Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. Хаманака, Х. Окабе, Рассеяние солитонов в некоммутативных пространствах, *ТМФ*, 2018, том 197, номер 1, 68–88

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf9577>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 44.207.124.84

26 апреля 2023 г., 14:58:36

© 2018 г.

М. Хаманака*, Х. Окабе*

РАССЕЯНИЕ СОЛИТОНОВ В НЕКОММУТАТИВНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

Обсуждаются точные многосолитонные решения интегрируемых иерархий в некоммутативных пространствах-временах различной размерности. Решения записываются в компактном виде через квазидетерминанты. Изучаются процессы рассеяния солитонов в асимптотической области, где конфигурации могут быть вещественными. Обнаружено, что эти асимптотические конфигурации могут быть такими же, как в коммутативном случае, т. е. N -солитонное решение имеет N изолированных локализованных энергетических лампов, и каждый одиночный волновой пакет сохраняет свою форму и скорость в процессе рассеяния. Фазовые сдвиги такие же, как в коммутативном случае. В качестве новых результатов представлены многосолитонные решения некоммутативной антисамодуальной иерархии Янга–Миллса и подробный анализ двухсолитонного рассеяния.

Ключевые слова: солитон, интегрируемая система, некоммутативная геометрия.

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf9577>

1. ВВЕДЕНИЕ

Обобщение теории интегрируемых систем на некоммутативные пространства уже давно привлекает внимание многих исследователей как в математике, так и в физике. Недавний прорыв состоял в том, что точные многосолитонные решения некоммутативной иерархии КП строятся в терминах квазидетерминантов [1]. Квазидетерминанты впервые были введены в 1991 г. Гельфандом и Ретахом [2] в контексте некоммутативного обобщения теории матричных определителей. Установлено, что квазидетерминанты играют важную роль в построении точных решений некоммутативных интегрируемых систем (см., например, работы [3]–[16] и ссылки в них). Интересно, что квазидетерминанты позволяют упростить доказательства и в коммутативной теории.

Работа М. Хаманаки была поддержана фондом Grant-in-Aid for Scientific Research (грант № 16K05318).

*Graduate School of Mathematics, Nagoya University, Nagoya, Japan.
E-mail: hamanaka@math.nagoya-u.ac.jp, m13015z@math.nagoya-u.ac.jp

В течение последних нескольких лет интенсивно изучалось обобщение теории интегрируемых систем на некоммутативные пространства, которое можно реализовать с помощью звездочного произведения. Начиная с этого момента мы полагаем, что слово “некоммутативный” относится к обобщению на некоммутативные пространства, а не к неабелевым теориям и т. д. Для обзора интегрируемых систем в некоммутативных пространствах см., например, [17]–[23].

N -солитонные решения устойчивы в том смысле, что солитонная конфигурация имеет N локализованных энергетических лампов, при этом форма и скорость каждого локализованного лампа остаются неизменными в процессе рассеяния. Их существование тесно связано с существованием бесконечного набора сохраняющихся величин или бесконечномерной симметрии. Поэтому имеет смысл изучать устойчивость некоммутативной солитонной динамики. В формализме звездочного произведения пространственные и временные координаты и функции принимают комплексные значения, а динамику рассеяния можно определить явно. Однако исследований, посвященных этому вопросу, немного [24]–[26].

В настоящей статье мы изучаем точные многосолитонные решения некоммутативных интегрируемых иерархий и их асимптотическое поведение, когда асимптотические конфигурации вещественны. Мы концентрируем внимание на некоммутативных уравнениях Кортевега–де Фриза (КдФ), Кадомцева–Петвиашвили (КП) и антисамодуальных уравнениях Янга–Миллса (уравнениях АСДЯМ) в $(1+1)$, $(2+1)$ и четырех измерениях соответственно. Мы показываем, что асимптотическое поведение решений при рассеянии солитонов совпадает с коммутативным случаем, т. е. N -солитонное решение имеет N изолированных энергетических лампов, а каждый волновой пакет сохраняет свою форму и скорость в процессе рассеяния. Фазовый сдвиг также совпадает с коммутативным случаем. Анализ двухсолитонного рассеяния для некоммутативного уравнения АСДЯМ является новым. Решающую роль в наших исследованиях играют свойства квазидетерминантов и звездочного произведения.

Статья организована следующим образом. В разделе 2 мы приводим краткое введение в некоммутативную теорию поля в рамках формализма звездочного произведения. В разделе 3 мы даем краткий обзор теории квазидетерминантов. В разделе 4 определяется некоммутативная интегрируемая иерархия и с использованием квазидетерминантов строятся точные многосолитонные решения. Далее обсуждается асимптотическое поведение некоммутативных солитонов КдФ и КП в формализме звездочного произведения [12]. В разделе 5 определена некоммутативная иерархия уравнений АСДЯМ и выписаны ее точные решения в терминах квазидетерминантов. Обсуждается асимптотическое поведение двухсолитонных решений. Этот раздел содержит новые результаты.

2. ИНТЕГРИРУЕМЫЕ УРАВНЕНИЯ В НЕКОММУТАТИВНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

Некоммутативные пространства определяются условием некоммутативности координат:

$$[x^\mu, x^\nu] = i\theta^{\mu\nu}, \quad (2.1)$$

где постоянная $\theta^{\mu\nu}$ называется параметром некоммутативности. Если координаты вещественные, параметры некоммутативности должны быть вещественными вследствие эрмитовости координат. Отметим, что параметр некоммутативности $\theta^{\mu\nu}$ антисимметричен по отношению к взаимной замене μ и ν , откуда следует, что он

имеет четный ранг. В $(1+1)$ -измерениях с координатами (t, x) существует единственный выбор условия некоммутативности $[x, t] = i\theta$, который представляет пространственно-временную некоммутативность. В $(2+1)$ -измерениях с координатами (t, x, y) имеется по существу два способа выбора условия некоммутативности, а именно некоммутативность двух пространственных координат $[x, y] = i\theta$ и пространственно-временная некоммутативность $[x, t] = i\theta$ или $[y, t] = i\theta$.

Некоммутативные теории поля задаются заменой обычных произведений в коммутативных теориях поля звездочными произведениями. Звездочное произведение определяется для обычных полей. В плоских пространствах оно имеет следующий явный вид:

$$\begin{aligned} (f \star g)(x) &:= \exp\left(\frac{i}{2}\theta^{\mu\nu}\partial_\mu^{(x_1)}\partial_\nu^{(x_2)}\right)f(x_1)g(x_2)|_{x_1=x_2=x} = \\ &= f(x)g(x) + \frac{i}{2}\theta^{\mu\nu}\partial_\mu f(x)\partial_\nu g(x) + \mathcal{O}(\theta^2), \end{aligned} \quad (2.2)$$

где $\partial_\mu^{(x)} := \partial/\partial x^\mu$. Это произведение известно как произведение Мойала [27]. Упорядочение полей в нелинейных членах определяется так, что сохраняются некоторые структуры, например калибровочные симметрии.

Звездочное произведение обладает свойством ассоциативности $f \star (g \star h) = (f \star g) \star h$ и сводится к обычному произведению в коммутативном пределе $\theta^{\mu\nu} \rightarrow 0$. В этом смысле некоммутативные теории поля представляют собой деформацию коммутативных. Замена произведения делает обычные пространственные координаты “некоммутативными”, т. е. $[x^\mu, x^\nu]_\star := x^\mu \star x^\nu - x^\nu \star x^\mu = i\theta^{\mu\nu}$. Заметим что сами поля принимают комплексные значения, а их дифференцирование и интегрирование проводятся так же, как в коммутативном случае.

Приведем список некоммутативных интегрируемых уравнений. Временная и пространственные координаты обозначаются как t и x, y .

- В $(1+1)$ измерениях мы имеем:
 - некоммутативное уравнение КдФ

$$\dot{u} = \frac{1}{4}u''' + \frac{3}{4}(u' \star u + u \star u'), \quad (2.3)$$

где $\dot{u} := \partial f/\partial t$, $u' := \partial f/\partial x$, $u'' := \partial^2 f/\partial x^2$ и т. д.; двухсолитонная динамика для этого уравнения обсуждалась в работе [24];

- некоммутативное уравнение Буссинеска

$$3\dot{u} + u'''' + 2(u \star u)'' - 2[u, \partial_x^{-1} \dot{u}]'_\star = 0; \quad (2.4)$$

- некоммутативное нелинейное уравнение Шредингера

$$i\dot{\psi} = \psi'' - 2\varepsilon\psi \star \bar{\psi} \star \psi. \quad (2.5)$$

- некоммутативное модифицированное уравнение КдФ

$$\dot{v} = \frac{1}{4}v''' - \frac{3}{4}(v \star v \star v' + v' \star v \star v), \quad (2.6)$$

которое связано с некоммутативным уравнением КдФ некоммутативным отображением Миуры $u = v' - v^2$ [24];

– некоммутативное уравнение Бюргерса

$$\dot{u} = u'' + 2u \star u' \quad \text{или} \quad \dot{u} = u'' - 2u' \star u, \quad (2.7)$$

которое можно линеаризовать путем использования некоммутативного преобразования Коула–Хопфа $u = \psi^{-1} \star \psi_x$ или $u = -\psi_x \star \psi^{-1}$ (см., например, работу [28]); динамика двух ударных волн для этого уравнения обсуждалась в [25].

• В $(2 + 1)$ измерениях мы имеем:

– некоммутативное уравнение КП

$$u_t = \frac{1}{4}u_{xxx} + \frac{3}{4}(u_x \star u + u \star u_x) + \partial_x^{-1}u_{yy} - [u, \partial_x^{-1}u_y]_\star, \quad (2.8)$$

где нижними индексами обозначены частные производные и $\partial_x^{-1}f(x) = \int^x dx' f(x')$, это уравнение сводится к $(1 + 1)$ -мерному уравнению КдФ, если $\partial_y = 0$; двухсолитонная динамика для этого уравнения детально обсуждалась в работе [26];

– некоммутативная система уравнений Захарова [29]

$$i\psi_t = \psi_{xy} - \varepsilon\psi \star \partial_x^{-1}\partial_y(\bar{\psi} \star \psi) - \varepsilon\partial_x^{-1}\partial_y(\psi \star \bar{\psi}) \star \psi, \quad (2.9)$$

где $\varepsilon = \pm 1$, которая сводится к некоммутативному $(1 + 1)$ -мерному нелинейному уравнению Шредингера при $x = y$;

– некоммутативное уравнение Богоявленского–Калоджеро–Шиффа [30]

$$4u_t = u_{xxy} + 2(u \star u)_y + (u_y \star \partial_x^{-1}u + \partial_x^{-1}u \star u_y) + \partial_x^{-1}[u, \partial_x^{-1}[u, \partial_x^{-1}u_y]_\star]_\star, \quad (2.10)$$

которое сводится к некоммутативному уравнению КдФ при $x = y$;

– некоммутативное уравнение Дэви–Стюардсона [31]

$$\begin{aligned} 2iq_t &= (\partial_x^2 - \partial_y^2)q + R_1 \star q - q \star R_2, \\ 2ir_t &= -(\partial_x^2 - \partial_y^2)r + R_2 \star r - r \star R_1, \end{aligned} \quad (2.11)$$

где $(\partial_x - i\partial_y)R_1 = -(\partial_x + i\partial_y)(q \star r)$, $(\partial_x + i\partial_y)R_2 = (\partial_x - i\partial_y)(r \star q)$, которое сводится к некоммутативному $(1 + 1)$ -мерному нелинейному уравнению Шредингера, если $\partial_y = 0$ и $R_1 = -q \star r$, $R_2 = r \star q$, $q = \psi$, $r = \bar{\psi}$.

• В случае четырех измерений имеется одно важное интегрируемое уравнение: уравнение АСДЯМ

$$F_{zw}^\star = 0, \quad F_{\bar{z}\bar{w}}^\star = 0, \quad F_{z\bar{z}}^\star + F_{w\bar{w}}^\star = 0, \quad (2.12)$$

где через z и w обозначены локальные координаты на четырехмерной евклидовой плоскости $\mathbb{C}^2$, а через $F_{\mu\nu}^\star := \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + [A_\mu, A_\nu]_\star$ обозначена напряженность поля. Для него возможны два выбора условия некоммутативности, ранга 2 и 4. Отметим, что некоммутативное уравнение АСДЯМ редуцируется к различным некоммутативным интегрируемым уравнениям более низкой размерности, включая все упомянутые выше уравнения, кроме некоммутативного уравнения Бюргерса. Дополнительные примеры приведены в работах [29] и [31], результаты которых могут свидетельствовать в пользу справедливости некоммутативной версии [32] гипотезы Уорда [33] (см. также книги [34], [35]).

3. ОБЗОР ТЕОРИИ КВАЗИДЕТЕРМИНАНТОВ

В этом разделе мы кратко рассматриваем квазидетерминанты, введенные Гельфандом и Ретахом [2], и представляем некоторые их свойства, которые играют важную роль в следующих разделах. Подробное обсуждение можно найти, например, в статье [36].

Квазидетерминанты – это не просто обобщение обычных коммутативных определителей, скорее они связаны с обратными матрицами. Начиная с этого момента мы предполагаем, что все матрицы имеют обратные.

Пусть $A = (a_{ij})$ – матрица размера $N \times N$, а $B = (b_{ij})$ – ее обратная, $A \star B = B \star A = 1$. В нашей работе все произведения матричных элементов понимаются как звездочные.

Квазидетерминант матрицы A формально определяется как обратный элемент матрицы $B = A^{-1}$: $|A|_{ij} := b_{ji}^{-1}$. В коммутативном пределе мы имеем

$$|A|_{ij} \xrightarrow{\theta \rightarrow 0} (-1)^{i+j} \frac{\det A}{\det A^{ij}}, \quad (3.1)$$

где A^{ij} – матрица, полученная из A удалением i -й строки и j -го столбца.

Квазидетерминант можно представить в более явном виде. Для этого напомним формулу обращения блочной матрицы размера 2×2 :

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & d \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} A^{-1} + A^{-1} \star B \star S^{-1} \star C \star A^{-1} & -A^{-1} \star B \star S^{-1} \\ -S^{-1} \star C \star A^{-1} & S^{-1} \end{bmatrix}, \quad (3.2)$$

где A – квадратная матрица, d – один элемент, а $S := d - C \star A^{-1} \star B$ называется алгебраическим дополнением Шура. Заметим, что любую матрицу можно представить как блочную матрицу размера 2×2 , в которой один из диагональных блоков имеет размерность 1×1 . Выбирая соответствующее разбиение, мы можем выразить любой элемент в матрице, обратной к квадратной, как обратный к алгебраическому дополнению Шура. Следовательно, можно задать квазидетерминанты с помощью итераций:

$$\begin{aligned} |A|_{ij} &= a_{ij} - \sum_{i'(\neq i), j'(\neq j)} a_{ii'} \star ((A^{ij})^{-1})_{i'j'} \star a_{j'j} = \\ &= a_{ij} - \sum_{i'(\neq i), j'(\neq j)} a_{ii'} \star (|A^{ij}|_{j'i'})^{-1} \star a_{j'j}. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Удобно представить квазидетерминанты как

$$|A|_{ij} = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & \dots & \boxed{a_{ij}} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}. \quad (3.4)$$

Приведем примеры. Для матрицы $A = a$ размера 1×1 квазидетерминант $|A| = a$, а для матрицы $A = (a_{ij})$ размера 2×2 мы имеем

$$\begin{aligned} |A|_{11} &= \begin{vmatrix} \boxed{a_{11}} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} - a_{12} \star a_{22}^{-1} \star a_{21}, & |A|_{12} &= \begin{vmatrix} a_{11} & \boxed{a_{12}} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{12} - a_{11} \star a_{21}^{-1} \star a_{22}, \\ |A|_{21} &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ \boxed{a_{21}} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{21} - a_{22} \star a_{12}^{-1} \star a_{11}, & |A|_{22} &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & \boxed{a_{22}} \end{vmatrix} = a_{22} - a_{21} \star a_{11}^{-1} \star a_{12}. \end{aligned}$$

Для матрицы $A = (a_{ij})$ размера 3×3

$$\begin{aligned} |A|_{11} &= \begin{vmatrix} \boxed{a_{11}} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} - (a_{12}, a_{13}) \star \begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}^{-1} \star \begin{pmatrix} a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix} = \\ &= a_{11} - a_{12} \star \begin{vmatrix} \boxed{a_{22}} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}^{-1} \star a_{21} - a_{12} \star \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ \boxed{a_{32}} & a_{33} \end{vmatrix}^{-1} \star a_{31} - \\ &\quad - a_{13} \star \begin{vmatrix} a_{22} & \boxed{a_{23}} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}^{-1} \star a_{21} - a_{13} \star \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & \boxed{a_{33}} \end{vmatrix}^{-1} \star a_{31} \end{aligned}$$

и т. д.

Квазидетерминанты имеют различные любопытные свойства, схожие со свойствами обычных определителей. Следующие из них [2] важны при обсуждении рассеяния солитонов.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.1. Пусть $A = (a_{ij})$ – квадратная матрица размера $n \times n$.

1. *Перестановка строк и столбцов.* Квазидетерминант $|A|_{ij}$ не зависит от перестановки строк и столбцов матрицы A , которая не захватывает i -ю строку и j -й столбец.

2. *Умножение строк и столбцов.* Пусть матрица $M = (m_{ij})$ получена из матрицы A умножением i -й строки на $f(x)$ слева: $m_{ij} = f \star a_{ij}$ и $m_{kj} = a_{kj}$ при $k \neq i$. Тогда

$$|M|_{kj} = \begin{cases} f \star |A|_{ij} & \text{при } k = i, \\ |A|_{kj} & \text{при } k \neq i \text{ и обратимой функции } f. \end{cases} \quad (3.5)$$

Пусть матрица $N = (n_{ij})$ получена из матрицы A умножением j -го столбца на $f(x)$ справа: $n_{ij} = a_{ij} \star f$ и $n_{il} = a_{il}$ при $l \neq j$. Тогда

$$|N|_{il} = \begin{cases} |A|_{ij} \star f & \text{при } l = j, \\ |A|_{il} & \text{при } l \neq j \text{ и обратимой функции } f. \end{cases} \quad (3.6)$$

4. НЕКОММУТАТИВНАЯ ИНТЕГРИРУЕМАЯ ИЕРАРХИЯ И СОЛИТОННЫЕ РЕШЕНИЯ

В этом разделе мы приводим точные многосолитонные решения некоммутативных интегрируемых иерархий в терминах квазидетерминантов. В коммутативном случае решающую роль играют определители Вронского. В некоммутативном случае квазидетерминанты дают более удобную формулировку. Мы рассматриваем некоммутативную иерархию КП и ее редукции, так называемые некоммутативные

иерархии Гельфанда–Дикого, и представляем их точные многосолитонные решения, разработанные Этинггофом, Гельфандом и Ретахом [1] (см. также работу [8]).

Псевдодифференциальный оператор A N -го порядка задается как

$$A = a_N \partial_x^N + a_{N-1} \partial_x^{N-1} + \cdots + a_0 + a_{-1} \partial_x^{-1} + a_{-2} \partial_x^{-2} + \cdots, \quad (4.1)$$

где a_i – функция от x , связанная с некоммутативным ассоциативным произведением (в нашем случае звездочным произведением). Если высший коэффициент a_N равен единице, мы называем оператор приведенным. Введем следующие символы:

$$\begin{aligned} A_{\geq r} &:= \partial_x^N + a_{N-1} \partial_x^{N-1} + \cdots + a_r \partial_x^r, \\ A_{\leq r} &:= A - A_{\geq(r+1)} = a_r \partial_x^r + a_{r-1} \partial_x^{r-1} + \cdots. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Действие дифференциального оператора ∂_x^n на произведение с операторным множителем f формально задается правилом Лейбница:

$$\partial_x^n \cdot f := \sum_{i \geq 0} \binom{n}{i} (\partial_x^i f) \partial_x^{n-i}, \quad (4.3)$$

где биномиальный коэффициент есть

$$\binom{n}{i} := \frac{n(n-1) \cdots (n-i+1)}{i(i-1) \cdots 1}.$$

Отметим, что определение биномиального коэффициента применимо к отрицательным n , откуда следует, что задано действие дифференциальных операторов в отрицательной степени.

Композиция псевдодифференциальных операторов также корректно определена, и полный набор псевдодифференциальных операторов образует операторную алгебру. Для приведенного псевдодифференциального оператора A существуют единственный обратный A^{-1} и единственный корень n -й степени $A^{1/n}$, которые коммутируют с A (все доказательства такие же, как в коммутативном случае, коль скоро существует коммутативный предел). Более подробно о псевдодифференциальных операторах и теории Сато см., например, монографии [37]–[40].

4.1. Некоммутативные иерархии КП и КдФ. Для определения некоммутативной иерархии КП введем приведенный псевдодифференциальный оператор

$$L = \partial_x + u_2 \partial_x^{-1} + u_3 \partial_x^{-2} + u_4 \partial_x^{-3} + \cdots, \quad (4.4)$$

где коэффициенты $u_k = u_k(x_1, x_2, \dots)$ ($k = 2, 3, \dots$) зависят от бесконечномерного вектора координат $\vec{x} := (x_1, x_2, \dots)$ с $x_1 \equiv x$. Некоммутативность координат вводится условием (2.1).

Определим дифференциальный оператор B_m следующим образом:

$$B_m := (\underbrace{L \star \cdots \star L}_{m \text{ раз}})_{\geq 0} =: (L^m)_{\geq 0}. \quad (4.5)$$

Некоммутативная иерархия КП задается как

$$\partial_m L = [B_m, L]_\star, \quad m = 1, 2, \dots, \quad (4.6)$$

где действие производной $\partial_m := \partial/\partial x_m$ на псевдодифференциальный оператор L определяется по формуле $\partial_m L := [\partial_m, L]_\star$ или $\partial_m \partial_x^k = 0$. Иерархия КП порождает бесконечный набор дифференциальных уравнений относительно бесконечного множества полей из коэффициентов в (4.6) при фиксированном m . Следовательно, она содержит огромное количество дифференциальных (эволюционных) уравнений для всех m . Левая часть равенства (4.6) принимает вид $\partial_m u_k$, что показывает наличие потока в направлении x_m .

Если наложить на некоммутативную иерархию (4.6) ограничение $(L^l)_{\leq -1} = 0$ или, эквивалентно, $L^l = B_l$ ($l = 2, 3, \dots$), то мы получим редуцированную некоммутативную иерархию КП, которая называется l -редукцией некоммутативной иерархии КП, или некоммутативной иерархией l КдФ, или l -й некоммутативной иерархией Гельфанда–Дикого. В частности, 2-редукция некоммутативной иерархии КП представляет собой просто некоммутативную иерархию КдФ. Нетрудно показать, что при всех n и k

$$\frac{\partial u_k}{\partial x_{nl}} = 0, \quad (4.7)$$

поскольку $\partial L^l / \partial x_{nl} = [B_{nl}, L^l] = [(L^l)^n, L^l] = 0$. При этом равенство $L^l = B_l$ дает простые связующие соотношения, которые позволяют представить бесконечный набор полей $u_{l+1}, u_{l+2}, u_{l+3}, \dots$ в терминах $l-1$ полей $u_2, u_3, \dots, u_l$ (см. приложение А в работе [41].)

Приведем несколько явных примеров.

• НЕКОММУТАТИВНАЯ ИЕРАРХИЯ КП. Коэффициенты при каждой степени (псевдо)дифференциальных операторов в некоммутативной иерархии КП (4.6) дают ряд “эволюционных уравнений”: при $m = 1$

$$\partial_x^{1-k} : \quad \partial_1 u_k = u'_k, \quad k = 2, 3, \dots \implies x^1 \equiv x, \quad (4.8)$$

при $m = 2$

$$\begin{aligned} \partial_x^{-1} : \quad \partial_2 u_2 &= u''_2 + 2u'_3, \\ \partial_x^{-2} : \quad \partial_2 u_3 &= u'''_3 + 2u'_4 + 2u_2 \star u'_2 + 2[u_2, u_3]_\star, \\ \partial_x^{-3} : \quad \partial_2 u_4 &= u'''_4 + 2u'_5 + 4u_3 \star u'_2 - 2u_2 \star u''_2 + 2[u_2, u_4]_\star, \\ &\dots \end{aligned} \quad (4.9)$$

а при $m = 3$

$$\begin{aligned} \partial_x^{-1} : \quad \partial_3 u_2 &= u'''_2 + 3u''_3 + 3u'_4 + 3u'_2 \star u_2 + 3u_2 \star u'_2, \\ \partial_x^{-2} : \quad \partial_3 u_3 &= u'''_3 + 3u''_4 + 3u'_5 + 6u_2 \star u'_3 + 3u'_2 \star u_3 + 3u_3 \star u'_2 + 3[u_2, u_4]_\star, \\ \partial_x^{-3} : \quad \partial_3 u_4 &= u'''_4 + 3u''_5 + 3u'_6 + 3u'_2 \star u_4 + 3u_2 \star u'_4 + 6u_4 \star u'_2 - \\ &\quad - 3u_2 \star u''_3 - 3u_3 \star u''_2 + 6u_3 \star u'_3 + 3[u_2, u_5]_\star + 3[u_3, u_4]_\star, \\ &\dots \end{aligned} \quad (4.10)$$

Эти уравнения содержат $(2+1)$ -мерное некоммутативное уравнение КП (2.8), когда $2u_2 \equiv u$, $x_2 \equiv y$, $x_3 \equiv t$ и $\partial_x^{-1} f(x) = \int^x dx' f(x')$.

Заметим, что поля $u_3, u_4, u_5, \dots$ выражаются через $2u_2 \equiv u$, как это видно из уравнений (4.9).

• НЕКОММУТАТИВНАЯ ИЕРАРХИЯ КдФ (2-редукция некоммутативной иерархии КП). Наложив условие $L^2 = B_2 =: \partial_x^2 + u$ на некоммутативную иерархию КП, мы получаем некоммутативную иерархию КдФ. Поток с нечетными номерами тривиален. Некоммутативная иерархия

$$\frac{\partial u}{\partial x^m} = [B_m, L^2]_\star, \quad (4.11)$$

не имеет ни положительной, ни отрицательной степени (псевдо-)дифференциальных операторов по той же причине, что и в коммутативном случае, и порождает m -е уравнение КдФ для каждого $m = 1, 3, 5, \dots$. Некоммутативная иерархия КдФ (4.11) совпадает с $(1+1)$ -мерным уравнением КдФ (2.3) при $m = 3$, если $x_3 \equiv t$, и с $(1+1)$ -мерным пятым некоммутативным уравнением КдФ [30] при $m = 5$, если $x_5 \equiv t$:

$$\dot{u} = \frac{1}{16} u'''' + \frac{5}{16} (u \star u''' + u''' \star u) + \frac{5}{8} (u' \star u' + u \star u \star u)'. \quad (4.12)$$

Таким способом мы можем генерировать бесконечный набор l -редуцированных некоммутативных иерархий КП. Явные примеры см., например в работе [41], а также в [42]–[47].

4.2. Многосолитонные решения некоммутативных иерархий КП и КдФ.

Теперь построим многосолитонные решения некоммутативной иерархии КП. Введем следующие функции:

$$f_s(\vec{x}) = e_\star^{\xi(\vec{x}; k_s)} + a_s e_\star^{\xi(\vec{x}; k'_s)}, \quad \text{где} \quad \xi(\vec{x}; k) = x_1 k + x_2 k^2 + x_3 k^3 + \dots, \quad (4.13)$$

и k_s, k'_s, a_s – константы. Звездочная экспонента задается как

$$e_\star^{f(x)} := 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \underbrace{f(x) \star \dots \star f(x)}_{n \text{ раз}}. \quad (4.14)$$

N -солитонное решение некоммутативной иерархии КП (4.6) имеет вид [1]

$$L = \Phi_N \star \partial_x \Phi_N^{-1}, \quad (4.15)$$

где

$$\Phi_N \star f = |W(f_1, \dots, f_N, f)|_{N+1, N+1} = \begin{vmatrix} f_1 & f_2 & \dots & f_N & f \\ f'_1 & f'_2 & \dots & f'_N & f' \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ f_1^{(N-1)} & f_2^{(N-1)} & \dots & f_N^{(N-1)} & f^{(N-1)} \\ f_1^{(N)} & f_2^{(N)} & \dots & f_N^{(N)} & \boxed{f^{(N)}} \end{vmatrix}.$$

Матрица Вронского $W(f_1, f_2, \dots, f_m)$ задается как

$$W(f_1, f_2, \dots, f_m) := \begin{bmatrix} f_1 & f_2 & \dots & f_m \\ f'_1 & f'_2 & \dots & f'_m \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1^{(m-1)} & f_2^{(m-1)} & \dots & f_m^{(m-1)} \end{bmatrix}, \quad (4.16)$$

где $f_1, f_2, \dots, f_m$ – функции от x и $f' := \partial f / \partial x$, $f'' := \partial^2 f / \partial x^2$, $f^{(m)} := \partial^m f / \partial x^m$.

В коммутативном пределе

$$\Phi_N \star f \rightarrow \frac{\det W(f_1, f_2, \dots, f_N, f)}{\det W(f_1, f_2, \dots, f_N)} \quad (4.17)$$

что совпадает с коммутативным N -солитонным решением [39]. В этом контексте квазидетерминанты укладываются в рамки решения типа вронскиана, но, однако, дают его новую формулировку.

Из уравнения (4.15) мы получаем более явную форму записи для u_2 :

$$u_2 = \partial_x \left(\sum_{s=1}^N W'_s \star W_s^{-1} \right), \quad W_s := |W(f_1, \dots, f_s)|_{ss}. \quad (4.18)$$

В солитонном решении условие l -редукции $(L^l)_{\leq -1} = 0$ или $L^l = B_l$ эквивалентно $k_s = \epsilon k'_s$ ($s = 1, 2, \dots, N$), где ϵ есть l -й корень из единицы.

4.3. Асимптотическое поведение точных солитонных решений. В этом пункте мы обсуждаем асимптотическое поведение N -солитонных решений в асимптотике бесконечно удаленного прошлого и будущего. В формализме звездочного произведения все координаты рассматриваются как комплексные функции. Мы можем, как обычно, задавать конфигурации, определять положения локализованного волнового пакета и фазовые сдвиги. Ограничимся некоммутативными уравнениями КдФ и КП (третий поток иерархий) с пространственно-временной некоммутативностью $[x, t]_\star = i\theta$, где $(x, t) \equiv (x_1, x_3)$. Аналогичный анализ других некоммутативных иерархий проведен в работе [12].

Прежде всего дадим некоторые комментарии относительно одной важной для односолитонных решений формулы. Пусть x, t – некоммутативные пространственная и временная координаты. Введем новые некоммутативные координаты $z := x + vt$, $\bar{z} := x - vt$ и с легкостью заметим, что

$$f(z) \star g(z) = f(z)g(z), \quad (4.19)$$

поскольку звездочное произведение (2.2) переписывается в терминах $(z, \bar{z})$ как

$$f(z, \bar{z}) \star g(z, \bar{z}) = e^{i v \theta (\partial_{z_1} \partial_{z_2} - \partial_{z_1} \partial_{\bar{z}_2})} f(z_1, \bar{z}_1) g(z_2, \bar{z}_2) \Big|_{\substack{z_1 = z_2 = z, \\ \bar{z}_1 = \bar{z}_2 = \bar{z}}}. \quad (4.20)$$

Следовательно, некоммутативное односолитонное решение совпадает с коммутативным.

Когда $f(x)$ – линейная функция, звездочная экспонента $e_\star^{f(x)}$ поддается простому анализу, и мы можем записать

$$(e_\star^{\xi(\vec{x}; k)})^{-1} = e_\star^{-\xi(\vec{x}; k)}, \quad (4.21)$$

$$\partial_x e_\star^{\xi(\vec{x}; k)} = k e_\star^{\xi(\vec{x}; k)}. \quad (4.22)$$

Эти формулы играют решающую роль при обсуждении асимптотического поведения N -солитонных решений.

4.3.1. *Асимптотическое поведение некоммутативных солитонов КдФ.* Сначала обсудим асимптотическое поведение N -солитонных решений некоммутативного уравнения КдФ. Некоммутативная иерархия КдФ является 2-редукцией некоммутативной иерархии КП и получается путем подстановки $k'_s = -k_s$ в N -солитонные решения некоммутативной иерархии КП. Здесь константы k_s и a_s – ненулевые действительные числа, причем a_s положительна. Вследствие свойства перестановки столбцов квазидетерминанта из предложения 3.1 (см. п. 1) мы можем предположить, что $k_1 < k_2 < \dots < k_N$.

Рассмотрим солитонные решения некоммутативного уравнения КдФ, в котором координаты заданы как $(x, t) \equiv (x_1, x_3)$. Введем новые координаты $X := x + k_I^2 t$, движущиеся вместе с I -м солитоном, и возьмем пределы $t \rightarrow \pm\infty$. Заметим, что X конечна при любых временах. Далее, в силу того, что $x + k_s^2 t = x + k_I^2 t + (k_s^2 - k_I^2)t$, либо $e_\star^{k_s(x+k_s^2 t)}$, либо $e_\star^{-k_s(x+k_s^2 t)}$ стремится к нулю при $s \neq I$. Отсюда поведение функции f_s при $t \rightarrow +\infty$ задается как

$$f_s(\vec{x}) \rightarrow \begin{cases} a_s e_\star^{-k_s(x+k_s^2 t)} & \text{при } s < I, \\ e_\star^{k_I(x+k_I^2 t)} + a_I e_\star^{-k_I(x+k_I^2 t)} & \text{при } s = I, \\ e_\star^{k_s(x+k_s^2 t)} & \text{при } s > I, \end{cases} \quad (4.23)$$

а при $t \rightarrow -\infty$

$$f_s(\vec{x}) \rightarrow \begin{cases} e_\star^{k_s(x+k_s^2 t)} & \text{при } s < I, \\ e_\star^{k_I(x+k_I^2 t)} + a_I e_\star^{-k_I(x+k_I^2 t)} & \text{при } s = I, \\ a_s e_\star^{-k_s(x+k_s^2 t)} & \text{при } s > I. \end{cases} \quad (4.24)$$

Отметим, что s -й столбец ($s \neq I$) пропорционален экспоненте $e_\star^{\pm k_s(x+k_s^2 t)}$ в силу равенства (4.22). Используя свойство умножения столбцов квазидетерминанта из предложения 3.1 (см. п. 2), мы можем исключить общий обратимый множитель из s -го столбца в $|A|_{ij}$, где $s \neq j$ (следует обратить внимание, что экспонента фактически обратима, как показано в (4.21)). Следовательно, N -солитонное решение приобретает простой вид, где только I -й столбец нетривиален при $t \rightarrow +\infty$,

$\Phi_N \star f \rightarrow$

$$\rightarrow \begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 & e_\star^{\xi(\vec{x}; k_I)} + a_I e_\star^{-\xi(\vec{x}; k_I)} & 1 & \dots & 1 & f \\ -k_1 & \dots & -k_{I-1} & k_I(e_\star^{\xi(\vec{x}; k_I)} - a_I e_\star^{-\xi(\vec{x}; k_I)}) & k_{I+1} & \dots & k_N & f' \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ (-k_1)^{N-1} & \dots & (-k_{I-1})^{N-1} & k_I^{N-1}(e_\star^{\xi(\vec{x}; k_I)} + (-1)^{N-1} a_I e_\star^{-\xi(\vec{x}; k_I)}) & k_{I+1}^{N-1} & \dots & k_N^{N-1} & f^{(N-1)} \\ (-k_1)^N & \dots & (-k_{I-1})^N & k_I^N(e_\star^{\xi(\vec{x}; k_I)} + (-1)^N a_I e_\star^{-\xi(\vec{x}; k_I)}) & k_{I+1}^N & \dots & k_N^N & \boxed{f^{(N)}} \end{vmatrix},$$

а при $t \rightarrow -\infty$

$\Phi_N \star f \rightarrow$

$$\rightarrow \begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 & e_{\star}^{\xi(\vec{x};k_I)} + a_I e_{\star}^{-\xi(\vec{x};k_I)} & 1 & \dots & 1 & f \\ k_1 & \dots & k_{I-1} & k_I (e_{\star}^{\xi(\vec{x};k_I)} - a_I e_{\star}^{-\xi(\vec{x};k_I)}) & -k_{I+1} & \dots & -k_N & f' \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ k_1^{N-1} & \dots & k_{I-1}^{N-1} & k_I^{N-1} (e_{\star}^{\xi(\vec{x};k_I)} + (-1)^{N-1} a_I e_{\star}^{-\xi(\vec{x};k_I)}) & (-k_{I+1})^{N-1} & \dots & (-k_N)^{N-1} & f^{(N-1)} \\ k_1^N & \dots & k_{I-1}^N & k_I^N (e_{\star}^{\xi(\vec{x};k_I)} + (-1)^N a_I e_{\star}^{-\xi(\vec{x};k_I)}) & (-k_{I+1})^N & \dots & (-k_N)^N & \boxed{f^{(N)}} \end{vmatrix}.$$

Видно, что все элементы между первым и N -м столбцами коммутируют и зависят только от координаты $x + k_I^2 t$ в $\xi(\vec{x}; k_I)$, откуда следует, что соответствующие асимптотические конфигурации совпадают с коммутативными, т. е. с I -й односолитонной конфигурацией с некоторым сдвигом координат, так называемым фазовым сдвигом. Заметим, что, поскольку f произвольна, нет необходимости рассматривать произведение какого-либо столбца и $(N+1)$ -го столбца. Это свойство асимптотического поведения можно также получить из соотношений (4.18). Коммутативный случай изучался с помощью данного метода многими авторами.

Таким образом, мы заключаем, что для некоммутативной иерархии КдФ асимптотическое поведение многосолитонных решений такое же, как в коммутативном случае, N -солитонные решения имеют N изолированных энергетических лампов и в процессе рассеяния никогда не распадаются и сохраняют свою форму и скорость. Фазовые сдвиги появляются в той же степени, что и в коммутативном случае.

4.3.2. Асимптотическое поведение некоммутативных солитонов КП. Теперь сосредоточим наше внимание на асимптотическом поведении N -солитонных решений некоммутативного уравнения КП, в котором пространственные и временные координаты суть $(x, y, t) \equiv (x_1, x_2, x_3)$ с условием некоммутативности $[x, t]_{\star} = i\theta$. Здесь константы k_s и k'_s вещественные и ненулевые, константа a_s будет определена ниже.

Как упоминалось в начале предыдущего пункта, односолитонные решения имеют тот же вид, что и в коммутативном случае. Тем не менее мы должны рассматривать некоммутативную иерархию КП достаточно аккуратно.

Прежде всего дадим некоторые комментарии по поводу формулы Бейкера–Кемпбелла–Хаусдорфа для звездочной экспоненты $\xi(\xi; \vec{k})$ в решении. Рассмотрим некоммутативную часть звездочной экспоненты. Существенной линейной частью функции является $\xi(\xi; \vec{k}) = k(x + k^2 t)$. Заметим, что иногда можно встретить следующие вычисления:

$$e_{\star}^{\xi(\vec{x};k)} \star e_{\star}^{\xi(\vec{x};k')} = e^{(i/2)\theta(kk'^3 - k^3 k')} e_{\star}^{\xi(\vec{x};k) + \xi(\vec{x};k')} = e^{i\theta k k' (k'^2 - k^2)} e_{\star}^{\xi(\vec{x};k')} \star e_{\star}^{\xi(\vec{x};k)}. \quad (4.25)$$

Посмотрим, как нужно исключать комплексный множитель $\Delta := (i/2)\theta k k' (k'^2 - k^2)$ в асимптотической области при условии, что конфигурации должны быть вещественными.

Из формулы (4.18) можно получить следующее наивное односолитонное решение:

$$\begin{aligned} u_2 &= \partial_x (\partial_x (e_{\star}^{\xi(\vec{x};k)} + a e_{\star}^{\xi(\vec{x};k')}) \star (e_{\star}^{\xi(\vec{x};k)} + a e_{\star}^{\xi(\vec{x};k')})^{-1}) = \\ &= \partial_x ((k^i + a k'^i \Delta e_{\star}^{\eta(\vec{x};k,k')}) \star (1 + a \Delta e_{\star}^{\eta(\vec{x};k,k')})^{-1}), \end{aligned} \quad (4.26)$$

где $\eta(\vec{x}; k, k') := x(k' - k) + y(k'^2 - k^2) + t(k'^3 - k^3)$. Заметим, что комплексный множитель Δ нельзя устранить переопределением координат вида $x \rightarrow x + (k' - k)^{-1}\Delta$, поскольку пространственные и временные координаты вещественны¹⁾. Вместо этого для устранения комплексного множителя Δ мы вводим новую вещественную постоянную $\tilde{a} := a\Delta$, так что $f_1 = e_{\star}^{\xi(\vec{x}; k)} + a e_{\star}^{\xi(\vec{x}; k')} = (1 + \tilde{a} e_{\star}^{\eta(\vec{x}; k, k')}) \star e_{\star}^{\xi(\vec{x}; k)}$. Это позволяет избежать сдвига координат на комплексное число. В асимптотической области конфигурация вещественна.

Эти рассуждения становятся важными при рассмотрении рассеяния многосолитонных решений. Как мы вскоре увидим, постоянные a_s в N -солитонном решении некоммутативного уравнения КП следует заменить положительными вещественными числами $\tilde{a}_s$, которые удовлетворяют уравнениям $a_s = \tilde{a}_s \Delta_s^{-1}$, где $\Delta_s := e^{(i/2)\theta k_s k'_s (k_s'^2 - k_s^2)}$.

Определим новые координаты, движущиеся вместе с I -м солитоном:

$$X := x + k_I y + k_I^2 t, \quad Y := x + k'_I y + k_I'^2 t, \quad (4.27)$$

так что X, Y конечны в асимптотической области. Тогда функцию $\xi(x, y, t; k_s)$ в новых координатах можно записать как $\xi(X, Y, t; k_s) = A(k_s)X + B(k_s)Y + C(k_s)t$, где $A(k_s)$, $B(k_s)$ и $C(k_s)$ – вещественные постоянные, зависящие от k_I, k'_I и k_s . Из (4.27) получаем, что

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{k'_I - k_I} \begin{pmatrix} k'_I X - k_I Y + k_I k'_I (k'_I - k_I) t \\ -X + Y + (k_I^2 - k_I'^2) t \end{pmatrix}, \quad (4.28)$$

и находим

$$\xi = x + k_s y + k_s^2 t = \frac{k'_I - k_s}{k'_I - k_I} X + \frac{k_s - k_I}{k'_I - k_I} Y + (k_s - k_I)(k_s - k'_I) t.$$

Здесь мы предполагаем, что $C(k_s) \neq C(k'_s)$, и это отвечает чистому рассеянию солитонов (условие $C(k_s) = C(k'_s)$ может привести к солитонным резонансам; для обсуждения коммутативного случая см. также, например, [48], [49]).

Теперь возьмем пределы $t \rightarrow \pm\infty$, тогда по тем же причинам, что и для некоммутативного уравнения КдФ, мы заключаем, что асимптотическое поведение функции f_s принимает вид

$$f_s(\vec{x}) \rightarrow \begin{cases} A_s e_{\star}^{\xi(\vec{x}; \tilde{k}_s)} & \text{при } s \neq I, \\ e_{\star}^{\xi(\vec{x}; k_I)} + a_I e_{\star}^{\xi(\vec{x}; k'_I)} & \text{при } s = I. \end{cases} \quad (4.29)$$

где A_s – некоторая вещественная константа, равная 1 или a_s , и $\tilde{k}_s$ – вещественная константа, равная k_s или k'_s . Как и в случае некоммутативного уравнения КдФ, s -й столбец ($s \neq I$) пропорционален экспоненте, и мы можем исключить этот множитель из s -го столбца. Таким образом, в асимптотической области $t \rightarrow \pm\infty$ N -солитонное

¹⁾В работе [25] аналогичное наблюдение касалось некоммутативного уравнения Бюргера, в котором параметр некоммутативности не вещественный, но чисто мнимый. Отсюда следует, что множитель Δ вещественный, и его нельзя устранить путем сдвига координат, который влияет на фазовый сдвиг.

решение принимает следующий простой вид, где только I -й столбец не является тривиальным:

$$\begin{aligned} & \Phi_N \star f \rightarrow \\ & \rightarrow \left| \begin{array}{ccccccc} 1 & \dots & 1 & e_{\star}^{\xi(\bar{x}; k_I)} + a_I e_{\star}^{\xi(\bar{x}; k'_I)} & 1 & \dots & 1 & f \\ \tilde{k}_1 & \dots & \tilde{k}_{I-1} & k_I e_{\star}^{\xi(\bar{x}; k_I)} + a_I k'_I e_{\star}^{\xi(\bar{x}; k'_I)} & \tilde{k}_{I+1} & \dots & \tilde{k}_N & f' \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \tilde{k}_1^{N-1} & \dots & \tilde{k}_{I-1}^{N-1} & k_I^{N-1} e_{\star}^{\xi(\bar{x}; k_I)} + a_I k_I'^{N-1} e_{\star}^{\xi(\bar{x}; k'_I)} & \tilde{k}_{I+1}^{N-1} & \dots & \tilde{k}_N^{N-1} & f^{(N-1)} \\ \tilde{k}_1^N & \dots & \tilde{k}_{I-1}^N & k_I^N e_{\star}^{\xi(\bar{x}; k_I)} + a_I k_I'^N e_{\star}^{\xi(\bar{x}; k'_I)} & \tilde{k}_{I+1}^N & \dots & \tilde{k}_N^N & \boxed{f^{(N)}} \end{array} \right| = \\ & = \left| \begin{array}{ccccccc} 1 & \dots & 1 & 1 + \tilde{a}_I e_{\star}^{\eta(\bar{x}; k_I, k'_I)} & 1 & \dots & 1 & f \\ \tilde{k}_1 & \dots & \tilde{k}_{I-1} & k_I + \tilde{a}_I k'_I e_{\star}^{\eta(\bar{x}; k_I, k'_I)} & \tilde{k}_{I+1} & \dots & \tilde{k}_N & f' \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \tilde{k}_1^{N-1} & \dots & \tilde{k}_{I-1}^{N-1} & k_I^{N-1} + \tilde{a}_I k_I'^{N-1} e_{\star}^{\eta(\bar{x}; k_I, k'_I)} & \tilde{k}_{I+1}^{N-1} & \dots & \tilde{k}_N^{N-1} & f^{(N-1)} \\ \tilde{k}_1^N & \dots & \tilde{k}_{I-1}^N & k_I^N + \tilde{a}_I k_I'^N e_{\star}^{\eta(\bar{x}; k_I, k'_I)} & \tilde{k}_{I+1}^N & \dots & \tilde{k}_N^N & \boxed{f^{(N)}} \end{array} \right|. \end{aligned}$$

Видно, что все элементы между первым и N -м столбцами являются вещественными и зависят только от одной координаты $x(k'_I - k_I) + t(k_I'^3 - k_I^3)$ из некоммутативных координат. Отсюда следует, что соответствующая асимптотическая конфигурация совпадает с коммутативной. Поэтому мы вновь можем заключить, что для некоммутативного уравнения КП асимптотическое поведение многосолитонных решений такое же, как в коммутативном случае при чистом рассеянии солитонов. В результате N -солитонные решения обладают N изолированными локализованным энергетическими лампами, в процессе чистого рассеяния никогда не распадаются и сохраняют свою форму и скорость локализованных уединенных волн. Это совпадает с результатом о двухсолитонном рассеянии, который был получен в работе [26].

Как это следует из условия устойчивости N -солитонного решения, на самом деле для некоммутативного уравнения КП с пространственно-временной некоммутативностью существует бесконечно много сохраняющихся плотностей

$$\sigma_n = \text{coef}_{-1} L^n - 3\theta((\text{coef}_{-1} L^n) \diamond u'_3 + (\text{coef}_{-2} L^n) \diamond u'_2), \quad n = 1, 2, \dots, \quad (4.30)$$

где через $\text{coef}_{-l} L^n$ обозначен коэффициент при ∂^{-l} в L^n (в частности $\text{coef}_{-1} L^n$ – вычет оператора L^n). Произведение $\diamond$ называется произведением Страчана [50] и определяется как

$$f(x) \diamond g(x) := \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{(2p+1)!} \left(\frac{1}{2} \theta^{ij} \partial_i^{(x')} \partial_j^{(x'')} \right)^{2p} f(x') g(x'') \Big|_{x'=x''=x}. \quad (4.31)$$

Это коммутативное и неассоциативное произведение. Сохраняющиеся плотности для односолитонной конфигурации не деформируются при некоммутативном обобщении, поскольку односолитонное решение всегда можно свести к решению в коммутативном случае.

5. НЕКОММУТАТИВНАЯ ИЕРАРХИЯ АСДЯМ И СОЛИТОННЫЕ РЕШЕНИЯ

В заключение представим некоммутативные уравнения АСДЯМ в четырех измерениях и их иерархическое обобщение.

Зададим комплексные координаты $(x_0, x_1, x_2, \dots; y_0, y_1, y_2, \dots)$ и ковариантные производные $D_{x_k} := \partial_{x_k} + A_{x_k}$, $D_{y_l} := \partial_{y_l} + A_{y_l}$ ($k, l = 0, 1, 2, \dots$), где A_{x_k} и A_{y_l} – комплексные матрицы размера $n \times n$. Будем полагать, что координаты некоммутативны.

Рассмотрим следующую линейную систему:

$$L_k \star \psi := (D_{x_k} - \zeta D_{x_{k-1}}) \star \psi, \quad M_l \star \psi := (D_{y_l} - \zeta D_{y_{l-1}}) \star \psi, \quad (5.1)$$

где $\zeta \in \mathbb{C}P^1$ есть спектральный параметр, который коммутирует со всеми пространственными координатами. Условия совместности этой линейной системы имеют вид $[L_k, M_l]_\star = 0$ для всех k, l . Они дают бесконечные системы уравнений в частных производных, которые называются некоммутативной иерархией АСДЯМ. При отождествлении $x_0 \equiv \bar{z}$, $x_1 \equiv w$, $y_0 \equiv -\bar{w}$, $y_1 \equiv z$ условие совместности в случае $k = l = 1$ совпадает с некоммутативным уравнением АСДЯМ (2.12). О коммутативной иерархии АСДЯМ см. работы [35], [51]–[54].

Уравнения некоммутативной иерархии АСДЯМ можно переписать в следующем виде:

$$\partial_{y_l}(J^{-1} \star \partial_{x_{k-1}} J) - \partial_{x_k}(J^{-1} \star \partial_{y_{l-1}} J) = 0, \quad (5.2)$$

где J – матрица размера $n \times n$. Уравнение (5.2) называется некоммутативным иерархическим уравнением Янга, а матрица J – матрицей Янга. При $k = l = 1$ это уравнение совпадает с некоммутативным уравнением Янга.

Антисамодуальные калибровочные поля можно получить из решения J уравнения (5.2) с помощью разложения $J = \tilde{h}^{-1} \star h$:

$$\begin{aligned} A_{x_k} &= -(\partial_{x_k} h) \star h^{-1}, & A_{y_l} &= -(\partial_{y_l} h) \star h^{-1}, \\ A_{x_{k-1}} &= -(\partial_{x_{k-1}} \tilde{h}) \star \tilde{h}^{-1}, & A_{y_{l-1}} &= -(\partial_{y_{l-1}} \tilde{h}) \star \tilde{h}^{-1}. \end{aligned} \quad (5.3)$$

Доказательство этого такое же, как для некоммутативного уравнения АСДЯМ (см., например, работу [5]).

Начиная с этого момента сконцентрируем свое внимание на случае $n = 2$. Матрицу J можно параметризовать без потери общности следующим образом:

$$J = \begin{bmatrix} p - r \star q^{-1} \star s & -r \star q^{-1} \\ q^{-1} \star s & q^{-1} \end{bmatrix}.$$

Точное решение m -го анзаца Аты–Уорда записывается в терминах квазидетерминантов: для всех $m = 0, 1, 2, \dots$

$$\begin{aligned}
 p_m &= \begin{vmatrix} \boxed{\varphi_0} & \varphi_{-1} & \dots & \varphi_{-m} \\ \varphi_1 & \varphi_0 & \dots & \varphi_{1-m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_m & \varphi_{m-1} & \dots & \varphi_0 \end{vmatrix}^{-1}, & q_m &= \begin{vmatrix} \varphi_0 & \varphi_{-1} & \dots & \varphi_{-m} \\ \varphi_1 & \varphi_0 & \dots & \varphi_{1-m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_m & \varphi_{m-1} & \dots & \boxed{\varphi_0} \end{vmatrix}^{-1}, \\
 r_m &= \begin{vmatrix} \varphi_0 & \varphi_{-1} & \dots & \varphi_{-m} \\ \varphi_1 & \varphi_0 & \dots & \varphi_{1-m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \boxed{\varphi_m} & \varphi_{m-1} & \dots & \varphi_0 \end{vmatrix}^{-1}, & s_m &= \begin{vmatrix} \varphi_0 & \varphi_{-1} & \dots & \boxed{\varphi_{-m}} \\ \varphi_1 & \varphi_0 & \dots & \varphi_{1-m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_m & \varphi_{m-1} & \dots & \varphi_0 \end{vmatrix}^{-1},
 \end{aligned} \tag{5.4}$$

где скалярные функции $\varphi_i(x; y)$ можно рекуррентно получить из скалярной функции φ_0 с помощью соотношений

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial y_l} = -\frac{\partial \varphi_{i+1}}{\partial y_{l-1}}, \quad \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k} = -\frac{\partial \varphi_{i+1}}{\partial x_{k-1}}, \quad -m \leq i \leq m-1 \quad (m \geq 2), \tag{5.5}$$

а φ_0 является решением линейного уравнения

$$(\partial x_k \partial y_{k-1} - \partial y_k \partial x_{k-1}) \varphi_0 = 0. \tag{5.6}$$

Асимптотика решений некоммутативной иерархии АСДЯМ. Теперь обсудим N -солитонные решения иерархии АСДЯМ (5.2) и их асимптотическое поведение в двухсолитонном случае. Для этого следует выбрать определенную координату, чтобы отождествить ее со временем.

Положим $x_{k-1} \equiv \bar{z} = t_1 - it_2$, $x_k \equiv w = t_3 + it_4$, $y_{l-1} \equiv -\bar{w} = t_3 + it_4$, $y_l \equiv z = t_1 + it_2$, где t_μ – вещественные координаты ($\mu = 1, 2, 3, 4$), тогда линейное уравнение (5.6) принимает вид четырехмерного уравнения Лапласа

$$\partial^2 \varphi_0(t) = 0, \quad \partial^2 := \partial_\mu \partial^\mu = \partial_1^2 + \partial_2^2 + \partial_3^2 + \partial_4^2. \tag{5.7}$$

Уравнение Янга (5.2) записывается как

$$\partial_z (J^{-1} \star \partial_{\bar{z}} J) + \partial_w (J^{-1} \star \partial_{\bar{w}} J) = 0. \tag{5.8}$$

Решения уравнения Лапласа (5.7) дают N -солитонное решение уравнений некоммутативной иерархии АСДЯМ:

$$\begin{aligned}
 \varphi_0(t) &= 1 + \sum_{s=1}^N a_s e^{\xi(k_{(s)}; t)} + \sum_{\substack{i_1=1, i_2=1, \\ i_1 < i_2}}^N a_{i_1 i_2} e^{\xi(k_{(i_1)}; t) + \xi(k_{(i_2)}; t)} + \dots + \\
 &+ a_{12 \dots N} e^{\xi(k_{(1)}; t) + \xi(k_{(2)}; t) + \dots + \xi(k_{(N)}; t)},
 \end{aligned} \tag{5.9}$$

где $\xi(k; t) := k_\mu t^\mu$. Здесь коэффициенты $a_{i_1 \dots i_s}$ являются комплексными константами ($s = 1, \dots, N$), а $k_{(s)\mu}$ – вещественные параметры, удовлетворяющие уравнению $k_{(s)\mu} k_{(s)}^\mu = 0$ ($\mu = 1, 2, 3, 4$). Коммутативный предел данного N -солитонного решения

сводится к N решениям типа нелинейных плоских волн [55]. Отметим, что другие скалярные функции могут иметь такое же представление, как функция (5.9), в силу соотношений (5.5).

Коэффициенты $a_{i_1 \dots i_s}$ ($s = 1, \dots, N$), вообще говоря, комплексные, поскольку имеется свобода калибровки $A_\mu \mapsto g^{-1} \star A_\mu \star g + g^{-1} \star \partial_\mu g$. Здесь мы сфокусируемся на вещественной конфигурации, чтобы сравнить наши рассуждения с предыдущими. Наконец, нам нужно проверить асимптотическое поведение таких калибровочно инвариантных величин, как

$$\int d^4 t \operatorname{Tr} F_{\mu\nu}^\star, \quad \int d^4 t \operatorname{Tr} F_{\mu\nu}^\star \star F_{\mu\nu}^\star.$$

Обсудим асимптотическое поведение N -солитонных решений уравнения АСДЯМ, которые называются солитонами АСДЯМ. Теперь предположим, что условие некоммутативности вводится для пространственной координаты $x \equiv t_1$ и временной координаты $t \equiv t_3$ как $[x, t]_\star = i\theta$. Мы рассматриваем предел $t \rightarrow \pm\infty$.

Односолитонное решение задается как $\varphi_0 = 1 + ae^{\xi(k;t)}$. Зависимость от некоммутативных координат имеет вид $\varphi_0(x + vt)$ (где $v := k_3/k_1$), следовательно, конфигурация сводится к коммутативной. Это можно интерпретировать как доменную стенку в четырех измерениях. Интересно изучить интерпретацию этого решения как D-браны.

Двухсолитонное решение задается как

$$\varphi_0 = 1 + a_1 e^{\xi(k;t)} + a_2 e^{\xi(k';t)} + a_{12} e^{\xi(k;t) + \xi(k';t)}. \quad (5.10)$$

Пусть система координат движется вместе с первым солитоном, так что $k_\mu t^\mu$ и $e^{\xi(k;t)}$ остаются конечными. В пределах $t \rightarrow \pm\infty$ функция $e^{\xi(k';t)}$ стремится к нулю или бесконечности. Следовательно, в асимптотической области мы имеем следующие два типа поведения двухсолитонного решения:

$$\varphi_0 \rightarrow 1 + a_1 e^{\xi(k;t)}, \quad (5.11)$$

$$\varphi_0 \rightarrow a_2 e^{\xi(k';t)} + a_{12} e^{\xi(k;t) + \xi(k';t)} = (a_2 + \tilde{a}_{12} e^{\xi(k;t)}) \star e^{\xi(k';t)}, \quad (5.12)$$

где $a_{12} = \tilde{a}_{12} \Delta$ и $\Delta := e^{(i/2)\theta(k_1 k'_3 - k_3 k'_1)}$. Мы полагаем, что величина $\tilde{a}_{12}$ вещественная.

В случае (5.11) находим, что $\varphi_0(t, x) = \varphi_0(x + vt)$, таким образом, конфигурация совпадает с коммутативной. В случае (5.12) требуются некоторые вычисления. Как уже говорилось, скалярные функции в решении (5.4), полученном с помощью анзаца Атьи–Уорда, имеют вид

$$\varphi_i = b_i + c_i e^{\xi(k;t)} + d_i e^{\xi(k';t)} + r_i e^{\xi(k;t) + \xi(k';t)},$$

где b_i, c_i, d_i, r_i – постоянные, причем b_i, c_i, d_i – вещественные числа. Асимптотическое поведение в случае (5.12) задается как

$$\varphi_i \rightarrow (c_i + \tilde{r}_i e^{\xi(k;t)}) \star e^{\xi(k';t)},$$

где $r_i = \tilde{r}_i \Delta$ таково, что величина $\tilde{r}_i$ вещественная.

В силу свойства умножения столбцов квазидетерминанта решение (5.4), полученное с помощью анзаца Атьи–Уорда, имеет следующий общий асимптотический вид: $p, q, r, s \rightarrow f(t + vx) \star e^{\xi(k';t)}$.

Калибровочные поля можно получить из матриц h и $\tilde{h}$ по формулам (5.3). Представим матрицу J в виде произведения матриц h и $\tilde{h}$ следующим образом:

$$J = \begin{bmatrix} p \star -r \star q^{-1} s & -r \star q^{-1} \\ q^{-1} \star s & q^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & r \\ 0 & q \end{bmatrix} -1 \star \begin{bmatrix} p & 0 \\ s & 1 \end{bmatrix} = \tilde{h}^{-1} \star h.$$

Калибровочные поля рассчитываются по формулам

$$\begin{aligned} A_z &= -(\partial_z h) \star h^{-1} = \begin{bmatrix} -(\partial_z p) \star p^{-1} & 0 \\ -(\partial_z s) \star p^{-1} & 0 \end{bmatrix}, \\ A_w &= -(\partial_w h) \star h^{-1} = \begin{bmatrix} -(\partial_w p) \star p^{-1} & 0 \\ -(\partial_w s) \star p^{-1} & 0 \end{bmatrix}, \\ A_{\bar{z}} &= -(\partial_{\bar{z}} \tilde{h}) \star \tilde{h}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -(\partial_{\bar{z}} r) \star q^{-1} \\ 0 & -(\partial_{\bar{z}} q) \star q^{-1} \end{bmatrix}, \\ A_{\bar{w}} &= -(\partial_{\bar{w}} \tilde{h}) \star \tilde{h}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -(\partial_{\bar{w}} r) \star q^{-1} \\ 0 & -(\partial_{\bar{w}} q) \star q^{-1} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Можно заметить, что общий множитель $e^{\xi(k';t)}$ в p, q, r, s здесь сокращается, и зависимость калибровочных полей от координат задается как $A_\mu(t, x) = A_\mu(x + vt)$. В формулах (5.11), (5.12) нет разницы между коммутативным и некоммутиативным случаем. Таким образом, мы можем сделать вывод, что калибровочно инвариантные величины, содержащие $F_{\mu\nu}^\star$, такие же, как в коммутативном случае.

Пусть система координат движется вместе со вторым солитоном, так что $k'_\mu t^\mu$ и $e^{\xi(k';t)}$ конечны. В пределах $t \rightarrow \pm\infty$ функция $e^{\xi(k;t)}$ стремится к нулю или бесконечности. В первом случае, при стремлении экспоненты к нулю, конфигурация сводится к односолитонной. Во втором случае, при стремлении экспоненты к бесконечности, аналогичным образом мы получаем следующее асимптотическое поведение скалярных функций:

$$\begin{aligned} \varphi_i &\rightarrow e^{\xi(k;t)} \star (a_1 + \tilde{a}_{12} e^{\xi(k';t)}), & \varphi_i &\rightarrow e^{\xi(k;t)} \star (d_i + \tilde{r}_i e^{\xi(k';t)}), \\ p, q, r, s &\rightarrow e^{\xi(k;t)} \star f(x + v't). \end{aligned}$$

Заметим, что коэффициенты $a_1, \tilde{a}_{12}, d_i, \tilde{r}_i$ такие же, как выше. Мы видим, что общий множитель $e^{\xi(k;t)}$ в калибровочных полях появляется как

$$A_\mu(x, t) \rightarrow e^{\xi(k;t)} \star A(x + v't) \star e^{-\xi(k;t)}.$$

Мы имеем существенную калибровочную эквивалентность с $A(x + v't)$ с точностью до постоянных, которые не дают вклад в напряженность поля. Следовательно, калибровочно инвариантные величины, содержащие $F_{\mu\nu}^\star$, вновь такие же, как в коммутативном случае.

Таким образом, мы можем сделать вывод, что асимптотическое поведение двухсолитонных решений совпадает с их поведением в коммутативном случае [55]: двухсолитонные решения имеют два изолированных локализованных энергетических лампа,

в процессе рассеяния никогда не распадаются и сохраняют свою форму и скорость локализованных уединенных волн. Следует изучить солитонное рассеяние с более высоким зарядом. Для этой цели могут оказаться полезными решения типа вронскиана [56]. Это мы рассмотрим в другой публикации.

Багодарность. Один из авторов хотел бы поблагодарить организаторов конференции Physics and Mathematics of Nonlinear Phenomena (PMNP2017), Gallipoli, Italy.

Список литературы

- [1] P. Etingof, I. Gelfand, V. Retakh, “Factorization of differential operators, quasideterminants, and nonabelian Toda field equations”, *Math. Res. Lett.*, **4**:3 (1997), 413–425, arXiv: q-alg/9701008.
- [2] И. М. Гельфанд, В. С. Петух, “Детерминанты матриц над некоммутативными кольцами”, *Функц. анализ и его прил.*, **25**:2 (1991), 13–25; “Теория некоммутативных детерминантов и характеристические функции графов”, **26**:4 (1992), 1–20.
- [3] E. V. Doktorov, S. B. Leble, *A Dressing Method in Mathematical Physics*, Mathematical Physics Studies, **28**, Springer, Dordrecht, 2007.
- [4] P. Etingof, I. Gelfand, V. Retakh, “Nonabelian integrable systems, quasideterminants, and Marchenko lemma”, *Math. Res. Lett.*, **5**:1 (1998), 1–12, arXiv: q-alg/9707017.
- [5] C. R. Gilson, M. Hamanaka, J. J. C. Nimmo, “Bäcklund transformations for noncommutative anti-self-dual Yang–Mills equations”, *Glasg. Math. J.*, **51**:A (2009), 83–93, arXiv: 0709.2069.
- [6] C. R. Gilson, M. Hamanaka, J. J. C. Nimmo, “Bäcklund transformations and the Atiyah–Ward ansatz for noncommutative anti-self-dual Yang–Mills equations”, *Proc. Roy. Soc. Lond. Ser. A*, **465**:2108 (2009), 2613–2632.
- [7] C. R. Gilson, S. R. Macfarlane, “Dromion solutions of noncommutative Davey–Stewartson equations”, *J. Phys. A: Math. Theor.*, **42**:23 (2009), 235202, 20 pp., arXiv: 0901.4918.
- [8] C. R. Gilson, J. J. C. Nimmo, “On a direct approach to quasideterminant solutions of a noncommutative KP equation”, *J. Phys. A: Math. Theor.*, **40**:14 (2007), 3839–3850, arXiv: nlin/0701027.
- [9] C. R. Gilson, J. J. C. Nimmo, Y. Ohta, “Quasideterminant solutions of a non-Abelian Hirota–Miwa equation”, *J. Phys. A: Math. Theor.*, **40**:42 (2007), 12607–12618, arXiv: nlin/0702020.
- [10] C. R. Gilson, J. J. C. Nimmo, C. M. Sooman, “On a direct approach to quasideterminant solutions of a noncommutative modified KP equation”, *J. Phys. A: Math. Theor.*, **41**:8 (2008), 085202, 10 pp., arXiv: 0711.3733.
- [11] B. Haider, M. Hassan, “The $U(N)$ chiral model and exact multi-solitons”, *J. Phys. A: Math. Theor.*, **41**:25 (2008), 255202, 17 pp., arXiv: 0912.1984.
- [12] M. Hamanaka, “Notes on exact multi-soliton solutions of noncommutative integrable hierarchies”, *JHEP*, **02** (2007), 094, 17 pp., arXiv: hep-th/0610006.
- [13] M. Hamanaka, “Noncommutative solitons and quasideterminants”, *Phys. Scr.*, **89**:3 (2014), 038006, 11 pp., arXiv: 1101.0005.
- [14] C. X. Li, J. J. C. Nimmo, K. M. Tamizhmani, “On solutions to the non-Abelian Hirota–Miwa equation and its continuum limits”, *Proc. Roy. Soc. London Ser. A*, **465**:2105 (2009), 1441–1451, arXiv: 0809.3833.
- [15] V. Retakh, V. Rubtsov, “Noncommutative Toda chains, Hankel quasideterminants and Painlevé II equation”, *J. Phys. A: Math. Theor.*, **43**:50 (2010), 505204, 13 pp., arXiv: 1007.4168.

- [16] M. Siddiq, U. Saleem, M. Hassan, “Darboux transformation and multi-soliton solutions of a noncommutative sine-Gordon system”, *Modern Phys. Lett. A*, **23**:2 (2008), 115–127.
- [17] A. Dimakis, F. Müller-Hoissen, *Extension of Moyal-deformed hierarchies of soliton equations*, arXiv: nlin.si/0408023.
- [18] M. Hamanaka, *Noncommutative solitons and D-branes*, Ph.D. Thesis, University of Tokyo, Tokyo, 2003, arXiv: hep-th/0303256.
- [19] M. Hamanaka, “Noncommutative solitons and integrable systems”, *Noncommutative Geometry and Physics* (Keio, February 26–March 3, 2004), eds. Y. Maeda, N. Tose, N. Miyazaki, S. Watamura, D. Sternheimer, World Sci., Singapore, 2005, 175–198, arXiv: hep-th/0504001.
- [20] M. Hamanaka, K. Toda, “Towards noncommutative integrable equations”, *Symmetry in Nonlinear Mathematical Physics* (Kiev, Ukraine, 23–29 June, 2003), ed. A. G. Nikitin, Institute of Mathematics of NASU, Kyiv, 2004, 404–411, arXiv: hep-th/0309265.
- [21] O. Lechtenfeld, “Noncommutative solitons”, *Noncommutative Geometry and Physics 2005*, Proceedings of the International Sendai–Beijing Joint Workshop (Sendai, Japan, 1–4 November, 2005; Beijing, China, 7–10 November, 2005), eds. U. Carow-Watamura, S. Watamura, Y. Maeda, H. Moriyoshi, Z. Liu, K. Wu, World Sci., Singapore, 2007, 175–200, arXiv: hep-th/0605034.
- [22] L. Mazzanti, *Topics in noncommutative integrable theories and holographic brane-world cosmology*, arXiv: 0712.1116.
- [23] L. Tamassia, *Noncommutative supersymmetric/integrable models and string theory*, arXiv: hep-th/0506064.
- [24] A. Dimakis, F. Müller-Hoissen, “Noncommutative Korteweg–de-Vries equation”, *Phys. Lett. A*, **278**:3 (2000), 139–145, arXiv: hep-th/0007074.
- [25] L. Martina, O.K. Pashaev, *Burgers’ equation in non-commutative space-time*, arXiv: hep-th/0302055.
- [26] L.D. Paniak, *Exact noncommutative KP and KdV multi-solitons*, arXiv: hep-th/0105185.
- [27] J.E. Moyal, “Quantum mechanics as a statistical theory”, *Proc. Cambridge Phil. Soc.*, **45**:1 (1949), 99–124; H.J. Groenewold, “On the principles of elementary quantum mechanics”, *Physica*, **12**:7 (1946), 405–460.
- [28] M. Hamanaka, K. Toda, “Noncommutative Burgers equation”, *J. Phys. A: Math. Theor.*, **36**:48 (2003), 11981–11998, arXiv: hep-th/0301213.
- [29] M. Hamanaka, “Noncommutative Ward’s conjecture and integrable systems”, *Nucl. Phys. B*, **741**:3 (2006), 368–389, arXiv: hep-th/0601209.
- [30] K. Toda, “Extensions of soliton equations to non-commutative $(2 + 1)$ dimensions”, *PoS(unesp2002)*, 038, 12 pp.
- [31] M. Hamanaka, “On reductions of noncommutative anti-self-dual Yang–Mills equations”, *Phys. Lett. B*, **625**:3–4 (2005), 324–332, arXiv: hep-th/0507112.
- [32] M. Hamanaka, K. Toda, “Towards noncommutative integrable systems”, *Phys. Lett. A*, **316**:1–2 (2003), 77–83, arXiv: hep-th/0211148.
- [33] R.S. Ward, “Integrable and solvable systems, and relations among them”, *Phil. Trans. Roy. Soc. London Ser. A*, **315**:1533 (1985), 451–457.
- [34] M.J. Ablowitz, P.A. Clarkson, *Solitons, Nonlinear Evolution Equations and Inverse Scattering*, London Mathematical Society Lecture Note Series, **149**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1991.
- [35] L.J. Mason, N.M. Woodhouse, *Integrability, Self-Duality, and Twistor Theory*, London Mathematical Society Monographs. New Series, **15**, Oxford Univ. Press, Oxford, 1996.
- [36] I. Gelfand, S. Gelfand, V. Retakh, R. Wilson, “Quasideterminants”, *Adv. Math.*, **193**:1 (2005), 56–141, arXiv: math.QA/0208146.
- [37] O. Babelon, D. Bernard, M. Talon, *Introduction to Classical Integrable Systems*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2003.

- [38] M. Błaszak, *Multi-Hamiltonian Theory of Dynamical Systems*, Springer, Berlin, 1998.
- [39] L. A. Dickey, *Soliton Equations and Hamiltonian Systems*, Advanced Series in Mathematical Physics, **26**, World Sci., Singapore, 2003.
- [40] B. A. Kupershmidt, *KP or mKP. Noncommutative Mathematics of Lagrangian, Hamiltonian, and Integrable Systems*, Mathematical Surveys and Monographs, **78**, AMS, Providence, RI, 2000.
- [41] M. Hamanaka, “Commuting flows and conservation laws for noncommutative Lax hierarchies”, *J. Math. Phys.*, **46**:5 (2005), 052701, 13 pp., arXiv: hep-th/0311206.
- [42] S. Carillo, M. Lo Schiavo, C. Schiebold, “Bäcklund transformations and non-abelian non-linear evolution equations: a novel Bäcklund chart”, *SIGMA*, **12** (2016), 087, 17 pp., arXiv: 1512.02386.
- [43] B. G. Konopelchenko, W. Oevel, “Matrix Sato theory and integrable systems in 2+1 dimensions”, *Nonlinear Evolution Equations and Dynamical Systems*, Proceedings of the Workshop NEEDS’91 (Baia Verde, Galipoli, Italy, 19–29 June, 1991), eds. M. Bolti, L. Martina, F. Pempinelli, World Sci., Singapore, 1992, 87–96.
- [44] W. X. Ma, “An extended noncommutative KP hierarchy”, *J. Math. Phys.*, **51**:7 (2010), 073505, 19 pp.
- [45] P. J. Olver, V. V. Sokolov, “Integrable evolution equations on associative algebras”, *Commun. Math. Phys.*, **193**:2 (1998), 245–268.
- [46] J. P. Wang, “On the structure of $(2 + 1)$ -dimensional commutative and noncommutative integrable equations”, *J. Math. Phys.*, **47**:11 (2006), 113508, arXiv: nlin/0606036.
- [47] N. Wang, M. Wadati, “Noncommutative KP hierarchy and Hirota triple-product relations”, *J. Phys. Soc. Japan*, **73**:7 (2004), 1689–1698.
- [48] K. Ohkuma, M. Wadati, “The Kadomtsev–Petviashvili equation: the trace method and the soliton resonances”, *J. Phys. Soc. Japan*, **52**:3 (1983), 749–760.
- [49] Y. Kodama, *KP Solitons and the Grassmannians*, Springer Briefs in Mathematical Physics, **22**, Springer, Singapore, 2017.
- [50] I. A. B. Strachan, “A geometry for multidimensional integrable systems”, *J. Geom. Phys.*, **21**:3 (1997), 255–278, arXiv: hep-th/9604142.
- [51] M. J. Ablowitz, S. Chakravarty, L. A. Takhtajan, “A selfdual Yang–Mills hierarchy and its reductions to integrable systems in $(1 + 1)$ -dimensions and $(2 + 1)$ -dimensions”, *Commun. Math. Phys.*, **158**:2 (1993), 289–314.
- [52] Y. Nakamura, “Transformation group acting on a self-dual Yang–Mills hierarchy”, *J. Math. Phys.*, **29**:1 (1988), 244–248.
- [53] K. Suzuki, *Explorations of a self-dual Yang–Mills hierarchy*, Diploma thesis, Max-Planck-Institut für Dynamik und Selbstorganisation, Göttingen, 2006.
- [54] K. Takasaki, “A new approach to the selfdual Yang–Mills equations”, *Commun. Math. Phys.*, **94**:1 (1984), 35–59.
- [55] H. J. de Vega, “Non-linear multi-plane wave solutions of self-dual Yang–Mills theory”, *Commun. Math. Phys.*, **116**:4 (1988), 659–674.
- [56] Д. К. Ниммо, К. Р. Джилсон, Я. Охта, “Применения преобразований Дарбу к самодуальным уравнениям Янга–Миллса”, *ТМФ*, **122**:2 (2000), 284–293.