Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Цыганов, О дискретизации гамильтоновых систем и теории пересечений, *ТМФ*, 2018, том 197, номер 3, 475–492

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf9575>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.164.48.24

26 апреля 2023 г., 13:44:09

© 2018 г.

А. В. Цыганов*

О ДИСКРЕТИЗАЦИИ ГАМИЛЬТОНОВЫХ СИСТЕМ И ТЕОРИИ ПЕРЕСЕЧЕНИЙ

Обсуждается возможность использования точек пересечения совместной поверхности уровня интегралов движения со вспомогательной кривой для построения конечно-разностных уравнений, отвечающих различным дискретизациям исходной интегрируемой системы. В качестве примера рассматривается обобщенный одномерный осциллятор с нелинейностью третьей и пятой степени, для которого показано, как дивизоры пересечения гиперэллиптической кривой с прямыми, квадраками и кубиками порождают семейства интегрируемых дискретных отображений.

Ключевые слова: конечномерные интегрируемые системы, дискретные интегрируемые отображения, теория пересечений.

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf9575>

1. ВВЕДЕНИЕ

Рассмотрим симплектическое многообразие M размерности $2n$ с координатами (q, p) и симплектической формой $\omega = \sum dp_j \wedge dq_j$. Функция Гамильтона $H(q, p)$ определяет уравнения Гамильтона

$$\frac{dq_j}{dt} = \{q_j, H\} = \frac{\partial H(q, p)}{\partial p_j}, \quad \frac{dp_j}{dt} = \{p_j, H\} = -\frac{\partial H(q, p)}{\partial q_j}, \quad j = 1, \dots, n,$$

стационарное уравнение Гамильтона–Якоби

$$H\left(q, \frac{\partial S}{\partial q}\right) = E$$

и гиперповерхность X , т.е. подмногообразие коразмерности 1 фазового пространства M , которое является поверхностью уровня функции Гамильтона $H(q, p) = E$.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 18-11-00032).

*Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, Россия.
E-mail: andrey.tsiganov@gmail.com

Решение уравнения Гамильтона–Якоби есть лагранжево многообразие L , лежащее на поверхности уровня X функции Гамильтона H . Связь между решениями уравнения Гамильтона–Якоби с решениями системы обыкновенных дифференциальных уравнений Гамильтона определяется принципом поглощения, согласно которому лагранжево многообразие L состоит из траекторий гамильтонова векторного поля $\mathbf{X}_H$, т. е. для любой точки $P \in L$ траектория векторного поля $\mathbf{X}_H$, проходящая через точку P , целиком принадлежит лагранжеву многообразию L (см. детальное обсуждение в [1], [2]).

Рассмотрим множество точек $P_1, P_2, \dots$ лагранжева многообразия L на гиперплоскости X и конечно-разностное уравнение, связывающее $\ell + m + 1$ точек:

$$\mathcal{Y}(P_{k-\ell}, \dots, P_k, \dots, P_{k+m}; k) = 0, \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (1.1)$$

Так как точки $P_{k-\ell}, \dots, P_{k+m}$ лежат на поверхности уровня функции Гамильтона H и отвечают частным решениями уравнений Гамильтона, то данное $(\ell + m + 1)$ -точечное отображение (1.1) должно сохранять гамильтониан H и скобки Пуассона, которые использовались для построения уравнений Гамильтона, с точностью до множителя, отвечающего замене времени $t \rightarrow \alpha t$.

Если X – это алгебраическая поверхность, то для построения конечно-разностных уравнений (1.1) можно использовать методы теории пересечений, которая является существенной частью современной алгебраической геометрии с обширным кругом приложений [3]–[6]. В рамках теории пересечений мы можем отождествить точки $P_{k-\ell}, \dots, P_{k+m}$ с точками пересечения гиперповерхности X с некоторой вспомогательной кривой Y и затем использовать дивизор пересечений X с Y для построения конечно-разностных уравнений вида (1.1).

В настоящей работе мы покажем, как можно использовать стандартные методы теории пересечений для построения конечно-разностных уравнений вида (1.1). В качестве наиболее простого примера мы рассмотрим одномерный случай $n = 1$, когда функция Гамильтона $H(p, q)$ определяет кривую уровня X на двумерной плоскости (см. обсуждение на с. 205 в [2]). Так как мы ограничимся теорией пересечений алгебраических кривых, то все приведенные ниже результаты могут быть извлечены из материалов классических учебников [7], [8]. Естественно, что эти же результаты можно получить, используя более современный математический язык теории пересечений [3]–[6].

Итак, пусть M – двумерное многообразие с координатами (q, p) и симплектической формой $\omega = dp \wedge dq$, а функция Гамильтона $H(q, p)$ порождает гиперэллиптическую кривую X первого ($g = 1$) или второго ($g = 2$) рода на проективной плоскости

$$X: \quad y^2 = a_{2g+2}x^{2g+2} + a_{2g+1}x^{2g+1} + \dots + a_1x + a_0, \quad a_j \in \mathbb{C}.$$

Здесь и далее мы используем обозначения x и y для координат на проективной плоскости и обозначения q и p для координат на симплектическом многообразии M .

2. ОСЦИЛЛЯТОР С КУБИЧЕСКОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ

Функция Гамильтона

$$H(q, p) = p^2 - a_4q^4 - a_3q^3 - a_2q^2 - a_1q \quad (2.1)$$

и канонические скобки Пуассона $\{q, p\} = 1$ между переменными q и p задают уравнение движения

$$\ddot{q} = 8a_4q^3 + 6a_3q^2 + 4a_2q + 2a_1 \quad (2.2)$$

для обобщенного осциллятора с кубической нелинейностью [9]. При $a_3 = a_1 = 0$ эта система называется осциллятором Дуффинга. Аналитические решения этого уравнения и его возможные двухточечные дискретизации при $\ell + m = 1$ в уравнение (1.1) обсуждаются, например, в работах [10]–[15].

Положим $H(q, p) = E$ и рассмотрим алгебраическую кривую X на проективной плоскости

$$X: \quad y^2 = f(x), \quad f(x) = a_4 x^4 + a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0, \quad (2.3)$$

где $E = a_0$. Частное решение уравнения (2.2) при каком-либо фиксированном значении времени $t = t_i$ мы будем отождествлять с точкой $P_i = (x_i, y_i)$ на плоскости с абсциссой $x_i = q(t_i)$ и ординатой $y_i = p(t_i)$.

Точка $P_i = (x_i, y_i)$ алгебраической кривой X на проективной плоскости, т. е. включая точку на бесконечности P_∞ , называется простым дивизором, а формальная сумма простых дивизоров

$$D = \sum m_i P_i, \quad m_i \in \mathbb{Z},$$

называется дивизором степени $\deg D = \sum m_i$. Дивизоры образуют аддитивную абелеву группу $\text{Div } X$ с групповой операцией

$$\sum m_i P_i + \sum n_i P_i = \sum (m_i + n_i) P_i.$$

Два дивизора $D, D' \in \text{Div } X$ линейно эквивалентны:

$$D \approx D',$$

если их разность $D - D'$ является главным дивизором,

$$D - D' = \text{div}(g) = 0 \quad \text{mod } \text{Prin } X,$$

т. е. дивизором некоторой рациональной функции g на алгебраической кривой. Главные дивизоры образуют подгруппу $\text{Prin } X$, а фактор-группа

$$\text{Pic } X = \frac{\text{Div } X}{\text{Prin } X}$$

называется группой Пикара или группой классов дивизоров, если X – неприводимая гладкая кривая. Кроме группы Пикара можно рассматривать схемы, стеки, циклы, кольца, а также проективные, рациональные, алгебраические и гомологические эквивалентности и различные операции, отвечающие этим эквивалентностям. Соответствующий математический язык можно использовать для единообразного описания отношений между точками и кривыми пересечения различных многообразий [3]–[6].

Конечно-разностное уравнение (1.1), отвечающее уравнению движения (2.2), можно рассматривать как некоторое отношение между простыми дивизорами гиперэллиптической кривой X (2.3) первого рода. Если ограничиться линейными отношениями, то конечно-разностные уравнения типа (1.1) могут быть построены с помощью дивизора пересечения кривой X со вспомогательной гладкой алгебраической кривой Y

$$\text{div}(X \cdot Y) = 0 \quad \text{mod } \text{Prin } X.$$

В общем случае эти уравнения имеют следующий вид:

$$\mathcal{Y}_k(P_{k-\ell}, \dots, P_k, \dots, P_{k+m}; k) = \sum_{i=k-\ell}^{k+m} n_i P_i + \sum_{j=1}^N n_j P_j^{(k)} = 0 \pmod{\text{Prin } X},$$

где $\ell + m + 1 + N$ – число точек пересечения X с Y , которое определяется с помощью теоремы Безу, а точки $P_j^{(k)}$ играют роль параметров дискретизации, неявно зависящих от k .

В данной работе мы ограничимся рассмотрением кривых Y вида

$$Y: \quad y = \mathcal{P}(x), \quad \mathcal{P}(x) = b_m x^m + \dots + b_0, \quad m = 1, 2, 3, \quad (2.4)$$

следуя основной работе Абеля [16] и несколькими его более поздним работам, результаты которых приведены в учебниках [7], [8].

2.1. Примеры дивизоров пересечения. Рассмотрим пересечение кривой X , заданной в (2.3), с параболой

$$Y: \quad y = \mathcal{P}(x), \quad \mathcal{P}(x) = b_2 x^2 + b_1 x + b_0.$$

Подставляя $y = \mathcal{P}(x)$ в уравнение (2.3), получим полином Абеля [16]

$$\psi(x) = \mathcal{P}(x)^2 - f(x).$$

Корни этого полинома являются абсциссами точек пересечения кривых X и Y , которые образуют дивизор пересечений четвертой степени $\deg(\text{div}(X \cdot Y)) = 4$.

Если $b_2 = \sqrt{a_4}$, то одна из точек пересечения находится на бесконечности (см. рис. 1). В этом случае полином Абеля $\psi(x)$ имеет вид

$$\begin{aligned} \psi(x) &= (2b_1 b_2 - a_3)x^3 + (2b_0 b_2 + b_1^2 - a_2)x^2 + (2b_0 b_1 - a_1)x + b_0^2 - a_0 = \\ &= (2b_1 b_2 - a_3)(x^3 - (x_1 + x_2 + x_3)x^2 + (x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3)x - x_1 x_2 x_3). \end{aligned}$$

Коэффициент при x^2 дает искомую связь между абсциссами точек пересечения:

$$x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{2b_0 b_2 + b_1^2 - a_2}{2b_1 b_2 - a_3}. \quad (2.5)$$

Если точки пересечения различны ($P_i \neq P_j$), то для определения уравнения кривой Y можно использовать любую пару точек, например P_1 и P_2 , и полиномиальную интерполяцию по Лагранжу

$$\mathcal{P}(x) = b_2 x^2 + b_1 x + b_0 = \sqrt{a_4}(x - x_1)(x - x_2) + \frac{(x - x_2)y_1}{x_1 - x_2} + \frac{(x - x_1)y_2}{x_2 - x_1}.$$

Подставляя коэффициенты b_2 , b_1 и b_0 этого полинома в уравнение (2.5), мы получим явное выражение для абсциссы x_3 третьей точки пересечения в виде рациональной функции от $x_{1,2}$ и $y_{1,2}$:

$$x_3 = -x_1 - x_2 + \phi(x_1, y_1, x_2, y_2), \quad \phi = -\frac{2b_0 b_2 + b_1^2 - a_2}{2b_1 b_2 - a_3}. \quad (2.6)$$

Рис. 1. Дивизоры пересечения кривой X (2.3) и параболы $Y: y = \sqrt{a_4}x^2 + b_1x + b_0$ при $(P_1 + P_2) + P_3 + P_\infty = 0$ (а) и $(2P_1) + P_2 + P_\infty = 0$ (б).

Если две точки совпадают, например, если $P_1 = P_3$ – двойная точка пересечения, то

$$x_2 = -2x_1 + \phi(x_1, y_1), \quad \phi = -\frac{2b_0b_2 + b_1^2 - a_2}{2b_1b_2 - a_3}, \quad (2.7)$$

где в определении ϕ используется полиномиальная интерполяция по Эрмиту

$$\mathcal{P}(x) = b_2x^2 + b_1x + b_0 = \sqrt{a_4}(x - x_1)^2 + \frac{(x - x_1)(4a_4x_1^3 + 3a_3x_1^2 + 2a_2x_1 + a_1)}{2y_1} + y_1.$$

Подставляя коэффициенты b_2, b_1 и b_0 этого полинома в уравнение (2.7), мы получим явное выражение для абсциссы x_2 второй точки пересечения в виде рациональной функции от координат двойной точки пересечения. Аналогичные формулы для случая $a_4 = 0$ приведены в [8], [17], [18].

С современной точки зрения мы рассматриваем здесь два разбиения дивизора пересечения кривых X и Y

$$\operatorname{div}(X \cdot Y) = (P_1 + P_2) + P_3 + P_\infty \quad \text{и} \quad \operatorname{div}(X \cdot Y) = (2P_1) + P_2 + P_\infty.$$

Здесь и далее мы скобками выделяем часть дивизора пересечений, которая используется для полиномиальной интерполяции уравнения вспомогательной кривой Y . Так как дивизор пересечения равен нулю,

$$\operatorname{div}(X \cdot Y) = 0,$$

то эти разбиения можно переписать в виде сложения и удвоения простых дивизоров:

$$-P_3 = P_1 + P_2, \quad -P_2 = 2P_1,$$

где для инверсии дивизоров используется стандартная инверсия $(x, y) \rightarrow (x, -y)$ точек гиперэллиптической кривой (см. рис. 1). В криптографии на эллиптических кривых для сложения и умножения дивизоров вместо явных формул типа (2.6) и (2.7) используются специальные алгоритмы, адаптированные для эффективных вычислений над конечным полем [17].

Если $b_2 \neq \sqrt{a_4}$, то полином Абеля имеет вид

$$\psi(x) = \mathcal{P}(x)^2 - f(x) = (b_2^2 - a_4)(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4).$$

Рис. 2. Дивизоры пересечения кривой X (2.3) и параболы $Y: y = b_2x^2 + b_1x + b_0$ при $(P_1 + P_2 + P_3) + P_4 = 0$ (а), $(2P_1 + P_2) + P_3 = 0$ (б) и $(3P_1) + P_2 = 0$ (в).

В этом случае дивизор пересечений состоит из четырех рациональных точек $P_i \neq P_\infty$ с учетом их кратности. Мы ограничимся рассмотрением следующих разбиений этого дивизора:

$$\operatorname{div}(X \cdot Y) = (P_1 + P_2 + P_3) + P_4, \quad \operatorname{div}(X \cdot Y) = (2P_1 + P_2) + P_3, \quad \operatorname{div}(X \cdot Y) = (3P_1) + P_2,$$

так как для интерполяции полинома второй степени $\mathcal{P}(x)$ требуется или три одинарных точки, или одна двойная и одна одинарная точка, или одна тройная точка пересечения (см. рис. 2).

В первом случае

$$x_4 = -x_1 - x_2 - x_3 + \varphi(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3), \quad \varphi = -\frac{a_3 - 2b_1b_2}{a_4 - b_2^2}, \quad (2.8)$$

где функция φ от x_1, x_2, x_3 и y_1, y_2, y_3 определяется через коэффициенты полинома

$$\mathcal{P}(x) = \frac{(x - x_2)(x - x_3)y_1}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)} + \frac{(x - x_1)(x - x_3)y_2}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)} + \frac{(x - x_1)(x - x_2)y_3}{(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)}, \quad (2.9)$$

полученного с помощью интерполяции по Лагранжу.

Во втором случае абсцисса третьей точки пересечения равна

$$x_3 = -2x_1 - x_2 + \varphi(x_1, x_2, y_1, y_2), \quad \varphi = -\frac{a_3 - 2b_1b_2}{a_4 - b_2^2}.$$

Здесь функция φ зависит от x_1, x_2 и y_1, y_2 и определяется с помощью интерполяционного полинома Эрмита

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(x) = & \frac{(x - x_1)^2 y_2 - (x - 2x_1 + x_2)(x - x_2)y_1}{(x_1 - x_2)^2} + \\ & + \frac{(x - x_1)(x - x_2)(4a_4x_1^3 + 3a_3x_1^2 + 2a_2x_1 + a_1)}{2y_1(x_1 - x_2)}. \end{aligned}$$

В третьем случае, т.е. при умножении дивизора P_1 на 3, $(x_2, y_2) = 3(x_1, y_1)$, абсцисса второй точки пересечения равна

$$x_2 = -3x_1 + \varphi(x_1, y_1), \quad \varphi = -\frac{a_3 - 2b_1b_2}{a_4 - b_2^2}, \quad (2.10)$$

где φ определяется с помощью интерполяционного полинома Эрмита

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(x) = b_2x^2 + b_1x + b_0 = & -\frac{(x-x_1)^2(4a_4x_1^3 + 3a_3x_1^2 + 2a_2x_1 + a_1)^2}{8y_1^3} + \\ & + \frac{(x-x_1)\left(x(6a_4x_1^2 + 3a_3x_1 + a_2) - 2a_4x_1^3 + a_2x_1 + a_1\right)}{2y_1} + y_1. \end{aligned}$$

При $b_2 = 0$ мы можем рассмотреть дивизор пересечения кривой X с прямой Y , который представим в следующем виде:

$$\operatorname{div}(X \cdot Y) = (P_1 + P_2) + P_3 + P_4.$$

Если прямая Y определяется по первым двум точкам,

$$\mathcal{P}(x) = b_1x + b_0 = \frac{x-x_2}{x_1-x_2}y_1 + \frac{x-x_1}{x_2-x_1}y_2,$$

то абсциссы двух остальных точек пересечения являются корнями полинома второго порядка

$$\frac{\psi(x)}{(x-x_1)(x-x_2)} = a_4x^2 + (a_4(x_1+x_2) + a_3)x + a_4(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2) + a_3(x_1+x_2) + a_2 - b_1^2,$$

т. е. алгебраическими функциями от $x_{1,2}$ и $y_{1,2}$,

$$x_{3,4} = -\frac{x_1}{2} - \frac{x_2}{2} - \frac{a_3}{2a_4} \pm \frac{\sqrt{\alpha(x_1, x_2, y_1, y_2)}}{2a_4}, \quad (2.11)$$

где

$$\begin{aligned} \alpha(x_1, x_2, y_1, y_2) = \\ = \frac{4a_4(y_1 - y_2)^2}{(x_1 - x_2)^2} - 4a_2a_4 + a_3^2 - 2a_4a_3(x_1 + x_2) - a_4^2(3x_1^2 + 2x_1x_2 + 3x_2^2). \end{aligned} \quad (2.12)$$

В общем случае дивизор пересечений гиперэллиптической кривой X с кривой вида

$$Y: \quad y = b_mx^m + b_{m-1}x^{m-1} + \dots + b_0, \quad m > 2,$$

состоит из $2m$ точек пересечения с учетом их кратности, и именно такие дивизоры широко используются в различных современных секретных системах [17]. Например, в криптографической системе, связанной с биткоинами, умножение простого дивизора на целое число N , $(x_2, y_2) = N(x_1, y_1)$, определяет публичный ключ (x_2, y_2) , который используется для проведения и проверки различных операций в технологии блокчейн.

Все формулы данного раздела хорошо известны и могут быть легко получены с помощью достаточно простых вычислений, основанных на идеях Абеля и их геометрической интерпретации, предложенной Клебшем (см. исторические комментарии в [6]). Современную теорию пересечений [3], [4] можно использовать для единого и общего описания всех рассмотренных выше частных случаев пересечения двух алгебраических кривых X и Y , а также для описания возможных пересечений двух или нескольких более сложных алгебраических многообразий.

2.2. Примеры конечно-разностных уравнений. Для построения конечно-разностных уравнений мы будем отождествлять координаты точек пересечения X и Y со значениями частных решений уравнений Гамильтона

$$\dot{q} = 2p, \quad \dot{p} = 4a_4q^3 + 3a_3q^2 + 2a_2q + a_1$$

при $t = t_i$. Здесь индекс i можно рассматривать либо как независимую переменную, принимающую целые значения, либо как номер сдвига по времени $t_i = t_0 + ih$, где t_0 – начальное значение, а h – шаг дискретизации (см. подробное обсуждение в [15], [19]–[23]).

Например, подставляя

$$x_1 = q_1, \quad y_1 = p_1, \quad x_2 = q_2, \quad y_2 = p_2, \quad x_3 = q_3, \quad y_3 = p_3$$

в уравнения (2.5) и $y_3 = -\mathcal{P}(x_3)$, получим два конечно-разностных уравнения вида (1.1)

$$\begin{aligned} q_1 + q_2 + q_3 &= \phi(q_1, p_1, q_2, p_2), \\ \sqrt{a_4}(q_1 - q_2)(q_2 - q_3)(q_3 - q_2) &= q_3(p_1 - p_2) + p_3(q_1 - q_2) + q_1p_2 - q_2p_1, \end{aligned} \quad (2.13)$$

где $\phi = \phi_1/\phi_2$ – рациональная функция от q_1, p_1, q_2, p_2 :

$$\begin{aligned} \phi_1 &= a_2 - a_4(q_1^2 + 4q_1q_2 + q_2^2) + \frac{2\sqrt{a_4}(q_1p_1 - 2(q_1p_2 - q_2p_1) - q_2p_2)}{q_1 - q_2} - \frac{(p_1 - p_2)^2}{(q_1 - q_2)^2}, \\ \phi_2 &= 2\sqrt{a_4}\left(\frac{p_1 - p_2}{q_1 - q_2} - \sqrt{a_4}(q_1 + q_2)\right) - a_3. \end{aligned}$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Уравнения (2.13) задают трехточечное отображение

$$\begin{pmatrix} q_1, q_2 \\ p_1, p_2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} q_3 \\ p_3 \end{pmatrix},$$

которое сохраняет форму функции Гамильтона и канонических скобок Пуассона, т. е. если положить $\{q_1, p_1\} = 1$, $\{q_2, p_2\} = 1$, то из (2.13) следует, что $\{q_3, p_3\} = 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО состоит в прямой проверке данных утверждений.

Для построения рекуррентных цепочек отображений часть абсцисс точек пересечения можно отождествить с параметрами дискретизации:

$$x_i = \lambda_{ik}, \quad y_i = \mu_{ik} = \pm\sqrt{f(\lambda_{ik})}, \quad \lambda_{ik} \in \mathbb{C}.$$

В этом случае конечно-разностные уравнения

$$\mathcal{Y}_k(q_{k-\ell}, p_{k-\ell}, \dots, q_{k+m}, p_{k+m}; \lambda_{1,k}, \dots, \lambda_{j,k}) = 0$$

неявно зависят от k через параметры λ_{ik} . Например, сложение простых дивизоров $P_3 = P_1 + P_2$ при $x_1 = q_k$, $y_1 = p_k$, $x_3 = q_{k+1}$, $y_3 = p_{k+1}$ и $x_2 = \lambda_k$, $y_2 = \mu_k$ порождает цепочку двухточечных обратимых отображений

$$q_{k+1} = -q_k - \lambda_k + \phi(q_k, \lambda_k), \quad p_{k+1} = -(b_2q_{k+1}^2 - b_1q_{k+1} - b_0), \quad (2.14)$$

где величина ϕ приведена в (2.6), а

$$b_2 = \sqrt{a_4}, \quad b_1 = -\sqrt{a_4}(q_k + \lambda_k) + \frac{q_k - \mu_k}{q_k - \lambda_k}, \quad b_0 = \sqrt{a_4}q_k\lambda_k + \frac{q_k\mu_k - \lambda_k p_k}{q_k - \lambda_k}.$$

Абсцисса $x_2 = \lambda_k$ точки P_2 — это произвольное число, в то время как ее ордината

$$\mu_k = \pm \sqrt{a_4\lambda_k^4 + a_3\lambda_k^3 + a_2\lambda_k^2 + a_1\lambda_k + H}, \quad H = p_k^2 - a_4q_k^4 - a_3q_k^3 - a_2q_k^2 - a_1q_k,$$

является функцией на фазовом пространстве M , и это надо учитывать при вычислении скобок Пуассона между переменными q_{k+1} и p_{k+1} , полученными из переменных q_k и p_k .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Уравнения (2.14) порождают рекуррентную последовательность обратимых отображений

$$\cdots \xrightarrow{\lambda_{k-2}} \begin{pmatrix} q_{k-1} \\ p_{k-1} \end{pmatrix} \xrightarrow{\lambda_{k-1}} \begin{pmatrix} q_k \\ p_k \end{pmatrix} \xrightarrow{\lambda_k} \begin{pmatrix} q_{k+1} \\ p_{k+1} \end{pmatrix} \xrightarrow{\lambda_{k+1}} \cdots,$$

сохраняющих не только гамильтониан

$$\begin{aligned} H &= p_{k-1}^2 - a_4q_{k-1}^4 - a_3q_{k-2}^3 - a_2q_{k-1}^2 - a_1q_{k-1} = \\ &= p_k^2 - a_4q_k^4 - a_3q_k^3 - a_2q_k^2 - a_1q_k = \\ &= p_{k+1}^2 - a_4q_{k+1}^4 - a_3q_{k+2}^3 - a_2q_{k+1}^2 - a_1q_{k+1} = \cdots, \end{aligned} \quad (2.15)$$

но и скобки Пуассона, т.е. из $\{q_k, p_k\} = 1$ и определения (2.14) следует, что $\{q_{k+1}, p_{k+1}\} = 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО состоит в прямой проверке данных утверждений.

Аналогичным образом, подставляя $x_1 = q_k$, $y_1 = p_k$, $x_2 = q_{k+1}$, $y_2 = p_{k+1}$ в соотношения (2.7) и (2.10), описывающие умножение простого дивизора $(x_2, y_2) = N(x_1, y_1)$ при $N = 2, 3$, мы получим конечно-разностные уравнения вида

$$q_{k+1} = -q_k + \phi(q_k), \quad p_{k+1} = -(b_2q_{k+1}^2 - b_1q_{k+1} - b_0),$$

в которых коэффициенты b_i полинома $\mathcal{P}(x)$ определяются с помощью интерполяции по Эрмиту в двойной или тройной точке пересечения соответственно.

Выпишем эти уравнения явно при $a_3 = a_1 = 0$, т.е. для кубического осциллятора Дуффинга:

$$\begin{aligned} N = 2, \quad q_{k+1} &= \frac{p_k^2 - 2a_4q_k^4 - a_2q_k^2}{2\sqrt{a_4}q_kp_k}, \\ p_{k+1} &= \frac{q_k^4(2a_4q_k^2 + a_2)^2 - (4a_4q_k^4 + p_k^2)p_k^2}{4\sqrt{a_4}q_k^2p_k^2}, \\ N = 3, \quad q_{k+1} &= q_k + \frac{4q_kp_k^2(2a_4q_k^4 + a_2q_k^2 - p_k^2)}{4a_4^2q_k^8 + 4a_2a_4q_k^6 + a_2^2q_k^4 - 8a_4q_k^4p_k^2 - 2a_2q_k^2p_k^2 + p_k^4}, \\ p_{k+1} &= -p_k + \frac{(q_k - q_{k+1})(a_2(q_{k+1} + q_k) + 2a_4q_k^2(3q_{k+1} - q_k))}{2p_k} + \\ &\quad + \frac{q_k^2(q_k - q_{k+1})^2(2a_4q_k^2 + a_2)^2}{2p_k^3}. \end{aligned} \quad (2.16)$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Уравнения (2.16) порождают рекуррентную последовательность отображений

$$\cdots \xrightarrow{N} \begin{pmatrix} q_{k-1} \\ p_{k-1} \end{pmatrix} \xrightarrow{N} \begin{pmatrix} q_k \\ p_k \end{pmatrix} \xrightarrow{N} \begin{pmatrix} q_{k+1} \\ p_{k+1} \end{pmatrix} \xrightarrow{N} \cdots,$$

которую можно рассматривать как аналог геометрической прогрессии. Эти отображения сохраняют гамильтониан H (2.15) и являются каноническими преобразованиями валентности N , т. е. из $\{q_k, p_k\} = 1$ и определения (2.16) следует, что $\{q_{k+1}, p_{k+1}\} = N$.

Рассмотрим теперь более интересный случай с $\ell + m > 1$ в конечно-разностных уравнениях (1.1). Возьмем дивизор пересечений

$$\operatorname{div}(X \cdot Y) = (P_1 + P_2 + P_3) + P_4,$$

изображенный на рис. 2а. Если координаты всех точек пересечения отождествить с частными решениями уравнений Гамильтона, то уравнения (2.8) и $y_4 = -\mathcal{P}(x_4)$ порождают четырехточечное отображение

$$\begin{pmatrix} q_1, q_2, q_3 \\ p_1, p_2, p_3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} q_4 \\ p_4 \end{pmatrix},$$

обладающее искомыми свойствами.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. Отображение

$$q_4 = -q_1 - q_2 - q_3 + \varphi(q_1, q_2, q_3, p_1, p_2, p_3), \quad p_4 = -(b_2 q_4^2 - b_1 q_4 - b_0),$$

где φ и b_k заданы соотношениями (2.8), (2.9), сохраняет и форму функции Гамильтона, и канонические скобки Пуассона.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО состоит в непосредственной проверке.

Для построения цепочки отображений одну из точек пересечения отождествим с параметром дискретизации на k -м шаге, т. е. положим $x_1 = q_{k-1}$, $y_1 = p_{k-1}$, $x_2 = q_k$, $y_2 = p_k$, $x_4 = q_{k+1}$, $y_4 = -p_{k+1}$ и $x_3 = \lambda_k$, $y_3 = \mu_k$ в уравнении (2.8). В результате получим конечно-разностное уравнение вида (1.1) с $\ell + m = 2$ или трехточечное отображение

$$\begin{aligned} q_{k+1} &= -q_{k-1} - q_k - \lambda_k + \varphi(q_{k-1}, q_k, \lambda_k, p_{k-1}, p_k, \mu_k), \\ p_{k+1} &= -(b_2 q_{k+1}^2 - b_1 q_{k+1} - b_0), \end{aligned} \quad (2.17)$$

которое связывает три значения частного решения уравнений движения. Входящая в определение (2.17) рациональная функция φ находится из (2.8), (2.9), и мы не будем выписывать ее явно.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. Уравнения (2.17) порождают рекуррентную последовательность отображений

$$\cdots, \quad \begin{pmatrix} q_{k-1}, q_k \\ p_{k-1}, p_k \end{pmatrix} \xrightarrow{\lambda_k} \begin{pmatrix} q_{k+1} \\ p_{k+1} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} q_k, q_{k+1} \\ p_k, p_{k+1} \end{pmatrix} \xrightarrow{\lambda_{k+1}} \begin{pmatrix} q_{k+2} \\ p_{k+2} \end{pmatrix}, \quad \cdots,$$

которые сохраняют и выражение для функции Гамильтона H , и скобку Пуассона, но не являются обратимыми.

При вычислении скобок Пуассона необходимо учитывать, что μ_k является функцией на фазовом пространстве, которая обладает нетривиальными скобками Пуассона с переменными q_1, p_1 и q_2, p_2 одновременно (см. обсуждение в [15], [19], [24]).

Для дивизора пересечений, изображенного на рис. 2б,

$$\operatorname{div}(X \cdot Y) = (2P_1 + P_2) + P_3 = 0$$

валентность соответствующего канонического преобразования $(q_k, p_k) \rightarrow (q_{k+1}, p_{k+1})$ зависит от того, какую точку P_1 или P_2 мы выбираем в качестве частного решения уравнений движения, а какую – в качестве параметра.

В заключение рассмотрим дивизор пересечений гиперэллиптической кривой X первого рода с прямой линией Y . Подставляя $x_i = q_i$ и $y_i = p_i$ в уравнения (2.11) и $y_{3,4} = -\mathcal{P}(x_{3,4})$, получим конечно-разностные уравнения

$$q_{3,4} = -\frac{q_1}{2} - \frac{q_2}{2} - \frac{a_3}{2a_4} \pm \frac{\sqrt{\alpha(q_1, q_2, p_1, p_2)}}{2a_4}, \quad p_{3,4} = -\frac{q_{3,4} - q_2}{q_1 - q_2} p_1 - \frac{q_{3,4} - q_1}{q_2 - q_1} p_2, \quad (2.18)$$

где функция $\alpha(q_1, q_2, p_1, p_2)$ задается соотношением (2.12).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6. Уравнения (2.18) задают четырехточечное обратимое отображение

$$\begin{pmatrix} q_1, q_2 \\ p_1, p_2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} q_3, q_4 \\ p_3, p_4 \end{pmatrix},$$

сохраняющее и форму функции Гамильтона, и канонические скобки Пуассона.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО состоит в непосредственной проверке.

Построенные в данном разделе конечно-разностные уравнения отличаются от известных двухточечных дискретизаций осциллятора Дуффинга при $a_3 = a_1 = 0$, которые сохраняют не исходный гамильтониан H (2.1), (2.15), а его симметризованную дискретную версию

$$\tilde{H} = p_{n+1}^2 - a_4 q_n^2 q_{n+1}^2 - a_2 q_n q_{n+1}$$

(см. обсуждение дискретизаций стандартного типа в [10]–[15]).

3. ОСЦИЛЛЯТОР С НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ ПЯТОЙ СТЕПЕНИ

Функция Гамильтона

$$H(q, p) = p^2 - a_6 q^6 - a_5 q^5 - a_4 q^4 - a_3 q^3 - a_2 q^2 - a_1 q \quad (3.1)$$

и каноническая скобка Пуассона для переменных q и p определяют уравнения Гамильтона

$$\dot{q} = \{q, H\} = 2p, \quad \dot{p} = \{p, H\} = 6a_6 q^5 + 5a_5 q^4 + 4a_4 q^3 + 3a_3 q^2 + 2a_2 q + a_1 \quad (3.2)$$

и соответствующее уравнение Ньютона

$$\ddot{q} = 12a_6 q^5 + 10a_5 q^4 + 8a_4 q^3 + 6a_3 q^2 + 4a_2 q + 2a_1. \quad (3.3)$$

При $a_5 = a_3 = a_1 = 0$ эта система называется осциллятором Дуффинга с нелинейностью пятой и третьей степени, который используется для моделирования различных нелинейных явлений в физике, биологии и медицине [9], [25].

Рассмотрим поверхность уровня функции Гамильтона $H = E$, т. е. гиперэллиптическую кривую X второго рода на проективной плоскости

$$X: \quad y^2 = f(x), \quad f(x) = a_6x^6 + a_5x^5 + a_4x^3 + a_3x^2 + a_2x^2 + a_1x + a_0, \quad (3.4)$$

где $E = a_0$. Первое из уравнений Гамильтона (3.2) определяет задачу Якоби об обращении отображения Абеля на этой гиперэллиптической кривой X

$$\frac{dq}{p} = 2dt \implies \int^q \frac{dx}{\sqrt{f(x)}} = 2t. \quad (3.5)$$

Это одна из самых простых интегрируемых систем, для которой род гиперэллиптической кривой $g = 2$ больше числа степеней свободы $n = 1$.

Решение задачи Якоби для уравнения (3.5), т. е. при $n < g$, обсуждается в работе [26] на примере двойного маятника. Для осциллятора Дуффинга при $a_5 = a_3 = a_1 = 0$ кривая X становится биэллиптической, поэтому интегрирование существенно упрощается. Обсуждение соответствующих методов явного и численного интегрирования может быть найдено в работе [25].

3.1. Два примера дивизоров пересечения. Рассмотрим пересечение гиперэллиптической кривой X (3.4) с кубикой

$$Y: \quad y = \mathcal{P}(x), \quad \mathcal{P}(x) = b_3x^3 + b_2x^2 + b_1x + b_0.$$

Подставляя $y = \mathcal{P}(x)$ в уравнение гиперэллиптической кривой X , получим полином Абеля $\psi(x)$, корни которого являются абсциссами точек пересечения кривых X и Y , которые образуют дивизор пересечений шестой степени,

$$\deg \operatorname{div}(X \cdot Y) = 6.$$

На рис. 3а изображен дивизор пересечений, у которого две точки пересечения находятся на бесконечности,

$$\operatorname{div}(X \cdot Y) = (P_1 + P_2) + P_3 + P_4 + 2P_\infty = 0,$$

а на рис. 3б – дивизор с шестью конечными точками пересечений

$$\operatorname{div}(X \cdot Y) = (P_1 + P_2 + P_3 + P_4) + P_5 + P_6 = 0.$$

Скобками мы выделили ту часть дивизора, которая необходима для интерполяции кубического полинома $\mathcal{P}(x)$. Далее мы ограничимся рассмотрением только этих двух дивизоров.

В первом случае старшие коэффициенты в определении кривой Y фиксированы:

$$a_6 = b_3^2, \quad a_5 = 2b_2b_3,$$

Рис. 3. Дивизоры пересечения кривой X (3.4) и кубики $Y: y = b_3x^3 + b_2x^2 + b_1x + b_0$ при $(P_1 + P_2) + P_3 + P_4 + 2P_\infty = 0$ (а) и $(P_1 + P_2 + P_3 + P_4) + P_5 + P_6 = 0$ (б).

а полином Абеля $\psi(x) = \mathcal{P}(x)^2 - f(x)$ имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \psi &= (2b_1b_3 + b_2^2 - a_4)x^4 + (2b_0b_3 + 2b_1b_2 - a_3)x^3 + \\ &\quad + (2b_0b_2 + b_1^2 - a_2)x^2 + (2b_0b_1 - a_1)x + b_0^2 - a_0 = \\ &= (2b_1b_3 + b_2^2 - a_4)(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4). \end{aligned}$$

Коэффициенты при x^3 и x^2 порождают стандартные соотношения [7], [8], [16] между абсциссами точек пересечения

$$\sum_{i=1}^4 x_i = -\frac{a_3 - 2b_3b_0 - 2b_2b_1}{a_4 - 2b_3b_1 - b_2^2}, \quad \sum_{i \neq j}^4 x_i x_j = \frac{a_2 - 2b_2b_0 - b_1^2}{a_4 - 2b_3b_1 - b_2^2}.$$

Решая эти уравнения относительно x_3 и x_4 , получим выражения для координат третьей и четвертой точек пересечения в виде функций от координат первых двух точек пересечения:

$$x_{3,4} = \sigma_{\pm}(x_1, x_2, y_1, y_2), \quad (3.6)$$

где

$$\begin{aligned} \sigma_{\pm} &= -\frac{x_1}{2} - \frac{x_2}{2} - \frac{a_3 - 2b_0b_3 - 2b_1b_2}{2(a_4 - 2b_1b_3 - b_2^2)} \pm \\ &\pm \frac{1}{2} \left(-3x_1^2 - 2x_1x_2 - 3x_2^2 - \frac{2(-2b_0b_3 - 2b_1b_2 + a_3)(x_1 + x_2) - 8b_0b_2 - 4b_1^2 + 4a_2}{a_4 - 2b_1b_3 - b_2^2} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{(a_3 - 2b_0b_3 - 2b_1b_2)^2}{(a_4 - 2b_1b_3 - b_2^2)^2} \right)^{1/2}, \end{aligned}$$

а b_3, b_2, b_1 и b_0 — это коэффициенты кубического полинома

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(x) &= \sqrt{a_6}(x - x_1)(x - x_2)(x + x_1 + x_2) + \\ &\quad + \frac{a_5}{2\sqrt{a_6}}(x - x_1)(x - x_2) + \frac{x - x_2}{x_1 - x_2}y_1 + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}y_2. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Во втором случае корни полинома Абеля

$$\psi(x) = \mathcal{P}(x)^2 - f(x) = (b_3^2 - a_6)(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4)(x - x_5)(x - x_6)$$

связаны соотношениями

$$\sum_{i=1}^6 x_i = -\frac{a_5 - 2b_3b_2}{a_6 - b_3^2}, \quad \sum_{i \neq j}^6 x_i x_j = \frac{a_4 - 2b_3b_1 - b_2^2}{a_6 - b_3^2},$$

в которые входят коэффициенты b_3, b_2, b_1 и b_0 кубического полинома

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(x) = & \frac{(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)y_1}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)(x_1-x_4)} + \frac{(x-x_1)(x-x_3)(x-x_4)y_2}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)(x_2-x_4)} + \\ & + \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_4)y_3}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)(x_3-x_4)} + \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)y_4}{(x_4-x_1)(x_4-x_2)(x_4-x_3)}, \end{aligned} \quad (3.8)$$

построенного с помощью полиномиальной интерполяции по Лагранжу [7], [8], [16]. Решая эти уравнения относительно x_5 и x_6 , получим

$$x_{5,6} = \tau_{\pm}(x_1, x_2, x_3, x_4, y_1, y_2, y_3, y_4), \quad (3.9)$$

где

$$\begin{aligned} \tau_{\pm}(x_1, x_2, x_3, x_4, y_1, y_2, y_3, y_4) = & \frac{1}{2} \left(\frac{2b_2b_3 - a_5}{a_6 - b_3^2} - \sum_{i=1}^4 x_i \right) \pm \\ & \pm \frac{1}{2} \left(- \sum_{i,j=1}^4 x_i x_j - 2 \sum_{i=1}^4 x_i^2 - \frac{2(a_5 - 2b_2b_3) \sum_{i=1}^4 x_i + 4a_4 - 8b_3b_1}{a_6 - b_3^2} + \right. \\ & \left. + \frac{a_5^2 - 4a_5b_2b_3 + 4a_6b_2^2}{(a_6 - b_3^2)^2} \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Эти стандартные соотношения между координатами точек пересечения можно использовать для построения конечно-разностных уравнений, связывающих решения уравнения движения (3.3).

3.2. Примеры конечно-разностных уравнений. Возьмем дивизор пересечений

$$\operatorname{div}(X \cdot Y) = (P_1 + P_2) + P_3 + P_4 + 2P_{\infty}$$

(см. рис. 3а) и подставим в соотношения (3.6), (3.7) частные решения уравнений Гамильтона (3.2) или параметры λ_{ik} вместо абсцисс и ординат точек пересечения. В результате получим обратимое четырехточечное отображение

$$\begin{pmatrix} q_1, q_2 \\ p_1, p_2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} q_3, q_4 \\ q_4, p_4 \end{pmatrix}, \quad q_{3,4} = \sigma_{\pm}(q_1, q_2, p_1, p_2), \quad p_{3,4} = -\mathcal{P}(q_{3,4}),$$

цепочку трехточечных отображений

$$\begin{pmatrix} q_k \\ p_k \end{pmatrix} \xrightarrow{\lambda_k} \begin{pmatrix} q_{k+1}, q_{k+2} \\ p_{k+1}, p_{k+2} \end{pmatrix}, \quad \begin{aligned} q_{k+1} &= \sigma_+(q_k, \lambda_k, p_k, \mu_k), & p_{k+1} &= -\mathcal{P}(q_{k+1}), \\ q_{k+2} &= \sigma_-(q_k, \lambda_k, p_k, \mu_k), & p_{k+2} &= -\mathcal{P}(q_{k+2}), \end{aligned}$$

и обратимое двухточечное отображение, зависящее от двух параметров,

$$\begin{pmatrix} q_k \\ p_k \end{pmatrix} \xleftrightarrow{\lambda_{1k}, \lambda_{2k}} \begin{pmatrix} q_{k+1} \\ p_{k+1} \end{pmatrix}, \quad \begin{aligned} q_k &= \sigma_+(\lambda_{1k}, \lambda_{2k}, \mu_{1k}, \mu_{2k}), & p_k &= -\mathcal{P}(q_k), \\ q_{k+1} &= \sigma_-(\lambda_{1k}, \lambda_{2k}, \mu_{1k}, \mu_{2k}), & p_{k+1} &= -\mathcal{P}(q_{k+1}). \end{aligned}$$

В последнем случае при вычислении q_k и p_k мы используем функции μ_{1k} и μ_{2k} от переменных q_{k+1} и p_{k+1} ,

$$\mu_{ik} = \pm \sqrt{p_{k+1}^2 + f(\lambda_{ik}) - f(q_{k+1})}, \quad \lambda_{ik} \in \mathbb{C},$$

а при вычислении q_{k+1} и p_{k+1} — функции от переменных q_k и p_k ,

$$\mu_{ik} = \pm \sqrt{p_k^2 + f(\lambda_{ik}) - f(q_k)},$$

где $f(x)$ — это полином, входящий в определение гиперэллиптической кривой X (3.4).

Построенные нами конечно-разностные уравнения или отображения связывают решения уравнений Гамильтона, лежащие на поверхности уровня исходной функции Гамильтона (3.1). Таким образом, эти отображения по определению должны сохранять форму дискретного гамильтониана

$$H = p_k^2 - a_6 q_k^6 - a_5 q_k^5 - a_4 q_k^4 - a_3 q_k^3 - a_2 q_k^2 - a_1 q_k \quad (3.10)$$

и скобки Пуассона, которые используются для построения уравнений Гамильтона. Непосредственные вычисления позволяют проверить, что все эти отображения действительно сохраняют форму H , а первое из них сохраняет и канонические скобки Пуассона. Во втором и третьем случаях непосредственная проверка сохранения скобок Пуассона проведена не была.

Для дивизора пересечений

$$\operatorname{div}(X \cdot Y) = (P_1 + P_2) + P_3 + P_4 + P_5 + P_6$$

(см. рис. 3б), используя соотношения (3.8), (3.9), можно построить шеститочечное отображение

$$\begin{pmatrix} q_1, q_2, q_3, q_4 \\ p_1, p_2, p_3, p_4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} q_5, q_6 \\ q_5, p_6 \end{pmatrix}, \quad q_{5,6} = \tau_{\pm}(q_1, q_2, q_3, q_4, p_1, p_2, p_3, p_4), \quad p_{5,6} = -\mathcal{P}(q_{5,6}),$$

которое сохраняет форму гамильтониана (3.10) и канонические скобки Пуассона, но не является обратимым. Сохранение формы H и канонических скобок Пуассона было проверено непосредственными вычислениями с помощью одной из современных систем компьютерной алгебры.

Заменяя часть переменных q_i на параметры λ_{ik} , мы получим пяти-, четырех-, трех- и двухточечные отображения, которые обладают различными свойствами. Например, четырехточечное отображение

$$\begin{pmatrix} q_{k-1}, q_k \\ q_{k-1}, p_k \end{pmatrix} \xrightarrow{\lambda_{1k}, \lambda_{2k}} \begin{pmatrix} q_{k+1}, q_{k+2} \\ p_{k+1}, p_{k+2} \end{pmatrix},$$

где

$$\begin{aligned} q_{k+1} &= \tau_+(q_{k-1}, q_k, \lambda_{1k}, \lambda_{2k}, p_{k-1}, p_k, \mu_{1k}, \mu_{2k}), & p_{k+1} &= -\mathcal{P}(q_{k+1}), \\ q_{k+2} &= \tau_-(q_{k-1}, q_k, \lambda_{1k}, \lambda_{2k}, p_{k-1}, p_k, \mu_{1k}, \mu_{2k}), & p_{k+2} &= -\mathcal{P}(q_{k+2}), \end{aligned}$$

является обратимым, тогда как остальные отображения необратимы. Явная проверка сохранения скобок Пуассона в этом случае является более сложной задачей, так как соответствующие отображения являются алгебраическими, а не рациональными в силу того, что ординаты точек пересечения μ_{ik} , отвечающие параметрам дискретизации λ_{ik} , являются алгебраическими функциями на фазовом пространстве.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе показано, как можно использовать методы классической теории пересечений для дискретизации уравнений движения одномерных гамильтоновых систем. Аналогичные методы применимы и в том случае, когда поверхность уровня интегралов движения X представима в виде произведения алгебраических кривых, которые могут быть получены либо методом разделения переменных, либо с помощью представления уравнений движения в форме уравнений Лакса.

Если для интегрируемой системы известно представление Лакса, то стандартным методом построения двухточечных отображений (1.1) с $\ell + m = 1$ является метод факторизации матричных полиномов [15], [19]–[23], тесно связанный с групповыми операциями на группе классов дивизоров [24]. Стандартные методы теории пересечений алгебраических кривых, восходящие к идеям Абеля и Клебша, позволяют построить более общие конечно-разностные уравнения (1.1) с $\ell + m > 1$.

В общем случае, когда поверхность уровня интегралов движения X не представима в виде произведения алгебраических кривых, но является алгебраической поверхностью, для построения конечно-разностных уравнений (1.1) мы по-прежнему можем использовать отношения между различными конфигурациями точек пересечения поверхности X и вспомогательной кривой Y , изучаемые в современной теории пересечений [3]–[7]. Именно это обстоятельство и является основной мотивацией для проведенных в настоящей работе исследований.

Множество конечно-разностных уравнений (1.1), отвечающих различным дивизорам пересечений поверхности уровня интегралов движения X и вспомогательной кривой Y , можно использовать для следующих целей:

- 1) построение интегрируемых дискретных отображений [15], [19]–[24];
- 2) изучение связей между различными интегрируемыми системами [27]–[29];
- 3) построение новых интегрируемых систем [18], [30]–[33];
- 4) интегрирование уравнений движения.

В последнем пункте речь идет о построении различных переменных разделения для одной и той же интегрируемой системы, что может упростить выражения для исходных физических переменных как функций времени. Например, для системы Стеклова–Ляпунова переменные разделения были построены Кёттером [34], который также нашел выражения для переменных разделения как функций времени. Однако исходные переменные выражаются через переменные разделения настолько сложно, что результаты Кёттера практически невозможно использовать для анализа движения, даже с помощью современных компьютерных технологий (см. обсуждение в работе [35]).

Другие переменные разделения для системы Стеклова–Ляпунова возникли в работе [36] как переменные Дарбу–Нийенхайса двух согласованных полиномиальных бигамильтоновых структур на алгебре $e^*(3)$. В этом случае исходные переменные достаточно просто выражаются через переменные разделения и это позволило, например, проинтегрировать в квадратурах обобщение системы Стеклова–Ляпунова, построенное Рубановским [37]. Используя системы компьютерной алгебры, можно доказать, что переменные Кёттера и переменные разделения из работы [36] связаны операцией удвоения дивизора на соответствующей гиперэллиптической кривой

второго рода. Таким образом, для системы Стеклова–Ляпунова использование стандартных операций над дивизорами позволяет найти более простые выражения для зависимости исходных переменных от времени.

Список литературы

- [1] В. И. Арнольд, *Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений*, Наука, М., 1978.
- [2] А. М. Виноградов, Б. А. Купершмидт, “Структура гамильтоновой механики”, *УМН*, **32:4**(196) (1977), 175–236.
- [3] D. Eisenbud, J. Harris, *3264 and All That. A Second Course in Algebraic Geometry*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2016.
- [4] W. Fulton, *Intersection Theory*, Springer, Berlin, 1984.
- [5] P. Griffiths, “The legacy of Abel in algebraic geometry”, *The Legacy of Niels Henrik Abel*, eds. O. A. Laudal, R. Pienе, Springer, Berlin, 2004, 179–205.
- [6] S. L. Kleiman, “The Picard scheme”, *Fundamental Algebraic Geometry*, Mathematical Surveys and Monographs, **123**, AMS, Providence, RI, 2005, 235–321.
- [7] H. F. Baker, *Abel’s Theorem and the Allied Theory of Theta Functions*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1897.
- [8] A. G. Greenhill, *The Applications of Elliptic Functions*, Macmillan and Co., London, 1892.
- [9] A. H. Nayfeh, D. T. Mook, *Nonlinear Oscillations*, John Wiley and Sons, New York, 1979.
- [10] C. Murakami, W. Murakami, K.-I. Hirose, Y. H. Ichikawa, “Integrable Duffing’s maps and solutions of the Duffing equation”, *Chaos, Solitons and Fractals*, **15:3** (2003), 425–443.
- [11] C. Murakami, W. Murakami, K.-I. Hirose, Y. H. Ichikawa, “Global periodic structure of integrable Duffing’s maps”, *Chaos, Solitons and Fractals*, **16:2** (2003), 233–244.
- [12] R. B. Potts, “Exact solution of a difference approximation to Duffing’s equation”, *J. Austral. Math. Soc. Ser. B*, **23:1** (1981), 64–77.
- [13] R. B. Potts, “Best difference equation approximation to Duffing’s equation”, *J. Austral. Math. Soc. Ser. B*, **23:4** (1982), 349–356.
- [14] Ю. Б. Сурис, “Об интегрируемых отображениях типа стандартного”, *Функц. анализ и его прил.*, **23:1** (1989), 84–85.
- [15] Yu. B. Suris, *The Problem of Integrable Discretization: Hamiltonian Approach*, Progress in Mathematics, **219**, Birkhäuser, Basel, 2003.
- [16] N. H. Abel, “Mémoire sur une propriété générale d’une class très étendue des fonctions transcendentes”, *Oeuvres complètes*, v. I, Grondahl and Son, Christiania, 1881, 145–211.
- [17] H. Cohen, G. Frey, R. Avanzi, C. Doche, T. Lange, K. Nguyen, F. Vercauteren (eds.), *Handbook of Elliptic and Hyperelliptic Curve Cryptography*, Chapman and Hall, London, 2006.
- [18] A. V. Tsiganov, “Bäcklund transformations and divisor doubling”, *J. Geom. Phys.*, **126** (2018), 148–158, arXiv: 1702.03642.
- [19] A. I. Bobenko, B. Lорbeer, Yu. B. Suris, “Integrable discretizations of the Euler top”, *J. Math. Phys.*, **39:12** (1998), 6668–6683.
- [20] P. Deift, L.-C. Li, “Poisson geometry of the analog of the Miura maps and Bäcklund–Darboux transformations for equations of Toda type and periodic Toda flows”, *Commun. Math. Phys.*, **143:1** (1991), 201–214.
- [21] J. Hietarinta, N. Joshi, F. W. Nijhoff, *Discrete Systems and Integrability*, Cambridge Texts in Applied Mathematics, **54**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2016.
- [22] V. B. Kuznetsov, P. Vanhaecke, “Bäcklund transformations for finite-dimensional integrable systems: a geometric approach”, *J. Geom. Phys.*, **44:1** (2002), 1–40, arXiv: nlin/0004003.
- [23] J. Moser, A. P. Veselov, “Discrete versions of some classical integrable systems and factorization of matrix polynomials”, *Commun. Math. Phys.*, **139:2** (1991), 217–243.

- [24] Yu. N. Fedorov, “Integrable flows and Bäcklund transformations on extended Stiefel varieties with application to the Euler top on the Lie group $SO(3)$ ”, *J. Nonlinear Math. Phys.*, **12**, suppl. 2 (2005), 77–94, arXiv: nlin/0505045.
- [25] A. Elías-Zúñiga, “Exact solution of the cubic-quintic Duffing oscillator”, *Appl. Math. Model.*, **37**:4 (2013), 2574–2579.
- [26] V. Z. Enolskii, M. Pronine, P. H. Richter, “Double pendulum and θ -divisor”, *J. Nonlinear Sci.*, **13**:2 (2003), 157–174.
- [27] A. V. Tsiganov, “Simultaneous separation for the Neumann and Chaplygin systems”, *Regul. Chaotic Dyn.*, **20**:1 (2015), 74–93.
- [28] A. V. Tsiganov, “On the Chaplygin system on the sphere with velocity dependent potential”, *J. Geom. Phys.*, **92** (2015), 94–99.
- [29] A. V. Tsiganov, “On auto and hetero Bäcklund transformations for the Hénon–Heiles systems”, *Phys. Lett. A*, **379**:45–46 (2015), 2903–2907, arXiv: 1501.06695.
- [30] A. V. Tsiganov, “Bäcklund transformations for the nonholonomic Veselova system”, *Regul. Chaotic Dyn.*, **22**:2 (2017), 163–179.
- [31] A. V. Tsiganov, “Integrable discretization and deformation of the nonholonomic Chaplygin ball”, *Regul. Chaotic Dyn.*, **22**:4 (2017), 353–367.
- [32] A. V. Tsiganov, “New bi-Hamiltonian systems on the plane”, *J. Math. Phys.*, **58**:6 (2017), 062901, 14 pp., arXiv: 1701.05716.
- [33] А. В. Цыганов, “Преобразования Беклунда для системы Якоби на эллипсоиде”, *ТМФ*, **192**:3 (2017), 473–488.
- [34] F. Kötter, “Die von Steklow und Liapunow entdeckten integralen Fälle, der Bewegung eines starren Körpers in einer Flüssigkeit”, *Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Berlin*, **6** (1900), 79–87.
- [35] Yu. Fedorov, I. Basak, “Separation of variables and explicit theta-function solution of the classical Steklov–Lyapunov systems: a geometric and algebraic geometric background”, *Regul. Chaotic Dyn.*, **16**:3–4 (2011), 374–395.
- [36] A. V. Tsiganov, “New variables of separation for the Steklov–Lyapunov system”, *SIGMA*, **8** (2012), 012, 14 pp.
- [37] В. Н. Рубановский, “Новые случаи интегрируемости уравнений движения тяжелого твердого тела в жидкости”, *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех.*, **23**:2 (1968), 99–106.

Поступила в редакцию 3.04.2018,
после доработки 30.05.2018