Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. П. Незнамов, Уравнения второго порядка для фермионов в пространстве-времени Шварцшильда, Райсснера–Нордстрёма, Керра и Керра–Ньюмена, *ТМФ*, 2018, том 197, номер 3, 493–509

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf9570>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.229.108.108

26 апреля 2023 г., 17:19:35

© 2018 г.

В. П. Незнамов^{*†}

УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА ДЛЯ ФЕРМИОНОВ В ПРОСТРАНСТВЕ-ВРЕМЕНИ ШВАРЦШИЛЬДА, РАЙССНЕРА–НОРДСТРЁМА, КЕРРА И КЕРРА–НЬЮМЕНА

Для фермионов получены релятивистские самосопряженные уравнения второго порядка в гравитационных и электромагнитных полях Шварцшильда, Райсснера–Нордстрёма, Керра и Керра–Ньюмена. Уравнения второго порядка с эффективными потенциалами и со спинорными волновыми функциями расширяют возможности получения регулярных решений квантово-механических уравнений частиц со спином $1/2$.

Ключевые слова: уравнение Дирака, самосопряженные уравнения второго порядка, спинорная волновая функция, эффективный потенциал.

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf9570>

1. ВВЕДЕНИЕ

В квантовой механике частиц со спином $1/2$ общепринятым является использование уравнения Дирака первого порядка с биспинорной волновой функцией. Практически одновременно Дираком было предложено также уравнение второго порядка во внешнем электромагнитном поле [1]. Используя соотношение между верхним и нижним спинорами дираковского биспинора, уравнение второго порядка можно записать в виде двух отдельных уравнений со спинорными волновыми функциями. При этом для самосопряженности уравнений второго порядка необходимо для каждого из них проводить соответствующие неунитарные преобразования (см., например, статью [2]). В результате при использовании самосопряженных уравнений второго порядка со спинорными волновыми функциями в квантовой механике частиц со спином $1/2$ во внешних электромагнитных и гравитационных полях могут возникать новые физические следствия.

^{*}Российский федеральный ядерный центр – Всероссийский научно-исследовательский институт экспериментальной физики, Саров, Нижегородская обл., Россия.
E-mail: vpneznamov@vniief.ru, vpneznamov@mail.ru

[†]Национальный исследовательский ядерный университет “МИФИ”, Москва, Россия

В настоящей работе получены в единой методологии самосопряженные уравнения второго порядка для движения частиц со спином $1/2$ в полях Шварцшильда, Райсснера–Нордстрёма, Керра и Керра–Ньюмена. В пространстве Минковского из этих уравнений при отсутствии гравитации можно вывести уравнения второго порядка для движения фермионов в кулоновском поле.

Статья организована следующим образом. В разделах 2, 3 рассмотрены уравнения Дирака и получены уравнения второго порядка в полях Шварцшильда, Райсснера–Нордстрёма, Керра и Керра–Ньюмена.

В заключении проводится краткое обсуждение и для информации сообщается об известных к настоящему времени новых физических следствиях, полученных в результате использования самосопряженных уравнений второго порядка со спинорными волновыми функциями.

В приложении приведен явный вид эффективных потенциалов в полученных уравнениях второго порядка во внешних гравитационных и электромагнитных полях.

2. УРАВНЕНИЯ ДИРАКА И УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА В ПОЛЯХ ШВАРЦШИЛЬДА И РАЙССНЕРА–НОРДСТРЁМА

В работе, как правило, используется система единиц $\hbar = c = 1$; сигнатура метрики плоского пространства-времени выбрана равной

$$\eta_{\underline{\alpha}\underline{\beta}} = \text{diag}[1, -1, -1, -1]. \quad (1)$$

В выражении (1) и ниже подчеркнутые индексы являются локальными. Греческие индексы принимают значения $0, 1, 2, 3$, латинские индексы – значения $1, 2, 3$. Используется стандартное правило суммирования по повторяющимся индексам.

2.1. Метрика Райсснера–Нордстрёма. Статическая метрика Райсснера–Нордстрёма характеризуется точечным источником с массой M и зарядом Q :

$$ds^2 = f_{\text{R-N}} dt^2 - \frac{dr^2}{f_{\text{R-N}}} - r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2). \quad (2)$$

Здесь $g_{00} = f_{\text{R-N}}$, $g^{00} = (f_{\text{R-N}})^{-1}$, $f_{\text{R-N}} = (1 - r_0/r + r_Q^2/r^2)$, $r_0 = 2GM/c^2$ – гравитационный радиус поля Шварцшильда, $r_Q = \sqrt{G} Q/c^2$, G – гравитационная постоянная, c – скорость света.

1. Если $r_0^2 > 4r_Q^2$, то

$$f_{\text{R-N}} = \left(1 - \frac{r_+}{r}\right) \left(1 - \frac{r_-}{r}\right), \quad (3)$$

где $r_{\pm}$ – радиусы внешнего и внутреннего горизонтов событий,

$$r_{\pm} = \frac{r_0}{2} \pm \sqrt{\frac{r_0^2}{4} - r_Q^2}. \quad (4)$$

2. Случай $r_0^2 = 4r_Q^2$ соответствует экстремальному полю Райсснера–Нордстрёма с единственным горизонтом событий $r_{\pm} = r_0/2$.

3. Случай $r_0^2 < 4r_Q^2$ соответствует “голой” сингулярности. В этом случае $f_{\text{R-N}} > 0$, и область определения волновых функций является $r \in (0, \infty)$.

4. При $Q = 0$ метрика Райсснера–Нордстрёма переходит в метрику Шварцшильда с $f_{R-N} = f_S = 1 - r_0/r$.

Ниже рассмотрены релятивистские уравнения второго порядка для спинорных волновых функций. Эти уравнения получаются при квадрировании уравнения Дирака, записанного в гамильтоновой форме. При этом исходный дираковский гамильтониан должен быть самосопряженным.

Алгоритмы получения самосопряженных дираковских гамильтонианов во внешних гравитационных полях с помощью методов псевдоэрмитовой квантовой механики представлены в работах [3]–[5].

2.2. Самосопряженный гамильтониан. Уравнение Дирака в гамильтоновой форме для частицы со спином $1/2$, массой m и зарядом q в поле Райсснера–Нордстрёма имеет вид

$$i \frac{\partial \Psi_\eta(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = H_\eta \Psi_\eta(\mathbf{r}, t), \quad (5)$$

где $H_\eta = H_\eta^+$ – самосопряженный гамильтониан с плоским скалярным произведением волновых функций.

Для диагональных метрических тензоров $g_{\mu\nu}$ гамильтониан H_η легко находится из полученного в работе [5] равенства

$$H_\eta = \frac{1}{2}(\tilde{H}_{\text{red}} + \tilde{H}_{\text{red}}^+), \quad (6)$$

где

$$\tilde{H}_{\text{red}} = \frac{m}{g^{00}} \tilde{\gamma}^0 - \frac{i}{g^{00}} \tilde{\gamma}^0 \tilde{\gamma}^k \frac{\partial}{\partial x^k} + qA^0. \quad (7)$$

В равенствах (5)–(7) приняты следующие обозначения. Верхний индекс плюс означает эрмитово сопряжение. Тильда над величинами означает, что они получены с использованием тетрадных векторов в калибровке Швингера [6], $A^0 = Q/r$ – скалярный электромагнитный потенциал для метрики Райсснера–Нордстрёма. Матрицы $\tilde{\gamma}^\mu$ ($\mu = 0, 1, 2, 3$) – матрицы Дирака с мировыми индексами. Матрицы $\tilde{\gamma}^\mu$ через тетрадные векторы в калибровке Швингера связаны с матрицами γ_β^μ ($\tilde{\gamma}^\mu = \tilde{H}_\beta^\mu \gamma_\beta^\mu$). Ненулевые тетрадные векторы в калибровке Швингера для метрики Райсснера–Нордстрёма равны

$$\tilde{H}_0^0 = \frac{1}{\sqrt{f_{R-N}}}, \quad \tilde{H}_1^1 = \sqrt{f_{R-N}}, \quad \tilde{H}_2^2 = \frac{1}{r}, \quad \tilde{H}_3^3 = \frac{1}{r \sin \theta}. \quad (8)$$

Принимая во внимание формулы (6)–(8), можно получить следующее выражение для самосопряженного гамильтониана $H_\eta = H_\eta^+$ в сферических координатах (r, θ, ϕ) :

$$H_\eta = \sqrt{f_{R-N}} m \gamma^0 - i \gamma^0 \gamma^1 \left(f_{R-N} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} - \frac{r_0}{2r^2} \right) - \\ - i \sqrt{f_{R-N}} \frac{1}{r} \left[\gamma^0 \gamma^2 \left(\frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{2} \text{ctg} \theta \right) + \gamma^0 \gamma^3 \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \right] + \frac{qQ}{r}. \quad (9)$$

В выражении (9) γ^0, γ^k – матрицы Дирака с локальными индексами.

Если $Q = 0$, то выражение (9) представляет собой самосопряженный дираковский гамильтониан в поле Шварцшильда.

Член в гамильтониане (9), содержащийся в квадратных скобках, зависит только от угловых координат, остальные слагаемые зависят только от радиальной координаты.

2.3. Разделение переменных. Для разделения переменных представим биспинор $\Psi_\eta(\mathbf{r}, t)$ в виде

$$\Psi_\eta(r, \theta, \phi, t) = \begin{pmatrix} F(r)\xi(\theta) \\ -iG(r)\sigma^3\xi(\theta) \end{pmatrix} e^{im_\phi\phi} e^{-iEt} \quad (10)$$

и используем уравнение Брилла–Уилера [7]

$$\left[-\sigma^2 \left(\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{2} \operatorname{ctg} \theta \right) + i\sigma^1 m_\phi \frac{1}{\sin \theta} \right] \xi(\theta) = i\kappa \xi(\theta). \quad (11)$$

Для этого удобно произвести эквивалентную замену матриц в гамильтониане (9):

$$\gamma^\perp \rightarrow \gamma^3, \quad \gamma^3 \rightarrow \gamma^2, \quad \gamma^2 \rightarrow \gamma^\perp. \quad (12)$$

В равенствах (10), (11) $\xi(\theta)$ – сферические гармоники для спина $1/2$, σ^k – двумерные матрицы Паули, E – энергия дираковской частицы, $m_\phi = -j, -j+1, \dots, j$, – азимутальная компонента углового момента j , а κ – квантовое число уравнения Дирака:

$$\kappa = \mp 1, \mp 2, \dots = \begin{cases} -(l+1), & j = l+1/2, \\ l & j = l-1/2, \end{cases} \quad (13)$$

где j, l – квантовые числа полного углового и орбитального моментов дираковской частицы. Спинор $\xi(\theta)$ можно представить в виде [8]

$$\begin{aligned} \xi(\theta) = \begin{pmatrix} -_{1/2}Y_{jm_\phi}(\theta) \\ _{1/2}Y_{jm_\phi}(\theta) \end{pmatrix} = (-1)^{m_\phi+1/2} \sqrt{\frac{1}{4\pi} \frac{(j-m_\phi)!}{(j+m_\phi)!}} \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} & \sin \frac{\theta}{2} \\ -\sin \frac{\theta}{2} & \cos \frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \times \\ \times \begin{pmatrix} \left(\kappa - m_\phi + \frac{1}{2} \right) P_l^{m_\phi-1/2}(\theta) \\ P_l^{m_\phi+1/2}(\theta) \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (14)$$

В формуле (14) выражение в круглых скобках после квадратного корня является матрицей размера 2×2 , $P_l^{m_\phi \pm 1/2}(\theta)$ – присоединенные полиномы Лежандра.

В результате разделения переменных при $f_{R-N} > 0$ получаем уравнения для вещественных радиальных функций $F(\rho)$, $G(\rho)$:

$$\begin{aligned} f_{R-N} \frac{dF(\rho)}{d\rho} + \left(\frac{1 + \kappa \sqrt{f_{R-N}}}{\rho} - \frac{\alpha}{\rho^2} \right) F(\rho) - \left(\varepsilon - \frac{\alpha_{\text{em}}}{\rho} + \sqrt{f_{R-N}} \right) G(\rho) = 0, \\ f_{R-N} \frac{dG(\rho)}{d\rho} + \left(\frac{1 - \kappa \sqrt{f_{R-N}}}{\rho} - \frac{\alpha}{\rho^2} \right) G(\rho) + \left(\varepsilon - \frac{\alpha_{\text{em}}}{\rho} - \sqrt{f_{R-N}} \right) F(\rho) = 0. \end{aligned} \quad (15)$$

Здесь введены безразмерные переменные

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{r}{l_c}, \quad \varepsilon = \frac{E}{mc^2}, \quad \alpha = \frac{r_0}{2l_c} = \frac{GMm}{\hbar c} = \frac{Mm}{M_{\text{P}}^2}, \\ \alpha_Q &= \frac{r_Q}{l_c} = \frac{\sqrt{G} Qm}{\hbar c} = \frac{\sqrt{\alpha_{\text{fs}}}}{M_{\text{P}}} m \frac{Q}{e}, \quad \alpha_{\text{em}} = \frac{qQ}{\hbar c} = \alpha_{\text{fs}} \frac{q}{e} \frac{Q}{e}, \end{aligned} \quad (16)$$

где $l_c = \hbar/mc$ – комптоновская длина волны дираковской частицы, $M_{\text{P}} = \sqrt{\hbar c/G} = 2.2 \cdot 10^{-5}$ г ($1.2 \cdot 10^{19}$ ГэВ) – планковская масса, $\alpha_{\text{fs}} = e^2/\hbar c \approx 1/137$ – электромагнитная постоянная тонкой структуры, α и α_{em} – гравитационная и электромагнитная константы связи, α_Q – безразмерная константа, характеризующая источник электромагнитного поля в метрике Райсснера–Нордстрёма.

В обозначениях (16)

$$f_{\text{R-N}} = 1 - \frac{2\alpha}{\rho} + \frac{\alpha_Q^2}{\rho^2}. \quad (17)$$

При наличии внешнего и внутреннего горизонтов событий $\alpha^2 > \alpha_Q^2$ и

$$f_{\text{R-N}} = \frac{(\rho - \rho_+)(\rho - \rho_-)}{\rho^2}, \quad (18)$$

где $\rho_{\pm} = \alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \alpha_Q^2}$.

Для экстремального поля Райсснера–Нордстрёма $\alpha^2 = \alpha_Q^2$, $\rho_+ = \rho_- = \alpha$ и

$$f_{\text{R-N}} = \frac{(\rho - \alpha)^2}{\rho^2}. \quad (19)$$

Случай голой сингулярности Райсснера–Нордстрёма реализуется при $\alpha^2 < \alpha_Q^2$. Далее, с учетом уравнений (15) вводим обозначения

$$A(\rho) = -\frac{1}{f_{\text{R-N}}} \left(\frac{1 + \kappa \sqrt{f_{\text{R-N}}}}{\rho} - \frac{\alpha}{\rho^2} \right), \quad (20)$$

$$B(\rho) = \frac{1}{f_{\text{R-N}}} \left(\varepsilon - \frac{\alpha_{\text{em}}}{\rho} + \sqrt{f_{\text{R-N}}} \right), \quad (21)$$

$$C(\rho) = -\frac{1}{f_{\text{R-N}}} \left(\varepsilon - \frac{\alpha_{\text{em}}}{\rho} - \sqrt{f_{\text{R-N}}} \right), \quad (22)$$

$$D(\rho) = -\frac{1}{f_{\text{R-N}}} \left(\frac{1 - \kappa \sqrt{f_{\text{R-N}}}}{\rho} - \frac{\alpha}{\rho^2} \right), \quad (23)$$

$$A_F(\rho) = -\frac{1}{B} \frac{dB}{d\rho} - A - D, \quad (24)$$

$$A_G(\rho) = -\frac{1}{C} \frac{dC}{d\rho} - A - D. \quad (25)$$

В работе [7] приведены уравнения для метрики Шварцшильда с электрической потенциальной энергией $V(r)$ (см. уравнения (39)). Для удобства сделаем переобозначения в этих уравнениях $G \rightarrow G_{\text{B-W}}$, $F \rightarrow F_{\text{B-W}}$. Уравнения (39) из работы [7] совпадают с уравнениями (15) нашей работы, если произвести замены $G_{\text{B-W}} \rightarrow r\sqrt{f_{\text{S}}}F$, $F_{\text{B-W}} \rightarrow r\sqrt{f_{\text{S}}}G$, $h \rightarrow E$, $V \rightarrow Qq/r$ с последующим введением

безразмерных переменных (16). При этом в (15) для сравнения необходимо сделать замену $f_{\text{R-N}} \rightarrow f_{\text{S}} = 1 - 2\alpha/\rho$. В этом случае в (15) и (39) отсутствуют члены с α_Q , так как метрика Шварцшильда является незаряженной.

2.4. Самосопряженные уравнения второго порядка для спинорных волновых функций фермионов в гравитационных полях Шварцшильда и Райсснера–Нордстрёма. Введем в гамильтониане (9) безразмерные переменные и обозначение

$$H_\eta = H_1 + V(\rho), \quad \text{где} \quad V(\rho) = \frac{\alpha_{\text{em}}}{\rho}. \quad (26)$$

С учетом (10) и (26) уравнение (5) имеет вид

$$(\varepsilon - V(\rho) - H_1)\Psi_\eta(\rho, \theta, \phi) = 0. \quad (27)$$

Умножим слева уравнение (27) на оператор $\varepsilon - V(\rho) + H_1$. Тогда

$$(\varepsilon - V(\rho) + H_1)(\varepsilon - V(\rho) - H_1)\Psi_\eta(\rho, \theta, \phi) = 0, \quad (28)$$

$$\begin{aligned} & \left\{ (\varepsilon - V)^2 - f_{\text{R-N}} + \left(f_{\text{R-N}} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} - \frac{\alpha}{\rho^2} \right) \left(f_{\text{R-N}} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} - \frac{\alpha}{\rho^2} \right) + \right. \\ & + \frac{f_{\text{R-N}}}{\rho^2} \left[\left(\frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{2} \text{ctg } \theta \right) \left(\frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{2} \text{ctg } \theta \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} + i\Sigma^3 \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{\sin \theta} \right) \frac{\partial}{\partial \phi} \right] + \\ & + i\gamma^0 \gamma^3 f_{\text{R-N}} \frac{dV}{d\rho} - i\gamma^0 \gamma^3 f_{\text{R-N}} \frac{d}{d\rho} (\sqrt{f_{\text{R-N}}}) + \\ & \left. + f_{\text{R-N}} \frac{d}{d\rho} \left(\sqrt{f_{\text{R-N}}} \frac{1}{\rho} \right) \left[i\Sigma^2 \left(\frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{2} \text{ctg } \theta \right) - i\Sigma^1 \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \right] \right\} \Psi_\eta(\rho, \theta, \phi) = 0. \quad (29) \end{aligned}$$

В формуле (29) произведена эквивалентная замена матриц (12), $\Sigma^k = \begin{pmatrix} \sigma^k & 0 \\ 0 & \sigma^k \end{pmatrix}$.

Уравнения Дирака для верхних и нижних компонент биспинора

$$\Psi_\eta(\rho, \theta, \phi, t) = \begin{pmatrix} U(\rho, \theta, \phi) \\ W(\rho, \theta, \phi) \end{pmatrix} e^{-i\varepsilon t} \quad (30)$$

имеют вид

$$\begin{aligned} (\varepsilon - V - \sqrt{f_{\text{R-N}}})U &= \left(-i\sigma^3 \left(f_{\text{R-N}} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} - \frac{\alpha}{\rho^2} \right) - \right. \\ & \left. - i\sigma^1 \sqrt{f_{\text{R-N}}} \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{2} \text{ctg } \theta \right) - i\sigma^2 \sqrt{f_{\text{R-N}}} \frac{1}{\rho} \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \right) W, \\ (\varepsilon - V(\rho) + \sqrt{f_{\text{R-N}}})W &= \left(-i\sigma^3 \left(f_{\text{R-N}} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} - \frac{\alpha}{\rho^2} \right) - \right. \\ & \left. - i\sigma^1 \sqrt{f_{\text{R-N}}} \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{2} \text{ctg } \theta \right) - i\sigma^2 \sqrt{f_{\text{R-N}}} \frac{1}{\rho} \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \right) U. \end{aligned} \quad (31)$$

В результате с учетом (31) уравнение (29) можно записать для одного из спиноров $U(\rho, \theta, \phi)$ или $W(\rho, \theta, \phi)$. Для спинора $U(\rho, \theta, \phi)$ уравнение (29) имеет вид

$$\begin{aligned} & \left\{ (\varepsilon - V)^2 - f_{R-N} + \left(f_{R-N} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} - \frac{\alpha}{\rho^2} \right)^2 + \right. \\ & + \frac{f_{R-N}}{\rho^2} \left[\left(\frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{2} \operatorname{ctg} \theta \right)^2 + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} + i\sigma^3 \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{\sin \theta} \right) \frac{\partial}{\partial \phi} \right] + \\ & + f_{R-N} \frac{d}{d\rho} \left(\sqrt{f_{R-N}} \frac{1}{\rho} \right) \left[i\sigma^2 \left(\frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{2} \operatorname{ctg} \theta \right) - i\sigma^1 \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \right] + \\ & + \left(f_{R-N} \frac{d}{d\rho} (\sqrt{f_{R-N}}) - f_{R-N} \frac{dV}{d\rho} \right) \frac{1}{\varepsilon - V + \sqrt{f_{R-N}}} \times \\ & \quad \times \left[-f_{R-N} \frac{\partial}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho} + \frac{\alpha}{\rho^2} - i\sigma^2 \sqrt{f_{R-N}} \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{2} \operatorname{ctg} \theta \right) + \right. \\ & \quad \left. \left. + i\sigma^1 \sqrt{f_{R-N}} \frac{1}{\rho} \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \right] \right\} U(\rho, \theta, \phi) = 0. \quad (32) \end{aligned}$$

Далее можно произвести разделение переменных. Из представления (10) следует, что

$$U(r, \theta, \phi) = F(\rho) \xi(\theta) e^{im_\phi \phi}. \quad (33)$$

Используя уравнение Брилла–Уилера (11) и его квадрированное представление [8]

$$\left[\left(\frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{2} \operatorname{ctg} \theta \right)^2 + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} + i\sigma^3 \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{\sin \theta} \right) \frac{\partial}{\partial \phi} \right] \xi(\theta) e^{im_\phi \phi} = -\kappa^2 \xi(\theta) e^{im_\phi \phi}, \quad (34)$$

можно получить уравнение второго порядка для радиальной функции $F(\rho)$:

$$\begin{aligned} & \left\{ (\varepsilon - V)^2 - f_{R-N} + \left(f_{R-N} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} - \frac{\alpha}{\rho^2} \right)^2 - \frac{f_{R-N} \kappa^2}{\rho^2} + f_{R-N} \kappa \frac{d}{d\rho} \left(\sqrt{f_{R-N}} \frac{1}{\rho} \right) - \right. \\ & - \left(f_{R-N} \frac{d}{d\rho} (\sqrt{f_{R-N}}) - f_{R-N} \frac{dV}{d\rho} \right) \frac{1}{\varepsilon - V + \sqrt{f_{R-N}}} \frac{\kappa \sqrt{f_{R-N}}}{\rho} - \\ & \left. - \left(f_{R-N} \frac{d}{d\rho} (\sqrt{f_{R-N}}) - f_{R-N} \frac{dV}{d\rho} \right) \frac{1}{\varepsilon - V + \sqrt{f_{R-N}}} \left(f_{R-N} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} - \frac{\alpha}{\rho^2} \right) \right\} F(\rho) = 0. \quad (35) \end{aligned}$$

В этом уравнении третье и последнее слагаемые не являются самосопряженными. Для того чтобы сделать уравнение (35) самосопряженным, проведем неунитарное преобразование

$$\Phi(\rho) = gF(\rho), \quad (36)$$

где

$$g(\rho) = \exp \frac{1}{2} \int A_F(\rho') d\rho', \quad (37)$$

а выражение $A_F(\rho)$ определено равенствами (20), (21), (23), (24).

В результате для функции $\Phi(\rho)$ получается релятивистское уравнение второго порядка типа Шредингера с эффективным потенциалом U_{eff}^{R-N} :

$$\frac{d^2 \Phi}{d\rho^2} + 2(E_{\text{Schr}} - U_{\text{eff}}^{R-N}) \Phi = 0, \quad (38)$$

где

$$E_{\text{Schr}} = \frac{1}{2}(\varepsilon^2 - 1), \quad (39)$$

$$U_{\text{eff}}^{\text{R-N}} = -\frac{1}{4} \frac{1}{B} \frac{d^2 B}{d\rho^2} + \frac{3}{8} \left(\frac{1}{B} \frac{dB}{d\rho} \right)^2 - \frac{1}{4} (A - D) \frac{1}{B} \frac{dB}{d\rho} + \frac{1}{4} \frac{d}{d\rho} (A - D) + \\ + \frac{1}{8} (A - D)^2 + \frac{1}{2} BC + E_{\text{Schr}}. \quad (40)$$

При $Q = 0$ получается эффективный потенциал для поля Шварцшильда $U_{\text{eff}}^{\text{S}}$. При $\alpha = 0$, $\alpha_Q = 0$ мы имеем эффективный потенциал для кулоновского поля в плоском пространстве-времени. Явный вид эффективных потенциалов в полях Райсснера–Нордстрёма, Шварцшильда и в кулоновском поле (плоское пространство-время) приведен в приложении.

3. УРАВНЕНИЯ ДИРАКА И УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА В ПОЛЯХ КЕРРА И КЕРРА–НЬЮМЕНА

3.1. Метрика Керра–Ньюмена. Стационарная метрика Керра–Ньюмена характеризуется точечным источником с массой M , зарядом Q , вращающимся с угловым моментом $J = Mac$. Метрику Керра–Ньюмена в координатах Бойера–Линдквиста (t, r, θ, ϕ) можно представить в виде

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_0 r - r_Q^2}{r_K^2} \right) dt^2 + \frac{2a(r_0 r - r_Q^2)}{r_K^2} \sin^2 \theta dt d\phi - \frac{r_K^2}{\Delta_{\text{K-N}}} dr^2 - r_K^2 d\theta^2 - \\ - \left(r^2 + a^2 + \frac{a^2(r_0 r - r_Q^2)}{r_K^2} \sin^2 \theta \right) \sin^2 \theta d\phi^2, \quad (41)$$

где $r_K^2 = r^2 + a^2 \cos^2 \theta$, $\Delta_{\text{K-N}} = r^2 f_{\text{K-N}} = r^2(1 - r_0/r + (r_Q^2 + a^2)/r^2)$, остальные обозначения такие же, как и для метрики Райсснера–Нордстрёма (см. раздел 2).

1. Если $r_0 > 2\sqrt{a^2 + r_Q^2}$, то

$$f_{\text{K-N}} = \left(1 - \frac{r_+}{r} \right) \left(1 - \frac{r_-}{r} \right), \quad (42)$$

где $r_{\pm}$ – радиусы внешнего и внутреннего горизонтов событий поля Керра–Ньюмена,

$$r_{\pm} = \frac{r_0}{2} \pm \sqrt{\frac{r_0^2}{4} - a^2 - r_Q^2}. \quad (43)$$

2. Случай $r_0 = 2\sqrt{a^2 + r_Q^2}$, $r_+ = r_- = r_0/2$ соответствует экстремальному полю Керра–Ньюмена.

3. Случай $r_0 < 2\sqrt{a^2 + r_Q^2}$ соответствует голой сингулярности поля Керра–Ньюмена. В этом случае $f_{\text{K-N}} > 0$.

4. При $Q = 0$ метрика Керра–Ньюмена переходит в метрику Керра с

$$f_{\text{K}} = 1 - \frac{r_0}{r} + \frac{a^2}{r^2}. \quad (44)$$

3.2. Самосопряженное уравнение Дирака. Чандрасекар для метрики Керра получил уравнение Дирака и провел разделение переменных [9], [10]. Пейдж обобщил работы Чандрасекара для метрики Керра–Ньюмена и в уравнении Дирака также провел разделение переменных [11]. Если записать уравнения Дирака в гамильтоновой форме, то гамильтонианы Чандрасекара и Пейджа оказываются псевдоэрмитовыми с весовыми множителями Паркера [12] в скалярных произведениях волновых функций. Самосопряженные гамильтонианы с плоскими скалярными произведениями волновых функций можно получить с использованием методов псевдоэрмитовой квантовой механики [3]–[5]. В работах [5], [13] такие гамильтонианы были получены для метрик Керра и Керра–Ньюмена. В статье [14] для метрики Керра доказана эквивалентность самосопряженного гамильтониана в работе [5] и гамильтониана Чандрасекара в работах [9], [10]. Недостатком гамильтониана из работы [5] является невозможность проведения разделения переменных. Ниже для метрик Керра и Керра–Ньюмена получены самосопряженные уравнения Дирака, допускающие разделение переменных.

Начнем с уравнений Дирака для метрик Керра и Керра–Ньюмена, полученных в работах Чандрасекара, Пейджа и записанных в форме [15]

$$(G - 1)\Psi = \begin{pmatrix} -1 & 0 & \alpha_+ & \beta_+ \\ 0 & -1 & \beta_- & \hat{\varepsilon}(\Delta_{K-N})\alpha_- \\ \hat{\varepsilon}(\Delta_{K-N})\bar{\alpha}_- & -\bar{\beta}_+ & -1 & 0 \\ -\bar{\beta}_- & \bar{\alpha}_+ & 0 & -1 \end{pmatrix} \Psi = 0, \quad (45)$$

где Ψ – биспинорная волновая функция,

$$\begin{aligned} \beta_{\pm} &= \frac{1}{\sqrt{\rho_K^2}} \left(i \frac{\partial}{\partial \theta} + i \frac{\text{ctg} \theta}{2} + \frac{\alpha_a \sin \theta}{2\rho_K^2} (\rho - i\alpha_a \cos \theta) \right) \pm \\ &\pm \frac{1}{\sqrt{\rho_K^2}} \left(\alpha_a \sin \theta \frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \right), \end{aligned} \quad (46)$$

$$\begin{aligned} \bar{\beta}_{\pm} &= \frac{1}{\sqrt{\rho_K^2}} \left(i \frac{\partial}{\partial \theta} + i \frac{\text{ctg} \theta}{2} - \frac{\alpha_a \sin \theta}{2\rho_K^2} (\rho + i\alpha_a \cos \theta) \right) \pm \\ &\pm \frac{1}{\sqrt{\rho_K^2}} \left(\alpha_a \sin \theta \frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \right), \end{aligned} \quad (47)$$

$$\begin{aligned} \alpha_{\pm} &= -\frac{\hat{\varepsilon}(\Delta_{K-N})}{\sqrt{\rho_K^2 |\Delta_{K-N}|}} \left(i(\rho^2 + \alpha_a^2) \frac{\partial}{\partial t} + i\alpha_a \frac{\partial}{\partial \phi} - \alpha_{\text{em}} \rho \right) \pm \\ &\pm \sqrt{\frac{|\Delta_{K-N}|}{\rho_K^2}} \left(i \frac{\partial}{\partial \rho} + i \frac{\rho - \alpha}{2\Delta_{K-N}} + \frac{i}{2\rho_K^2} (\rho - i\alpha_a \cos \theta) \right), \end{aligned} \quad (48)$$

$$\begin{aligned} \bar{\alpha}_{\pm} &= -\frac{\hat{\varepsilon}(\Delta_{K-N})}{\sqrt{\rho_K^2 |\Delta_{K-N}|}} \left(i(\rho^2 + \alpha_a^2) \frac{\partial}{\partial t} + i\alpha_a \frac{\partial}{\partial \phi} - \alpha_{\text{em}} \rho \right) \pm \\ &\pm \sqrt{\frac{|\Delta_{K-N}|}{\rho_K^2}} \left(i \frac{\partial}{\partial \rho} + i \frac{\rho - \alpha}{2\Delta_{K-N}} + \frac{i}{2\rho_K^2} (\rho + i\alpha_a \cos \theta) \right). \end{aligned} \quad (49)$$

Выражения (46)–(49) записаны в безразмерных переменных (16) с дополнительным параметром $\alpha_a = a/l_c$. Величины ρ_K^2 , Δ_{K-N} в безразмерных переменных имеют вид

$$\rho_K^2 = \rho^2 + \alpha_a^2 \cos^2 \theta, \quad (50)$$

$$\Delta_{K-N} = \rho^2 f_{K-N} = \rho^2 \left(1 - \frac{2\alpha}{\rho} + \frac{\alpha_a^2 + \alpha_Q^2}{\rho^2} \right). \quad (51)$$

В равенствах (48), (49)

$$\hat{\varepsilon}(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0, \\ -1, & x < 0. \end{cases} \quad (52)$$

Для получения более симметричного вида уравнения (45) в соответствии с работой [15] проведем некоторые преобразования. Пусть $S(\rho, \theta)$ и $\Gamma(\rho, \theta)$ – диагональные матрицы вида

$$S = |\Delta_{K-N}^{1/4}| \text{diag}((\rho - i\alpha_a \cos \theta)^{1/2}, (\rho - i\alpha_a \cos \theta)^{1/2}, (\rho + i\alpha_a \cos \theta)^{1/2}, (\rho + i\alpha_a \cos \theta)^{1/2}),$$

$$\Gamma = -i \text{diag}((\rho + i\alpha_a \cos \theta), -(\rho + i\alpha_a \cos \theta), -(\rho - i\alpha_a \cos \theta), (\rho - i\alpha_a \cos \theta)).$$

Тогда преобразованная волновая функция $\hat{\Psi} = S\Psi$ удовлетворяет уравнению

$$\Gamma S(G - 1)S^{-1}\hat{\Psi} = (R + A)\hat{\Psi} = 0, \quad (53)$$

где

$$R = \begin{pmatrix} \cdots & i\rho & \cdots & 0 & \cdots & \sqrt{|\Delta_{K-N}|}D_+ & \cdots & 0 & \cdots \\ \cdots & 0 & \cdots & -i\rho & \cdots & 0 & \cdots & \hat{\varepsilon}(\Delta_{K-N})\sqrt{|\Delta_{K-N}|}D_- & \cdots \\ \cdots & \hat{\varepsilon}(\Delta_{K-N})\sqrt{|\Delta_{K-N}|}D_- & \cdots & 0 & \cdots & -i\rho & \cdots & 0 & \cdots \\ \cdots & 0 & \cdots & \sqrt{|\Delta_{K-N}|}D_+ & \cdots & 0 & \cdots & i\rho & \cdots \end{pmatrix},$$

$$A = \begin{pmatrix} \cdots & -\alpha_a \cos \theta & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & L_+ & \cdots \\ \cdots & 0 & \cdots & \alpha_a \cos \theta & \cdots & -L_- & \cdots & 0 & \cdots \\ \cdots & 0 & \cdots & L_+ & \cdots & -\alpha_a \cos \theta & \cdots & 0 & \cdots \\ \cdots & -L_- & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & \alpha_a \cos \theta & \cdots \end{pmatrix}.$$

В этих формулах

$$D_{\pm} = \frac{\partial}{\partial \rho} \mp \frac{1}{\Delta_{K-N}} \left((\rho^2 + \alpha_a^2) \frac{\partial}{\partial t} + \alpha_a \frac{\partial}{\partial \phi} + i\alpha_{\text{em}} \rho \right),$$

$$L_{\pm} = \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{2} \text{ctg} \theta \mp i \left(\alpha_a \sin \theta \frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \right). \quad (54)$$

Оператор R зависит только от радиальной переменной ρ , а оператор A – только от угловых переменных (θ, ϕ) .

Если представить функцию $\hat{\Psi}$ в виде $\hat{\Psi}(t, \rho, \theta, \phi) = e^{-i\epsilon t} e^{im_\phi \phi} \hat{\Phi}(\rho, \theta)$, где

$$\hat{\Phi}(\rho, \theta) = \begin{pmatrix} R_-(\rho)S_-(\theta) \\ R_+(\rho)S_+(\theta) \\ R_+(\rho)S_-(\theta) \\ R_-(\rho)S_+(\theta) \end{pmatrix}, \quad (55)$$

то можно получить системы уравнений Чандрасекара–Пейджа отдельно для радиальных функций $R_{\pm}(\rho)$ и отдельно для угловых сфероидальных гармоник $S_{\mp}(\theta)$.

Уравнения Дирака (45), (53) получены при использовании матриц Дирака с локальными индексами в спинорном представлении (представление Вейля)

$$\gamma_{\mathbb{W}}^0 = -\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma_{\mathbb{W}}^k = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^k \\ -\sigma^k & 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha_{\mathbb{W}}^k = \gamma_{\mathbb{W}}^0 \gamma_{\mathbb{W}}^k = \begin{pmatrix} \sigma^k & 0 \\ 0 & -\sigma^k \end{pmatrix}. \quad (56)$$

Для гамильтонианов в полях Шварцшильда, Райсснера–Нордстрёма использованы матрицы в представлении Дирака–Паули

$$\gamma_{\mathbb{D-P}}^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \gamma_{\mathbb{D-P}}^k = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^k \\ -\sigma^k & 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha_{\mathbb{D-P}}^k = \gamma_{\mathbb{D-P}}^0 \gamma_{\mathbb{D-P}}^k = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^k \\ \sigma^k & 0 \end{pmatrix}.$$

Матрицы в представлении Дирака–Паули связаны с матрицами в представлении Вейля унитарным преобразованием

$$\gamma_{\mathbb{D-P}}^{\mu} = M \gamma_{\mathbb{W}}^{\mu} M^{+}, \quad M^{+} = M^{-1}, \quad M = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \mathbf{I} & -\mathbf{I} \\ \mathbf{I} & \mathbf{I} \end{pmatrix}, \quad (57)$$

где $\mathbf{I}$ – двумерная единичная матрица.

Проведем унитарное преобразование (57) с волновой функцией (55) и с уравнением Дирака (53). Преобразованная функция $\hat{\Phi}_{\mathbb{D-P}}$ имеет вид

$$\hat{\Phi}_{\mathbb{D-P}} = M \hat{\Phi}(\rho, \theta) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} (R_{-} - R_{+}) S_{-} \\ (R_{+} - R_{-}) S_{+} \\ (R_{-} + R_{+}) S_{-} \\ (R_{-} + R_{+}) S_{+} \end{pmatrix}. \quad (58)$$

Учтем свойство радиальных волновых функций Чандрасекара–Пейджа [16], [17]

$$R_{-}(\rho) = R_{+}^{*}(\rho), \quad R_{+}(\rho) = R_{-}^{*}(\rho). \quad (59)$$

и введем вещественные радиальные функции

$$g(\rho) = R_{-}(\rho) + R_{+}(\rho), \quad f(\rho) = i(R_{+}(\rho) - R_{-}(\rho)). \quad (60)$$

С учетом (60) функцию $\hat{\Phi}_{\mathbb{D-P}}$ можно записать в виде

$$\hat{\Phi}_{\mathbb{D-P}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} f(\rho) i \sigma^3 \xi_{\mathbf{K-N}}(\theta) \\ g(\rho) \xi_{\mathbf{K-N}}(\theta) \end{pmatrix}. \quad (61)$$

Спинор $\xi_{\mathbf{K-N}}(\theta)$ равен

$$\xi_{\mathbf{K-N}}(\theta) = \begin{pmatrix} S_{-}(\theta) \\ S_{+}(\theta) \end{pmatrix}, \quad (62)$$

где $S_{\mp}(\theta)$ – сфероидальные гармоники для спина $1/2$, подчиняющиеся угловым уравнениям Чандрасекара–Пейджа. В отсутствии вращения ($\alpha_a = 0$)

$$\xi_{K-N}(\theta) = \xi(\theta) = \begin{pmatrix} -1/2 Y(\theta) \\ +1/2 Y(\theta) \end{pmatrix},$$

где $-1/2 Y(\theta)$, $+1/2 Y(\theta)$ – сферические гармоники для спина $1/2$ (см. выражение (14)).

Спинор $\xi_{K-N}(\theta)$ удовлетворяет уравнению

$$\left(i\sigma^2 \left(\frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{2} \operatorname{ctg} \theta \right) + \sigma^1 \left(-\alpha_a \varepsilon \sin \theta + \frac{m_\phi}{\sin \theta} \right) - \sigma^3 \alpha_a \cos \theta \right) \xi_{K-N}(\theta) = -\lambda \xi_{K-N}(\theta), \quad (63)$$

из которого следуют угловые уравнения Чандрасекара–Пейджа для сфероидальных гармоник $S_{\mp}(\theta)$:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{2} \operatorname{ctg} \theta \right) S_+ - \left(\alpha_a \varepsilon \sin \theta - \frac{m_\phi}{\sin \theta} \right) S_+ &= -(\lambda - \alpha_a \cos \theta) S_-, \\ \left(\frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{2} \operatorname{ctg} \theta \right) S_- + \left(\alpha_a \varepsilon \sin \theta - \frac{m_\phi}{\sin \theta} \right) S_- &= (\lambda + \alpha_a \cos \theta) S_+. \end{aligned} \quad (64)$$

В отличие от полей Шварцшильда, Райсснера–Нордстрёма, константа разделения λ в (63) зависит от $\varepsilon, \alpha_a, j, l, m_\phi$.

Преобразованное уравнение Дирака (53) для функции $\hat{\Psi}_{D-P}$ имеет вид

$$(i\gamma^3)M(R+A)M^{-1}\hat{\Psi}_{D-P} = 0. \quad (65)$$

Здесь для удобства преобразованное уравнение слева умножено на матрицу $i\gamma^3$. Кроме этого, для сравнения с уравнением Дирака в полях Шварцшильда и Райсснера–Нордстрёма в уравнении (65) будем использовать волновую функцию

$$\Psi_{K-N} = \frac{\hat{\Psi}_{D-P}}{\rho \sqrt{f_{K-N}}}. \quad (66)$$

Перед тем как написать уравнение (65) с учетом (66) в явном виде, следует отметить, что для вещественных радиальных волновых функций $f(\rho), g(\rho)$ будут использоваться положительные значения $\Delta_{K-N} \geq 0$, $f_{K-N} \geq 0$. В этом случае $\hat{\varepsilon}(\Delta_{K-N}) = 1$. При наличии горизонтов событий условие $\Delta_{K-N} \geq 0$ исключает из области определения волновых функций сферическую область между внешним и внутренним горизонтами событий. В результате уравнение Дирака для Ψ_{K-N} (66) имеет вид

$$\begin{aligned} (\omega - \gamma^0 \sqrt{f_{K-N}}) \Psi_{K-N} &= \left\{ -i\gamma^0 \gamma^3 \left(f_{K-N} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} - \frac{\alpha}{\rho^2} \right) + \right. \\ &+ \left. \frac{\sqrt{f_{K-N}}}{\rho} \left[-i\gamma^0 \gamma^5 \alpha_a \cos \theta - i\gamma^0 \gamma^1 \left(\frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{2} \operatorname{ctg} \theta \right) - \gamma^0 \gamma^2 \left(\varepsilon \alpha_a \sin \theta - \frac{m_\phi}{\sin \theta} \right) \right] \right\} \Psi_{K-N}. \end{aligned} \quad (67)$$

Здесь $\gamma^5 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ и

$$\omega = \varepsilon \left(1 + \frac{\alpha_a^2}{\rho^2} \right) - \frac{\alpha_a m_\phi}{\rho^2} - \frac{\alpha_{em}}{\rho}. \quad (68)$$

Уравнение (67) является самосопряженным и в отсутствии вращения ($\alpha_a = 0$) совпадает с уравнением Дирака в поле Райсснера–Нордстрёма (см. выражения (9) и (10)).

3.3. Разделение переменных. Для уравнения (67) допустима стандартная процедура разделения переменных. Сначала (67) записывается в виде системы уравнений для верхнего и нижнего спинора функции Ψ_{K-N} . Затем мы используем уравнение (63) для $\xi_{K-N}(\theta)$. В итоге получаем уравнения для вещественных радиальных функций $F_{K-N}(\rho) = f(\rho)/\rho\sqrt{f_{K-N}}$, $G_{K-N}(\rho) = g(\rho)/\rho\sqrt{f_{K-N}}$:

$$\begin{aligned} & \left(f_{K-N} \frac{d}{d\rho} + \frac{1}{\rho} - \frac{\alpha}{\rho^2} + \frac{\lambda\sqrt{f_{K-N}}}{\rho} \right) F_{K-N}(\rho) - \\ & \quad - \left(\varepsilon \left(1 + \frac{\alpha_a^2}{\rho^2} \right) - \frac{\alpha_a m_\phi}{\rho^2} - \frac{\alpha_{em}}{\rho} + \sqrt{f_{K-N}} \right) G_{K-N}(\rho) = 0, \\ & \left(f_{K-N} \frac{d}{d\rho} + \frac{1}{\rho} - \frac{\alpha}{\rho^2} - \frac{\lambda\sqrt{f_{K-N}}}{\rho} \right) G_{K-N}(\rho) + \\ & \quad + \left(\varepsilon \left(1 + \frac{\alpha_a^2}{\rho^2} \right) - \frac{\alpha_a m_\phi}{\rho^2} - \frac{\alpha_{em}}{\rho} - \sqrt{f_{K-N}} \right) F_{K-N}(\rho) = 0. \end{aligned} \quad (69)$$

Эти уравнения по своей структуре схожи с уравнениями (15) для поля Райсснера–Нордстрёма. При $\alpha_a = 0$ (в отсутствии вращения) уравнения (69) совпадают с системой уравнений (15).

3.4. Самосопряженные уравнения второго порядка для спинорных волновых функций фермионов в гравитационных полях Керра и Керра–Ньюмена. Учитывая сходство уравнений Дирака (9), (10), (15) с уравнениями (67)–(69), искомые уравнения второго порядка можно получить, не используя этапы п. 2.4.

Сначала введем обозначения

$$\begin{aligned} A_{K-N} &= -\frac{1}{f_{K-N}} \left(\frac{1 + \lambda\sqrt{f_{K-N}}}{\rho} - \frac{\alpha}{\rho^2} \right), \\ B_{K-N} &= \frac{1}{f_{K-N}} \left(\varepsilon \left(1 + \frac{\alpha_a^2}{\rho^2} \right) - \frac{\alpha_a m_\phi}{\rho^2} - \frac{\alpha_{em}}{\rho} + \sqrt{f_{K-N}} \right), \\ C_{K-N} &= -\frac{1}{f_{K-N}} \left(\varepsilon \left(1 + \frac{\alpha_a^2}{\rho^2} \right) - \frac{\alpha_a m_\phi}{\rho^2} - \frac{\alpha_{em}}{\rho} - \sqrt{f_{K-N}} \right), \\ D_{K-N} &= -\frac{1}{f_{K-N}} \left(\frac{1 - \lambda\sqrt{f_{K-N}}}{\rho} - \frac{\alpha}{\rho^2} \right), \\ A_f(\rho) &= -\frac{1}{B_{K-N}} \frac{dB_{K-N}}{d\rho} - A_{K-N} - D_{K-N}, \\ A_g(\rho) &= -\frac{1}{C_{K-N}} \frac{dC_{K-N}}{d\rho} - A_{K-N} - D_{K-N}. \end{aligned} \quad (70)$$

Далее проведем преобразования, аналогичные (36), (37). В результате получаем самосопряженное релятивистское уравнение второго порядка с эффективным потенциалом U_{eff}^{K-N} :

$$\frac{d^2 \Phi_{K-N}}{d\rho^2} + 2(E_{\text{Schr}} - U_{\text{eff}}^{K-N}) \Phi_{K-N} = 0, \quad (71)$$

где $E_{\text{Schr}} = (\varepsilon^2 - 1)/2$,

$$U_{\text{eff}}^{K-N} = -\frac{1}{4} \frac{1}{B_{K-N}} \frac{d^2 B_{K-N}}{d\rho^2} + \frac{3}{8} \frac{1}{B_{K-N}^2} \left(\frac{dB_{K-N}}{d\rho} \right)^2 - \frac{1}{4} (A_{K-N} - D_{K-N}) \frac{1}{B_{K-N}} \frac{dB_{K-N}}{d\rho} + \\ + \frac{1}{4} \frac{d}{d\rho} (A_{K-N} - D_{K-N}) + \frac{1}{8} (A_{K-N} - D_{K-N})^2 + \frac{1}{2} B_{K-N} C_{K-N} + E_{\text{Schr}}. \quad (72)$$

В отсутствии вращения ($\alpha_a = 0$) U_{eff}^{K-N} становится равным U_{eff}^{R-N} для поля Райсснера–Нордстрёма. Явный вид эффективных потенциалов в аксиально-симметричных полях Керра и Керра–Ньюмена приведен в приложении.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Для описания движения частиц со спином $1/2$ в гравитационных и электромагнитных полях Шварцшильда, Райсснера–Нордстрёма, Керра и Керра–Ньюмена получены в единой методологии самосопряженные уравнения второго порядка со спинорными волновыми функциями.

Для каждого из полей при получении уравнений осуществлялись следующие три этапа: получение самосопряженного гамильтониана или получение самосопряженного уравнения Дирака; переход в уравнениях второго порядка от биспинорных к спинорным волновым функциям; проведение неунитарных преобразований подобия для обеспечения самосопряженности уравнений второго порядка со спинорными волновыми функциями.

В качестве аргументов в пользу применения уравнений второго порядка для фермионов при решении физических проблем приведем некоторые результаты, полученные к настоящему времени автором и его коллегами.

1. Спинорные волновые функции водородоподобного атома для состояний $1S_{1/2}$, $2P_{1/2}$, вычисленные с помощью уравнений второго порядка, являются регулярными в окрестности начала координат ($r = 0$). Как известно, для уравнения Дирака первого порядка биспинорные волновые функции для этих состояний являются нерегулярными [18].

2. При анализе уравнения типа Шредингера с эффективным кулоновским потенциалом достаточно просто выделить три области при изменении Z в исходном кулоновском поле $V(r) = -Ze^2/r$ [19]. Для основного состояния $1S_{1/2}$ в первой области $1 \leq Z < Z \cdot 137\sqrt{3}/2 \approx 118.7$ при $r \rightarrow 0$ существует положительный барьер $\sim 1/r^2$ с последующей потенциальной ямой. Во второй области изменения Z ($119 \leq Z \leq 137$) остается потенциальная яма $-K/r^2$, где коэффициент $K \leq 1/8$, что допускает возможность существования фермионных стационарных связанных состояний. В третьей области с $Z > 137$ существует потенциальная яма с коэффициентом $K > 1/8$, что свидетельствует о реализации режима “падения” частицы на центр.

3. Рассмотрение движения заряженных частиц со спином $1/2$ в отталкивающем кулоновском поле с помощью уравнения второго порядка с эффективным кулоновским потенциалом выявило существование не исследованного ранее непроницаемого потенциального барьера [19]. Для частиц в покое с приведенной массой m радиус барьера равен половине классического радиуса $r_{cl} = (1/2)Ze^2/mc^2$; радиус барьера уменьшается с увеличением энергии частицы $r_{cl} = (Ze^2/mc^2)/(1 + E/mc^2)$.

4. Вещественные радиальные волновые функции уравнения Дирака во внешних гравитационных полях Шварцшильда, Райсснера–Нордстрёма, Керра и Керра–Ньюмена являются квадратично-неинтегрируемыми вблизи горизонтов событий. При переходе к уравнению типа Шредингера с эффективными потенциалами радиальные волновые функции становятся квадратично-интегрируемыми во всех допустимых областях определения, причем волновые функции на горизонтах событий равны нулю [20]–[22].

5. В начале координат метрики Райсснера–Нордстрёма при использовании уравнения второго порядка однозначно выделяется [23] одно из двух квадратично-интегрируемых решений, существующих для уравнения Дирака первого порядка [21].

6. При использовании уравнения второго порядка голая сингулярность Райсснера–Нордстрёма отделена бесконечно большим потенциальным барьером $\sim 3/8r^2$ [21]. Барьер существует для любой квантовомеханической частицы со спином $1/2$ независимо от наличия и знаков электрических зарядов частицы и метрики Райсснера–Нордстрёма. Присутствие потенциального барьера, покрывающего сингулярность, не несет угрозы космической цензуре. Данный вывод согласуется с выводами работы [24] применительно к движению бесспиновых частиц.

Таким образом, на ряде примеров показано, что использование самосопряженных уравнений второго порядка со спинорными волновыми функциями расширяет возможности квантовой механики движения частиц со спином $1/2$ во внешних гравитационных и электромагнитных полях.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Эффективные потенциалы гравитационных и электромагнитных полей в самосопряженных уравнениях второго порядка

1. Поле Керра–Ньюмена. В соответствии с формулами (70)–(72) можно получить, что

$$\begin{aligned}
 \frac{3}{8} \frac{1}{B_{K-N}^2} \left(\frac{dB_{K-N}}{d\rho} \right)^2 &= \frac{3}{8} \left\{ \frac{f_{K-N}}{\omega_{K-N} + \sqrt{f_{K-N}}} \left[-\frac{1}{f_{K-N}^2} f'_{K-N} (\omega_{K-N} + \sqrt{f_{K-N}}) + \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \frac{1}{f_{K-N}} \left(\omega'_{K-N} + \frac{f'_{K-N}}{2\sqrt{f_{K-N}}} \right) \right] \right\}^2, \\
 -\frac{1}{4} \frac{1}{B_{K-N}} \frac{d^2 B_{K-N}}{d\rho^2} &= -\frac{1}{4} \frac{f_{K-N}}{\omega_{K-N} + \sqrt{f_{K-N}}} \left[\frac{2}{f_{K-N}^3} (f'_{K-N})^2 (\omega_{K-N} + \sqrt{f_{K-N}}) - \right. \\
 &\quad - \frac{1}{f_{K-N}^2} f''_{K-N} (\omega_{K-N} + \sqrt{f_{K-N}}) - \frac{2}{f_{K-N}^2} f'_{K-N} \left(\omega'_{K-N} + \frac{f'_{K-N}}{2\sqrt{f_{K-N}}} \right) + \\
 &\quad \left. + \frac{1}{f_{K-N}} \left(\omega''_{K-N} + \frac{f''_{K-N}}{2\sqrt{f_{K-N}}} - \frac{(f'_{K-N})^2}{4f_{K-N}^{3/2}} \right) \right], \\
 \frac{1}{4} \frac{d}{d\rho} (A - D) &= \frac{\lambda}{2} \left[\frac{1}{2} \frac{f'_{K-N}}{\rho f_{K-N}^{3/2}} + \frac{1}{\rho^2 f_{K-N}^{1/2}} \right], \\
 -\frac{1}{4} \frac{(A - D)}{B} \frac{dB}{d\rho} &= \frac{\lambda}{2\rho f_{K-N}^{1/2}} \left(-\frac{f'_{K-N}}{f_{K-N}} + \frac{1}{\omega_{K-N} + \sqrt{f_{K-N}}} \left(\omega'_{K-N} + \frac{f'_{K-N}}{2\sqrt{f_{K-N}}} \right) \right), \\
 \frac{1}{8} (A - D)^2 &= \frac{\lambda^2}{2f_{K-N}\rho^2}, \quad \frac{1}{2} BC = -\frac{1}{2f_{K-N}^2} (\omega_{K-N}^2 - f_{K-N}).
 \end{aligned} \tag{П.1}$$

В этих выражениях

$$\begin{aligned}
 f_{\text{K-N}} &= 1 - \frac{2\alpha}{\rho} + \frac{\alpha_a^2 + \alpha_Q^2}{\rho^2}, & f'_{\text{K-N}} &\equiv \frac{df_{\text{K-N}}}{d\rho} = \frac{2\alpha}{\rho^2} - \frac{2(\alpha_a^2 + \alpha_Q^2)}{\rho^3}, \\
 f''_{\text{K-N}} &\equiv \frac{d^2 f_{\text{K-N}}}{d\rho^2} = -\frac{4\alpha}{\rho^3} + \frac{6(\alpha_a^2 + \alpha_Q^2)}{\rho^4}, \\
 \omega_{\text{K-N}} &= \varepsilon \left(1 + \frac{\alpha_a^2}{\rho^2}\right) - \frac{\alpha_a m_\phi}{\rho^2} - \frac{\alpha_{\text{em}}}{\rho}, & \omega'_{\text{K-N}} &\equiv \frac{d\omega_{\text{K-N}}}{d\rho} = -\frac{2\varepsilon\alpha_a}{\rho^3} + \frac{2\alpha_a m_\phi}{\rho^3} + \frac{\alpha_{\text{em}}}{\rho^2}, \\
 \omega''_{\text{K-N}} &\equiv \frac{d^2 \omega_{\text{K-N}}}{d\rho^2} = \frac{6\varepsilon\alpha_a^2}{\rho^4} - \frac{6\alpha_a m_\phi}{\rho^4} - \frac{2\alpha_{\text{em}}}{\rho^3}.
 \end{aligned}$$

Сумма выражений E_{Schr} и (II.1) приводит к формуле (72) для эффективного потенциала $U_{\text{eff}}^{\text{K-N}}$. Для остальных рассматриваемых в работе электромагнитных и гравитационных полей структура выражений для эффективных потенциалов не изменяется. Изменяются лишь выражения для $f, f', f'', \omega, \omega', \omega''$.

2. Поле Керра ($\alpha_Q = 0, \alpha_{\text{em}} = 0$). Здесь

$$\begin{aligned}
 f_{\text{K}} &= 1 - \frac{2\alpha}{\rho} + \frac{\alpha_a^2}{\rho^2}, & f'_{\text{K}} &= \frac{2\alpha}{\rho^2} - \frac{2\alpha_a^2}{\rho^3}, & f''_{\text{K}} &= -\frac{4\alpha}{\rho^3} + \frac{6\alpha_a^2}{\rho^4}, \\
 \omega_{\text{K}} &= \varepsilon \left(1 + \frac{\alpha_a^2}{\rho^2}\right) - \frac{\alpha_a m_\phi}{\rho^2}, & \omega'_{\text{K}} &= -\frac{2\varepsilon\alpha_a}{\rho^3} + \frac{2\alpha_a m_\phi}{\rho^3}, & \omega''_{\text{K}} &= \frac{6\varepsilon\alpha_a^2}{\rho^4} - \frac{6\alpha_a m_\phi}{\rho^4}.
 \end{aligned}$$

3. Поле Райсснера–Нордстрёма ($\alpha_a = 0$). Здесь

$$\begin{aligned}
 f_{\text{R-N}} &= 1 - \frac{2\alpha}{\rho} + \frac{\alpha_Q^2}{\rho^2}, & f'_{\text{R-N}} &= \frac{2\alpha}{\rho^2} - \frac{2\alpha_Q^2}{\rho^3}, & f''_{\text{R-N}} &= -\frac{4\alpha}{\rho^3} + \frac{6\alpha_Q^2}{\rho^4}, \\
 \omega_{\text{R-N}} &= \varepsilon - \frac{\alpha_{\text{em}}}{\rho}, & \omega'_{\text{R-N}} &= \frac{\alpha_{\text{em}}}{\rho^2}, & \omega''_{\text{R-N}} &= -\frac{2\alpha_{\text{em}}}{\rho^3}, & \lambda &= \kappa.
 \end{aligned}$$

4. Поле Шварцшильда ($\alpha_Q = 0, \alpha_a = 0, \alpha_{\text{em}} = 0$). В этом случае

$$\begin{aligned}
 f_{\text{S}} &= 1 - \frac{2\alpha}{\rho}, & f'_{\text{S}} &= \frac{2\alpha}{\rho^2}, & f''_{\text{S}} &= -\frac{4\alpha}{\rho^3}, \\
 \omega_{\text{S}} &= \varepsilon, & \omega'_{\text{S}} &= \omega''_{\text{S}} = 0, & \lambda &= \kappa.
 \end{aligned}$$

5. Кулоновское поле (плоское пространство-время, $\alpha = 0, \alpha_Q = 0, \alpha_a = 0$):

$$\begin{aligned}
 f_C &= 1, & f'_C &= f''_C = 0, \\
 \omega_C &= \varepsilon - \frac{\alpha_{\text{em}}}{\rho}, & \omega'_C &= \frac{\alpha_{\text{em}}}{\rho^2}, & \omega''_C &= -\frac{2\alpha_{\text{em}}}{\rho^3}, & \lambda &= \kappa.
 \end{aligned}$$

Благодарности. Автор благодарит А. Л. Новоселову за существенную техническую помощь в подготовке статьи.

Список литературы

- [1] P. A. M. Dirac, *The Principles of Quantum Mechanics*, Clarendon Press, Oxford, 1958.
- [2] Я. Б. Зельдович, В. С. Попов, “Электронная структура сверхтяжелых атомов”, *УФН*, **105:3** (1971), 403–440.
- [3] M. V. Gorbatenko, V. P. Neznamov, “Solution of the problem of uniqueness and Hermiticity of Hamiltonians for Dirac particles in gravitational fields”, *Phys. Rev. D*, **82:10** (2010), 104056, 11 pp., arXiv: 1007.4631.

- [4] M. V. Gorbatenko, V. P. Neznamov, “Uniqueness and self-conjugacy of Dirac Hamiltonians in arbitrary gravitational fields”, *Phys. Rev. D*, **83**:10 (2011), 105002, 12 pp., arXiv: 1102.4067.
- [5] M. V. Gorbatenko, V. P. Neznamov, “A modified method for deriving self-conjugate Dirac Hamiltonians in arbitrary gravitational fields and its application to centrally and axially symmetric gravitational fields”, *J. Modern Phys.*, **6**:3 (2015), 54289, 23 pp., arXiv: 1107.0844.
- [6] J. Schwinger, “Energy and momentum density in field theory”, *Phys. Rev.*, **130**:1 (1963), 800–805.
- [7] D. R. Brill, J. A. Wheeler, “Interaction of neutrinos and gravitational fields”, *Rev. Modern Phys.*, **29**:3 (1957), 465–479.
- [8] S. R. Dolan, *Trinity hall and astrophysics group*, PhD Thesis, Cavendish Laboratory, University of Cambridge, Cambridge, 2006.
- [9] S. Chandrasekhar, “The solution of Dirac’s equation in Kerr geometry”, *Proc. Roy. Soc. London Ser. A*, **349**:1659 (1976), 571–575.
- [10] S. Chandrasekhar, “Errata: The solution of Dirac’s equation in Kerr geometry”, *Proc. R. Soc. London Ser. A*, **350**:1663 (1976), 565.
- [11] D. N. Page, “Dirac equation around a charged, rotating black hole”, *Phys. Rev. D*, **14**:6 (1976), 1509–1510.
- [12] L. Parker, “One-electron atom as a probe of spacetime curvature”, *Phys. Rev. D*, **22**:8 (1980), 1922–1934.
- [13] V. P. Neznamov, V. E. Shemarulin, “Analysis of half-spin particle motion in Kerr–Newman field by means of effective potentials in second-order equations”, *Grav. Cosmol.*, **24**:2 (2018), 129–138.
- [14] M. V. Gorbatenko, V. P. Neznamov, “On the uniqueness of the Dirac theory in curved and flat spacetime”, *Ann. Phys. (Berlin)*, **526**:3–4 (2014), 195–200.
- [15] F. Finster, N. Kamran, J. Smoller, S.-T. Yan, “Nonexistence of time-periodic solutions of the Dirac equation in an axisymmetric black hole geometry”, *Commun. Pure Appl. Math.*, **53**:7 (2000), 902–929.
- [16] И. М. Тернов, А. Б. Гаина, Г. А. Чижев, “Финитное движение электронов в поле микроскопически малых черных дыр”, *Изв. вузов. Физика*, **23**:8 (1980), 56–62.
- [17] D. Batic, M. Nowakowski, K. Morgan, “The problem of embedded eigenvalues for the Dirac equation in the Schwarzschild black hole metric”, *Universe*, **2**:4 (2016), 31, 14 pp., arXiv: 1701.03889.
- [18] Г. Бете, Э. Салпитер, *Квантовая механика с одним и двумя электронами*, Физматгиз, М., 1960.
- [19] V. P. Neznamov, “Impenetrable barriers for positrons in neighbourhood of superheavy nuclei with $Z > 118$ ”, *J. Phys.: Conf. Ser.*, **938** (2017), 012033.
- [20] В. П. Незнамов, И. И. Сафронов, “Стационарные решения уравнения второго порядка для точечных фермионов в гравитационном поле Шварцшильда”, *ЖЭТФ*, **154**:4(10) (2018), 761–773.
- [21] В. П. Незнамов, И. И. Сафронов, В. Е. Шемарулин, “Стационарные решения уравнения второго порядка для фермионов в пространстве-времени Райсснера–Нордстрёма”, *ЖЭТФ*, **154**:4(10) (2018), 802–825.
- [22] В. П. Незнамов, И. И. Сафронов, В. Е. Шемарулин, “Стационарные решения уравнения второго порядка для фермионов в пространстве-времени Керра–Ньюмена”, *ЖЭТФ*, 2019 (в печати).
- [23] C. L. Pekeris, K. Frankowski, “Solution of Dirac’s equation in Reissner–Nordstroem geometry”, *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*, **83**:7, 1978–1982.
- [24] G. T. Horowitz, D. Marolf, “Quantum probes of spacetime singularities”, *Phys. Rev. D*, **52**:10 (1995), 5670–5675.