неизвестны), тогда в силу (43) главный член искомой асимптотики принимает вид

$$f(u) \cong c_E u^{\Delta_E} \quad (44)$$

с некоторыми константами c_E , зависящими от явного вида функции (5). Сравнение представлений (41) и (43) приводит в этом случае к соотношениям [25]

$$\mu = 4 - 2\varepsilon, \quad q_n = \mu(3 - n)/3. \quad (45)$$

Интересно отметить, что второе из них совпадает (с точностью до знака μ) с предсказаниями известной модели Новикова–Стюарта [1] и так называемой β -модели [6]. Однако из-за отрицательности μ результат (45) противоречит соотношениям $q_{2n} \leq 2q_n$, вытекающим из очевидного теоретико-вероятностного неравенства $G_{2n} \geq G_n^2$ для корреляторов (41). Это означает, что при $\varepsilon = 2$ вместе с (12) должны появляться и другие “опасные” операторы той же симметрии, причем их число бесконечно, а спектр размерностей не ограничен снизу (нет “самого опасного”), т.к. в противном случае получилась бы лишь некоторая модификация соотношений (44), (45). Практически такие операторы неизвестны, хотя с помощью уравнений Швингера легко построить операторы, становящиеся “опасными” при любом целом $\varepsilon \geq 3$ (примеры см. в [19]).

В работе [14] высказывалось предположение, что при $\varepsilon = 2$ вместе с оператором диссипации становятся “опасными” и все его степени. Их суммирование в представлениях (43) могло бы приводить к сокращению величины m в комбинации D_0 и f при $m \rightarrow 0$

в согласии с гипотезой 1. Так, в частности, будет, если для степеней $E(x)$ выполняется аналогичное (11) соотношение

$$\Delta[E^n] = n\Delta[E] = n(4 - 2\varepsilon). \quad (46)$$

Попытка его доказательства предпринималась в работе [16]. Однако в уравнениях движения для составных операторов, используемых в работе [16], игнорируются вклады случайной силы (необходимость их учета отмечена в последующей работе [17]); кроме того, в ней вообще не обсуждается возможность смешивания операторов при ренормировке. Поэтому доказательство [16] нельзя признать удовлетворительным, и вопрос о справедливости соотношений (46) остается открытым. Выполненный в работе [26] анализ семейства $d_F = 8$ показал, что составной оператор $E^2(x)$ в отличие от самого $E(x)$ не является УФ-конечным (что обеспечило бы выполнение равенства (46) для $n = 2$) и даже мультипликативно ренормируемым.

Таким образом, главными задачами РГ-теории турбулентности остаются явное построение всех “опасных” инвариантных операторов, вычисление их критических размерностей и суммирование их вкладов в операторных разложениях для исследования асимптотики $m \rightarrow 0$ и проверки гипотезы 1 Колмогорова. Очевидно, что решение этих задач потребует значительного усовершенствования имеющихся методов.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 96-02-17-033) и Конкурсного центра фундаментального естествознания Госкомвуза (проект 95-0-5.1-30).

Н. В. Антонов получал финансовую поддержку Ассоциации INTAS (грант 93-2492) в рамках исследовательской программы Международного центра фундаментальной физики в Москве, а также поддержку Правительства Санкт-Петербурга.

Список литературы

- [1] А. С. Монин, А. М. Яглом. Статистическая гидромеханика. Ч. 2. М.: Наука, 1967.
- [2] W. D. McComb. The Physics of Fluid Turbulence. Oxford: Clarendon, 1990.
- [3] Б. Б. Кадомцев. Вопросы теории плазмы. Т. 4. М.: Атомиздат, 1964; R. H. Kraichnan. Phys. Fluids. 1964. V. 7. P. 1723; 1965. V. 8. P. 575; 1966. V. 9. P. 1728, 1884; B. C. Львов. Препринт №53. Новосибирск: ИАиЭ СО АН СССР, 1977.
- [4] R. A. Antonia, E. Hopfinger, Y. Gagne, F. Anselmet. Phys. Rev. 1984. V. A30. P. 2704; R. A. Antonia, B. R. Satyaprakash, A. Hussain. J. Fluid Mech. 1982. V. 119. P. 55; F. Anselmet, Y. Gagne, E. Hopfinger, R. A. Antonia. J. Fluid Mech. 1984. V. 140. P. 63.
- [5] В. Р. Кузнецов, А. А. Прасковский, В. А. Сабельников. Изв. АН СССР. Сер. МЖГ. 1988. Т. 6. С. 51; В. Р. Кузнецов, В. А. Сабельников. Турбулентность и горение. М.: Наука, 1986.
- [6] U. Frish, P. L. Sulem, M. Nelkin. J. Fluid Mech. 1978. V. 87. P. 719.
- [7] M. S. Borgas. Phys. Fluids. 1992. V. A4(9). P. 2055; C. Meneveau, K. R. Sreenivasan. J. Fluid Mech. 1991. V. 224. P. 429.
- [8] P. Tong, W. I. Goldberg. Phys. Fluids. 1988. V. 31. P. 2841; R. R. Prasad, K. R. Sreenivasan. Phys. Fluids. 1990. V. A2. P. 792; C. Baudet, S. Ciliberto, P. N. Tien. J. Phys. II (France). 1993. V. 3. P. 293; П. Л. Ваньян. Письма в ЖЭТФ. 1994. Т. 60. Вып. 4.
- [9] C. De Dominicis, P. S. Martin. Phys. Rev. 1979. V. A19. P. 419.
- [10] J.-D. Fournier, U. Frish. Phys. Rev. 1983. V. A28. P. 1000.
- [11] Л. Ц. Аджемян, А. Н. Васильев, Ю. М. Письмак. ТМФ. 1983. Т. 57. С. 268.
- [12] V. Yakhot, S. A. Orszag. J. Sci. Comp. 1986. V. 1. P. 3; W. P. Dannevik, V. Yakhot, S. A. Orszag. Phys. Fluids. 1987. V. 30. P. 2021.
- [13] Л. Ц. Аджемян, А. Н. Васильев, М. Гнатич. ТМФ. 1988. Т. 74. С. 180.

- [14] Л. Ц. Аджемьян, Н. В. Антонов, А. Н. Васильев. ЖЭТФ. 1989. Т. 95. С. 1272.
- [15] Н. В. Антонов. Зап. научн. семин. ЛОМИ. 1988. Т. 169. С. 18.
- [16] V. Yakhot, Z.-S. She, S. A. Orszag. Phys. Fluids. 1989. V. A1(2). P. 289.
- [17] V. Yakhot, L. M. Smith. J. Sci. Comp. 1992. V. 7. P. 35.
- [18] Н. В. Антонов. Вестн. СПбУ. Сер. Физ., хим. 1992. Вып. 3. С. 3; Вып. 4. С. 6.
- [19] Л. Ц. Аджемьян, Н. В. Антонов, Т. Л. Кум. ТМФ. 1994. Т. 100. С. 382.
- [20] J. Zinn-Justin. Quantum Field Theory and Critical Phenomena. Oxford, 1989.
- [21] V. S. L'vov. Phys. Rep. 1991. V. 207. P. 1.
- [22] В. И. Белиничер, В. С. Львов. ЖЭТФ. 1987. Т. 93. С. 553.
- [23] R. Z. Sagdeev, S. S. Moiseev, A. V. Tur, V. V. Yanovskii. Non-linear phenomena in plasma physics and hydrodynamics. Ed. R. Z. Sagdeev. M.: Mir, 1986. P. 138; А. В. Тур, В. В. Яновский. Препринт ИКИ АН СССР Пр-1203. М.: ИКИ АН СССР, 1986.
- [24] В. В. Лебедев, В. С. Львов. Письма в ЖЭТФ. 1994. Т. 59. С. 546.
- [25] Л. Ц. Аджемьян, Н. В. Антонов. Вестн. СПбУ. Сер. Физ., хим. 1994. Вып. 2. № 11. С. 53.
- [26] Н. В. Антонов, С. В. Борисенко, В. И. Гурина. ТМФ. 1996. Т. 106. С. 92.

Поступила в редакцию 21.V.1996 г.

N. V. Antonov, A. N. Vasil'ev

RENORMALIZATION GROUP IN THE THEORY OF FULLY DEVELOPED TURBULENCE. PROBLEM OF VERIFICATION OF THE KOLMOGOROV HYPOTHESES FOR COMPOSITE OPERATORS

Stochastic theory of fully developed turbulence is considered within the framework of the field theoretic renormalization group and short-distance expansion. The problem of verification of the Kolmogorov–Obukhov theory is discussed in connection with correlation functions of composite operators. An explicit expression for the critical dimensionality of a general composite operator is obtained. The Second Kolmogorov hypothesis (independence of the correlators on the viscosity) is proved for an arbitrary UV-finite composite operator. It is shown that there exists an infinite number of Galilean invariant scalar operators having negative critical dimensionalities.