Общероссийский математический портал

И. В. Тютин, Ш. С. Шахвердиев, Эквивалентность лагранжева и гамильтонова $Sp(2)$ -симметричных БРСТ-квантований, *ТМФ*, 1997, том 110, номер 1, 137–148

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf958>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.67.100

26 апреля 2023 г., 11:23:53

И. В. Тютин*, Ш. С. Шахвердиев†

ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ ЛАГРАНЖЕВА И ГАМИЛЬТОНОВА $Sp(2)$ -СИММЕТРИЧНЫХ БРСТ-КВАНТОВАНИЙ

Доказаны существование (в рамках теории возмущений) локального решения $Sp(2)$ -квантового мастер-уравнения и эквивалентность лагранжева и гамильтонова $Sp(2)$ -квантований.

1. ВВЕДЕНИЕ

В последнее время методы квантования калибровочных теорий в лагранжевом формализме Баталина–Вилковического (БВ) и гамильтоновом формализме Баталина–Вилковического–Фрадкина (БВФ) были обобщены на случай, когда гостовские и антигостовские переменные появляются в теории симметричным образом [1–9]. Мы будем называть такое квантование $Sp(2)$ -квантованием, поскольку эффективные действия теории в этом формализме не только симметричны относительно БРСТ- и анти-БРСТ-преобразований переменных, но и обладают глобальной $Sp(2)$ -симметрией, относительно которой стандартные гостовские и антигостовские поля образуют дублеты. В [2–7] было дано доказательство существования решений производящих уравнений ($Sp(2)$ -уравнений) для эффективного действия в лагранжевом подходе и гамильтониана в гамильтоновом подходе, описан произвол решений и доказана эквивалентность $Sp(2)$ -квантования стандартным БВ- и БВФ-квантованиям. Однако, что касается лагранжева подхода, доказательства были формальными в том смысле, что локальность решений производящих уравнений ($Sp(2)$ -мастер-уравнения и $Sp(2)$ -квантового мастер-уравнения) для эффективного действия фактически являлась гипотезой. В настоящей работе мы устраняем этот дефект и доказываем существование локального решения $Sp(2)$ -уравнений (в рамках теории возмущений). Метод доказательства обобщает на $Sp(2)$ -случай схему рассуждений, использованную ранее [10, 11] для доказательства эквивалентности стандартных БВ- и БВФ-квантований. Вначале строится производящий функционал (статсумма) в гамильтоновом $Sp(2)$ -формализме. В специальной калибровке после интегрирования по части переменных возникает эффективное действие, которое зависит только от переменных лагранжева подхода, локально и построено по

*Физический институт им. П.Н.Лебедева РАН

†Московский государственный университет

правилам лагранжева $Sp(2)$ -квантования. Таким образом, одновременно проверяются как существование локального решения $Sp(2)$ -квантового мастер-уравнения, так и эквивалентность лагранжева и гамильтонова $Sp(2)$ -квантований. Важным элементом в схеме доказательства является переход от исходного действия к классически эквивалентному действию, получаемому из исходного действия исключением части переменных с помощью уравнений движения. Такие действия мы будем называть динамически эквивалентными. Показывается, что если классические действия динамически эквивалентны, то физически эквивалентны и соответствующие квантовые теории, построенные с помощью формализма лагранжева $Sp(2)$ -квантования, т. е. для каждого локального решения $Sp(2)$ -квантового мастер-уравнения одной теории существует физически эквивалентное локальное решение $Sp(2)$ -квантового мастер-уравнения другой теории.

Работа организована следующим образом. В разделе 2 доказывается $Sp(2)$ -квантовая эквивалентность классически динамически эквивалентных теорий в лагранжевом подходе. В разделе 3 построено действие, динамически эквивалентное исходному действию и удобное для сравнения лагранжева и гамильтонова $Sp(2)$ -квантований. В разделе 4 доказывается существование локального решения $Sp(2)$ -мастер-уравнения.

2. $Sp(2)$ -КВАНТОВАЯ ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ В ЛАГРАНЖЕВОМ ПОДХОДЕ ДИНАМИЧЕСКИ ЭКВИВАЛЕНТНЫХ ТЕОРИЙ

Рассмотрим действие $S \equiv S(x, y)$, для которого уравнения движения $\delta S / \delta y^n = 0$ однозначно определяют y^n как некоторую функцию x^i и их производных по времени конечного порядка: $y = f(x)$. Для упрощения формул мы предположим, что все переменные классической теории четные. Редуцированное действие $S_1(x) \equiv S(x, f(x))$ в классической теории физически эквивалентно исходному действию $S(x, y)$. Мы будем говорить, что две такие теории динамически эквивалентны.

В [11] было показано, что с помощью неособенных пертурбативно локальных замен переменных действие $S(x, y)$ может быть приведено к виду

$$S(x, y) = S^{(1)}(x, z) = S^{(2)}(x, Y), \quad S^{(2)}(x, Y) = S_1(x) + \frac{1}{2} \int dt Y^n \Lambda_{nm}^{(0)} Y^m, \\ S^{(1)}(x, z) = S_1(x) + \frac{1}{2} \int dt z^n \Lambda_{nm}(x, z) z^m, \quad \Lambda_{nm}^{(0)} = \Lambda_{nm}(0, 0).$$

Замена переменных $z^n \equiv y^n - f^n(x) \rightarrow Y^n$ обладает свойством

$$Y^n = \mu_m^n(x, z) z^m, \quad \mu_m^n(x, z) = \delta_m^n + O(x, z), \\ z^n(x, Y) = \tilde{\mu}_m^n(x, Y) Y^m, \quad \tilde{\mu}_m^n = \delta_m^n + O(x, Y).$$

Матрицы Λ_{nm} , μ_m^n , $\tilde{\mu}_m^n$ и их обратные пертурбативно являются дифференциальными операторами конечного порядка (ДОКП), а определитель матрицы $\Lambda_{nm}^{(0)}$ — ненулевое число.

Перейдем к доказательству $Sp(2)$ -квантовой эквивалентности теорий с классическими действиями S и S_1 .

Довольно просто это сделать в переменных (x, Y) . Квантовое действие $\mathbf{W}_1$ для классического действия $S_1(x)$ строится следующим образом. Ищется решение $Sp(2)$ -квантового мастер-уравнения (как обычно, $\varepsilon(F)$ означает грассманову четность величины F , ε_i – грассманову четность i -й координаты)

$$\bar{\Delta}_1^a \exp \left[\frac{i}{\hbar} W_1 \right] = 0, \quad (1)$$

$$\bar{\Delta}_1^a = \Delta_1^a + \frac{i}{\hbar} V_1^a = \int dt (-1)^{\varepsilon_A} \frac{\delta}{\delta \Phi_1^A} \frac{\delta}{\delta \Phi_{1A}^*} + \int dt \frac{i}{\hbar} \varepsilon^{ab} \Phi_{1Ab}^* \frac{\delta}{\delta \bar{\Phi}_{1A}}$$

с граничным условием

$$W_1 \big|_{\hbar=0, \Phi_{1a}^* = \bar{\Phi}_1=0} = S_1 \equiv S(x, f(x)), \quad (2)$$

где $\Phi_1^A = (x^i, C^{\alpha a}, B^{\alpha})$. Кроме того, W_1 сохраняет лагранжево новое гостовское число lngh : $\text{lngh}(x) = 0$, $\text{lngh}(C^a) = 1$, $\text{lngh}(B) = 2$, $\text{lngh}(W_1) = 0$, $\text{lngh}(\bar{\Phi}) = -2 - \text{lngh}(\Phi)$, $\text{lngh}(\Phi_a^*) = -1 - \text{lngh}(\Phi)$. Действие $\mathbf{W}_1$ равно: $\exp[(i/\hbar)\mathbf{W}_1] = K_1 \exp[(i/\hbar)W_1]$, где оператор калибровочного преобразования $K_1 = \exp((i\hbar/2)\varepsilon_{ab}[\bar{\Delta}_1^b, [\bar{\Delta}_1^a, F_1]]_+)$, а калибровочный бозон F_1 – произвольная локальная функция (или оператор). Антисимметричные тензоры ε^{ab} и ε_{ab} нормированы следующим образом: $\varepsilon_{12} = \varepsilon^{21} = 1$.

Для классической теории с действием $S^{(2)}(x, Y)$ соответствующее выражение есть

$$\bar{\Delta}^{(2)a} \exp \left[\frac{i}{\hbar} W^{(2)} \right] = 0, \quad (3)$$

$$\bar{\Delta}^{(2)a} = \bar{\Delta}_1^a + \int dt (-1)^{\varepsilon_n} \frac{\delta}{\delta Y^n} \frac{\delta}{\delta Y_{na}^*} + \int dt \frac{i}{\hbar} \varepsilon^{ab} Y_{nb}^* \frac{\delta}{\delta \bar{Y}_n},$$

$$W^{(2)} \big|_{\hbar=0, \Phi_a^{(2)*} = \bar{\Phi}^{(2)}=0} = S^{(2)}(x, Y),$$

$$\exp \left[\frac{i}{\hbar} \mathbf{W}^{(2)} \right] = \exp \left(\frac{i\hbar}{2} \varepsilon_{ab} [\bar{\Delta}^{(2)b}, [\bar{\Delta}^{(2)a}, F^{(2)}]]_+ \right) \exp \left(\frac{i}{\hbar} W^{(2)} \right), \quad (4)$$

где $W^{(2)}(\Phi^{(2)}, \Phi_a^{(2)*}, \bar{\Phi}^{(2)})$ сохраняет лагранжево новое гостовское число, $\Phi^{(2)} = (\Phi_1, Y^n)$, $\text{lngh}(Y) = 0$.

Пусть даны некоторое действие W_1 и калибровочная функция F_1 . Выберем в качестве $W^{(2)}$ и $F^{(2)}$ следующие величины :

$$W^{(2)} = W_1(\Phi_1, \Phi_{1a}^*, \bar{\Phi}_1) + \frac{1}{2} Y^n \Lambda_{nm}^0 Y^m, \quad F^{(2)} = F_1.$$

Очевидно, что $W^{(2)}$ удовлетворяет $Sp(2)$ -квантовому мастер-уравнению (3) и граничному условию (4) и что теории с действиями $\mathbf{W}_1$ и $\mathbf{W}^{(2)} = \mathbf{W}_1 + \frac{1}{2} Y^n \Lambda_{nm}^0 Y^m$ физически эквивалентны.

Обратно, пусть дано решение $W^{(2)}$ мастер-уравнения (3), сохраняющее lngh . Возьмем калибровочный бозон $F^{(2)}$ не зависящим от $Y, Y_a^*, \bar{Y}$: $F^{(2)} = F_1$,

$$K^{(2)} = \exp \left(\frac{i\hbar}{2} \varepsilon_{ab} [\bar{\Delta}^{(2)b}, [\bar{\Delta}^{(2)a}, F_1]]_+ \right) = \exp \left(\frac{i\hbar}{2} \varepsilon_{ab} [\bar{\Delta}_1^b, [\bar{\Delta}_1^a, F_1]]_+ \right) = K_1.$$

Определим квантовые действия $\mathbf{W}_1$ и W_1 выражениями

$$\begin{aligned} \exp \left[\frac{i}{\hbar} \mathbf{W}_1(\Phi_1, \Phi_{1a}^*, \bar{\Phi}_1) \right] &= \int dY \exp \left[\frac{i}{\hbar} \mathbf{W}^{(2)}(\Phi^{(2)}, \Phi_a^{*(2)}, \bar{\Phi}^{(2)}) \right] \Big|_{Y_a^* = \bar{Y} = 0} = \\ &= K_1 \exp \left[\frac{i}{\hbar} W_1 \right], \end{aligned}$$

где

$$\exp \left[\frac{i}{\hbar} W_1 \right] = \int dY \exp \left[\frac{i}{\hbar} W^{(2)} \right] \Big|_{Y_a^* = \bar{Y} = 0}. \quad (5)$$

Очевидно, что W_1 удовлетворяет граничному условию (2) и сохраняет лагранжево новое гостовское число. W_1 является локальным функционалом. Это следует из того, что согласно (5) W_1 строится с помощью диаграммных правил Фейнмана с локальными вершинами из $W^{(2)}$ и пропагатором $(\Lambda_{nm}^0)^{-1}$, который является ДОКП. Наконец, W_1 удовлетворяет $Sp(2)$ -квантовому мастер-уравнению (1). Доказательство этого факта см. в приложении 1.

Итак, действие $\mathbf{W}_1$ имеет структуру, определяемую правилами лагранжева $Sp(2)$ -квантования, и по построению физически эквивалентно действию $\mathbf{W}^{(2)}$. Для перехода к переменным (x, y) заметим, что в классической теории переменные (x, y) и (x, Y) связаны локальной заменой переменных. В приложении 2 показано, что для произвольной неособенной замены переменных $\Phi \rightarrow \Phi' = \Psi(\Phi)$ существует калибровочное преобразование K_Ψ , которое в пределе $\Phi_a^*, \bar{\Phi} \rightarrow 0$ сводится к замене переменных $\Phi \rightarrow \Phi'$. Это позволяет установить физическую эквивалентность теорий в переменных Φ и Φ' . В обсуждаемом случае замена $\Phi \rightarrow \Phi'$ выглядит следующим образом: $(x, y) \rightarrow (x, Y)$, $(C^{\alpha a}, B^\alpha) \rightarrow (C^{\alpha a}, B^\alpha)$, что и позволяет просто воспользоваться результатами приложения 2.

3. ПЕРЕХОД К УДОБНОМУ ДЕЙСТВИЮ

Доказательство эквивалентности лагранжева и гамильтонова $Sp(2)$ -квантований удобно проводить не непосредственно для исходного действия

$$S_L \equiv \int dt L(q, \dot{q}), \quad (6)$$

а для действия, полученного из (6) в несколько шагов, каждый из которых использует переход к динамически эквивалентному действию и неособенную локальную замену переменных. Здесь мы приведем только основные моменты этой процедуры (подробности см. в [11]). Вначале мы переходим к действию в гамильтоновой форме $S_H = \int dt (p\dot{q} - H(p, q) - \lambda \Phi^{(1)})$. Действие S_H динамически эквивалентно действию S_L , поскольку переменные $y = (p, \lambda)$ однозначно выражаются как функции q и $\dot{q}$ из уравнений $\delta S_H / \delta p = \delta S_H / \delta \lambda = 0$ и на этих экстремальных $S_H = S_L$. После этого выполняется замена переменных [12] $(p, q, \lambda) \rightarrow (p', q', \lambda')$, которая для переменных (p, q) является канонической, так что действие S_H принимает вид $S_H \rightarrow S'_H$,

$$S'_H = \int dt \left(p' \dot{q}' - H_{ph}(\omega) - A(\omega, P^{(2)}, Q) P^{(2)} - \Delta H - \lambda_P P_{(1)} - \lambda_\theta \theta^{(1)} \right),$$

где $\eta' = (p', q') = (\omega; P, Q; \theta)$, θ представляет собой набор канонических пар, описывающих связи второго рода, P набор импульсов, описывающих связи первого рода, Q – набор координат, сопряженных P , ω – набор канонических пар, описывающих физические степени свободы, $\theta^{(1)}, P_{(1)}, \lambda_\theta, \lambda_P$ – набор первичных связей и соответствующих лагранжевых множителей, $\theta^{(2)}, P^{(2)}$ – набор всех вторичных связей (связей второго, третьего этапов и т. д.), $\theta = (\theta^{(1)}, \theta^{(2)})$, $P = (P^{(1)}, P^{(2)})$. Функция ΔH имеет структуру $\Delta H = O(P^{(2)}\theta^{(2)}, (\theta^{(2)})^2)$.

Пертурбативно переменные $\bar{\theta} = (\theta, \lambda_\theta)$ однозначно выражаются как функции ω, P, Q и их производных по времени конечного порядка из уравнений $\delta S'_H / \delta \bar{\theta} = 0$. Исключая переменные $\bar{\theta}$ из S'_H , мы переходим к динамически эквивалентному действию S''_H :

$$S''_H = \int dt \left(\omega_p \dot{\omega}_q + P \dot{Q} - H_{\text{ph}}(\omega) - A(\omega, P^{(2)}, Q)P^{(2)} - \lambda_P P_{(1)} + C \right),$$

где C – функция ω, P, Q и их производных по времени, по крайней мере квадратичная по P (и их производных по времени).

Как показано в [11], существует локальная обратимая замена переменных $(\omega, P, Q, \lambda_P) \rightarrow (\omega, P, Q', \lambda_P)$, так что в новых переменных действие принимает вид

$$S''_H \rightarrow S_{1H} = \int dt (\omega_p \dot{\omega}_q + P \dot{Q} - H_{\text{ph}}(\omega) - A P^{(2)} - \lambda_P P_{(1)}).$$

Действие S_{1H} динамически эквивалентно действию S_L , имеет гамильтонову форму и включает связи только первого рода. Именно для действия S_{1H} мы явно проверим эквивалентность лагранжева и гамильтонова $Sp(2)$ -квантований.

4. ПОСТРОЕНИЕ $Sp(2)$ -ЛАГРАНЖЕВА ДЕЙСТВИЯ

Мы будем следовать схеме, использованной в [10, 11]. Именно, мы применим гамильтоново $Sp(2)$ -квантование к действию S_{1H} и с его помощью построим решение $Sp(2)$ -квантового мастер-уравнения, отвечающего действию S_{1H} . Пусть существует L этапов выявления связей. Для простоты предположим, что каждое из них содержит одинаковое число связей. Обозначим через

$$\Gamma = \left(\omega; P_{(i)}, Q^{(i)}; C^{(i)a}, \mathcal{P}_{(i)a}; \lambda_{(i)}, \pi^{(i)} \right), \quad i = 1, \dots, L,$$

полный набор фазовых переменных гамильтонова $Sp(2)$ -квантования. Динамика системы описывается унитаризирующим гамильтонианом

$$\begin{aligned} \mathbf{H} &= \mathcal{H} + \frac{1}{2} \varepsilon_{ab} \{ \{ F, \Omega^b \}, \Omega^a \}, \\ \{ \Omega^a, \Omega^b \} &= 0, \quad \{ \mathcal{H}, \Omega^a \} = 0. \end{aligned} \tag{7}$$

В данном случае можно выбрать $\Omega^a = P_{(i)} C^{(i)a} + \varepsilon^{ab} \mathcal{P}_{(i)b} \pi^{(i)}$. $\mathcal{H}$ является решением производящих уравнений (7), удовлетворяющим граничному условию

$$\mathcal{H} \Big|_{C^a=\pi=\mathcal{P}_a=\lambda=0} = H_{(\text{ph})}(\omega) + \sum_{i=2}^L A^{(i)}(\omega, P^{(2)}, Q) P_{(i)}$$

и сохраняющим гамильтоново новое гостовское число hngb : $\text{hngb}(\omega) = \text{hngb}(P) = \text{hngb}(Q) = \text{hngb}(\mathcal{H}) = 0$, $\text{hngb}(C^a) = -\text{hngb}(P) = 1$, $\text{hngb}(\pi) = -\text{hngb}(\lambda) = 2$. Гамильтоново новое гостовское число калибровочного бозона F может быть отлично от -2 . Таким образом, унитаризующий гамильтониан, вообще говоря, не сохраняет гамильтоново новое гостовское число. Гамильтониан $\mathcal{H}$ можно выбрать в виде

$$\mathcal{H} = H_{\text{ph}}(\omega) + \sum_{i=2}^L A^{(i)}(\omega, P_{(2)}, Q) P_{(i)} + \sum_{i=2}^L \sum_{j=1}^L \left(\mathcal{P}_{(i)a} V^{(i)}_{(j)} C^{(j)a} - \lambda_{(i)} V^{(i)}_{(j)} \pi^{(j)} \right) + O((C^a), C^a \pi, \pi^2), \quad V^{(i)}_{(j)} = \frac{\partial A^{(i)}}{\partial Q^{(j)}}.$$

Из-за сохранения гамильтонова нового гостовского числа последнее слагаемое в выражении для $\mathcal{H}$, по крайней мере, кубично по фазовым переменным. Кроме того, можно показать, что $\mathcal{H}$ в принципе можно выбрать не зависящим от $\mathcal{P}_{(1)a}$, $P_{(1)}$, $\lambda_{(1)}$. Как показано в [2], физические ответы не зависят ни от выбора решения для Ω^a и $\mathcal{H}$, ни от выбора калибровочного бозона F . Выберем калибровочный бозон в виде

$$F = \frac{1}{2\varepsilon} \sum_{i=1}^L \{(Q^{(i)})^2 - \lambda_{(i)}^2\}.$$

Тогда унитаризующий гамильтониан равен

$$\mathbf{H} = \mathcal{H} + \frac{1}{\varepsilon} \sum_{i=1}^L \left(\mathcal{P}_{(i)1} \mathcal{P}_{(i)2} - C^{(i)1} C^{(i)2} - \lambda_{(i)} P_{(i)} - \pi^{(i)} Q^{(i)} \right).$$

Соответствующее выражение для статсуммы принимает вид

$$Z = \int D\Gamma \exp \left[\frac{i}{\hbar} \int dt (\Gamma_p \dot{\Gamma}_q - \mathbf{H}) \right] \rightarrow \int D\omega \exp \left[\frac{i}{\hbar} \int dt (\omega_p \dot{\omega}_q - H_{\text{ph}}(\omega)) \right]$$

в пределе $\varepsilon \rightarrow 0$, что тождественно совпадает с выражением для статсуммы при квантовании теории S_{1H} или исходной теории S_L по Дираку в калибровке $\chi^{(i)} = Q^{(i)}$.

Перейдем к построению решения $Sp(2)$ -квантового мастер-уравнения. Введем в рассмотрение эффективное действие

$$W_H = \int dt \left(\Gamma_p \dot{\Gamma}_q - \mathbf{H} + \Gamma_{Aa}^* \{\Gamma^A, \Omega^a\} + \frac{1}{2} \varepsilon_{ab} \bar{\Gamma}_A \{\{\Gamma^A, \Omega^b\}, \Omega^a\} \right).$$

Нетрудно проверить, что W_H удовлетворяет $Sp(2)$ -квантовому мастер-уравнению

$$\bar{\Delta}_\Gamma^a \exp \left[\frac{i}{\hbar} W_H \right] = 0, \quad \bar{\Delta}_\Gamma^a = \int dt (-1)^{\varepsilon(\Gamma)} \frac{\delta}{\delta \Gamma} \frac{\delta}{\delta \Gamma_a^*} + \int dt \frac{i}{\hbar} \varepsilon^{ab} \Gamma_b^* \frac{\delta}{\delta \Gamma}.$$

Разделим полный набор фазовых переменных на две группы X и Y :

$$X = \left(\omega; P, Q; \lambda_{(1)} \equiv \lambda_P, C^a \equiv C^{(L)a}, B \equiv \pi^{(L)} \right);$$

остальные переменные включены в группу Y . В качестве калибровочного бозона $F(\Gamma)$ выберем функцию

$$F(\Gamma) = \frac{1}{2}\lambda_{(1)}^2 + F_L(X).$$

Определим действие $\widetilde{W}(X, X_a^*, \bar{X})$ с помощью соотношения

$$\exp \left[\frac{i}{\hbar} \widetilde{W}(X, X_a^*, \bar{X}) \right] = \int DY \exp \left[\frac{i}{\hbar} W_H \right] \Big|_{Y_a^* = \bar{Y} = 0}.$$

Действие $\widetilde{W}$ обладает следующими свойствами:

1. $\widetilde{W}$ удовлетворяет $Sp(2)$ -квантовому мастер-уравнению

$$\bar{\Delta}_X^a \exp \left[\frac{i}{\hbar} \widetilde{W} \right] = 0, \quad \bar{\Delta}_X^a = \int dt (-1)^{\varepsilon(X)} \frac{\delta}{\delta X} \frac{\delta}{\delta X_a^*} + \int dt \frac{i}{\hbar} \varepsilon^{ab} X_b^* \frac{\delta}{\delta \bar{X}}.$$

2. Калибровочное условие $F_L(X)$ входит в $\widetilde{W}$ с помощью калибровочного преобразования

$$\begin{aligned} \exp \left[\frac{i}{\hbar} \widetilde{W} \right] &= \exp \left\{ \frac{i\hbar}{2} \varepsilon_{ab} [\bar{\Delta}^b, [\bar{\Delta}^a, F_L(X)]]_+ \right\} \exp \left[\frac{i}{\hbar} W_{(0)} \right], \\ \exp \left[\frac{i}{\hbar} W_{(0)} \right] &= \int DY \exp \left[\frac{i}{\hbar} \int dt \left(\Gamma_p \dot{\Gamma}_q - \mathcal{H} - \frac{1}{2} \varepsilon_{ab} \left\{ \left\{ \frac{1}{2} \lambda_{(1)}^2, \Omega^b \right\}, \Omega^a \right\} + \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \left. + X_{Aa}^* \{X^A, \Omega^a\} + \frac{1}{2} \varepsilon_{ab} \bar{X}_A \{ \{X^A, \Omega^b\}, \Omega^a \} \right) \right] \right]. \end{aligned}$$

Действие $W_{(0)}$ удовлетворяет $Sp(2)$ -квантовому мастер-уравнению, однако оно не сохраняет новое гостовское число в лагранжевом формализме по двум причинам: лагранжево и гамильтоново новые гостовские числа для переменных $\lambda_{(1)}$, $\lambda_{(1)a}^*$, $\bar{\lambda}_{(1)}$ не совпадают; калибровка $F = \frac{1}{2}\lambda_{(1)}^2$ нарушает гамильтоново новое гостовское число. Лагранжево новое гостовское число определено следующим образом: $\text{lngh}(\omega) = \text{lngh}(P) = \text{lngh}(Q) = \text{lngh}(\lambda) = 0$, $\text{lngh}(C^a) = 1$, $\text{lngh}(B) = 2$, $\text{lngh}(\bar{X}) = -2 - \text{lngh}(X)$, $\text{lngh}(X_a^*) = -1 - \text{lngh}(X)$.

Оказывается, однако, что $W_{(0)}$ отличается от действия, сохраняющего lngh , калибровочным преобразованием. Именно, пусть

$$\exp \left[\frac{i}{\hbar} W_{(0)} \right] = K_2 K_3 \exp \left[\frac{i}{\hbar} W \right], \quad \exp \left[\frac{i}{\hbar} W \right] = K_3^{-1} K_2^{-1} \exp \left[\frac{i}{\hbar} W_{(0)} \right],$$

где

$$\begin{aligned} K_2^{-1} &= \exp \left\{ \frac{i\hbar}{2} \varepsilon_{ab} [\bar{\Delta}^b, [\bar{\Delta}^a, F_2]]_+ \right\}, \quad K_3^{-1} = \exp \left\{ \frac{i\hbar}{2} \varepsilon_{ab} [\bar{\Delta}^b, [\bar{\Delta}^a, F_3]]_+ \right\}, \\ F_2 &= \frac{1}{2} \bar{\lambda}_{(1)}^2, \quad K_2^{-1} = \exp \left\{ \bar{\lambda}_{(1)} \frac{\delta}{\delta \lambda_{(1)}} + \frac{i}{\hbar} \lambda_{(1)1}^* \lambda_{(1)2}^* \right\}, \\ F_3 &= \frac{1}{2} \lambda_{(1)}^2, \quad K_3^{-1} = \exp \left\{ -i\hbar \frac{\delta}{\delta \lambda_{(1)1}^*} \frac{\delta}{\delta \lambda_{(1)2}^*} - \lambda_{(1)} \frac{\delta}{\delta \bar{\lambda}_{(1)}} \right\}. \end{aligned}$$

Явное вычисление действия операторов K_2^{-1} , K_3^{-1} и интеграция по $\mathcal{P}_{(1)a}$ дает

$$\begin{aligned} \exp \left[\frac{i}{\hbar} W \right] = & \int \prod_{i \geq 2} D\mathcal{P}_{(i)a} \prod_{k \leq L-1} DC^{(k)b} \prod_{i \geq 2} D\lambda_{(i)} \prod_{k \leq L-1} D\pi^{(k)} \times \\ & \times \exp \left[\frac{i}{\hbar} \int dt \left(\pi^{(1)} \dot{\lambda}_{(1)} + \sum_{i=2}^L \pi^{(i)} \dot{\lambda}_{(i)} + \lambda_{(1)a}^* \dot{C}^{(1)a} + \sum_{i=2}^L \mathcal{P}_{(i)a} \dot{C}^{(i)a} + \right. \right. \\ & + S_{1H} - \mathcal{H} \big|_{\mathcal{P}_{(1)a} \rightarrow \lambda_{(1)a}^*, \lambda_{(1)} \rightarrow \bar{\lambda}_{(1)}} + \sum_{i=1}^L Q_{(i)a}^* C^{(i)a} + \\ & \left. \left. + C_{(L)a}^* \varepsilon^{ab} \pi^{(L)} - \sum_{i=1}^L \bar{Q}_{(i)} \pi^{(i)} \right) \right]. \end{aligned} \quad (8)$$

Припишем переменным интегрирования в (8) лагранжевы новые гостовские числа, равные их соответствующим гамильтоновым новым гостовским числам. Тогда мера интегрирования и каждое слагаемое в экспоненте подынтегрального выражения в (8) явно сохраняют лагранжево новое гостовское число. Таким образом, действие W сохраняет лагранжево новое гостовское число. Очевидно, что W удовлетворяет граничному условию

$$W \big|_{\hbar=0, X_a^*=\bar{X}=0} = S_{1H}.$$

Остается проверить локальность действия W . Из выражения (8) для действия W следует, что оно вычисляется по правилам Фейнмана с локальными вершинами и пропагаторами переменных $C^{(i)a}$, $\pi^{(i)}$, $i = 1, \dots, L-1$ и $\mathcal{P}_{(i)a}$, $\lambda_{(i)}$, $i = 2, \dots, L$, определяемыми действием

$$\begin{aligned} \int dt \left[\sum_{i=2}^{L-1} (\pi^{(i)} \dot{\lambda}_{(i)} + \mathcal{P}_{(i)a} \dot{C}^{(i)a}) - \sum_{i=2}^L \sum_{j=1}^{L-1} \left(\mathcal{P}_{(i)a} v^{(i)}_{(j)} C^{(j)a} - \lambda_{(i)} v^{(i)}_{(j)} \pi^{(j)} \right) \right] \equiv \\ \equiv \int dt \left(C^{(i)a} \sigma_{(i)}^{(j)} \mathcal{P}_{(j)a} + \pi^{(i)} \sigma_{(i)}^{(j)} \lambda_{(j)} \right), \quad j \geq 2, \quad i \leq L-1, \\ v^{(j)}_{(i)} = V^{(j)}_{(i)} \big|_{\omega=P=Q=0}. \end{aligned}$$

Отметим, что уравнения движения, которые следуют из вариации S_{1H} по λ_P , $Q^{(i)}$, $i = 1, \dots, L-1$, в линейном приближении по переменным имеют вид

$$\sum_{j=1}^L A^{(i)(j)} P_{(j)} = 0, \quad A^{(i)(j)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ * & \sigma \end{pmatrix}. \quad (9)$$

Так как $P = 0$ является единственным решением уравнений (10), $\det A = \det \sigma$ не содержит операторов дифференцирования по времени, так что σ^{-1} есть ДОКП. Отсюда следует, что пропагаторы переменных $C^{(i)a}$, $\pi^{(i)}$, $i = 1, \dots, L-1$, и $\mathcal{P}_{(i)a}$, $\lambda_{(i)}$, $i = 2, \dots, L$, локальны во времени.

Итак, действие W построено по правилам лагранжева $Sp(2)$ -квантования теории с классическим действием S_{1H} и физически эквивалентно результату дираковского квантования этой классической теории. Поскольку исходное классическое действие S_L динамически эквивалентно действию S_{1H} , мы заключаем, что в исходной теории существует решение $Sp(2)$ -квантового мастер-уравнения, физически эквивалентное квантованию в рамках формализма Дирака. В этом смысле лагранжево и гамильтоново $Sp(2)$ -квантования эквивалентны.

Отметим, что из приведенного рассмотрения следует, что $Sp(2)$ -квантовое мастер-уравнение в общем случае имеет локальное решение, удовлетворяющее заданному граничному условию.

Ш.С.Ш. благодарит за финансовую поддержку Российский фонд фундаментальных исследований (контракт № 96–02–17314). И.В.Т. благодарит за поддержку Российский фонд фундаментальных исследований и Комиссию европейского сообщества (контракт Р ФФИ–INTAS–96–829i).

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Докажем следующее утверждение. Пусть дано действие $W(\Phi, \Phi_a^*, \bar{\Phi})$, являющееся решением $Sp(2)$ -квантового мастер-уравнения

$$\bar{\Delta}^a \exp \left[\frac{i}{\hbar} W \right] = 0.$$

Пусть переменные Φ разбиты на две группы: $\Phi = (\Phi_1, \varphi)$. Тогда действие $W_1(\Phi_1, \Phi_{1a}^*, \bar{\Phi}_1)$:

$$\exp \left[\frac{i}{\hbar} W_1(\Phi_1, \Phi_{1a}^*, \bar{\Phi}_1) \right] = \int D\varphi \exp \left[\frac{i}{\hbar} W(\Phi, \Phi_a^*, \bar{\Phi}) \right] \Big|_{\varphi_a^* = \bar{\varphi} = 0},$$

удовлетворяет $Sp(2)$ -квантовому мастер-уравнению

$$\begin{aligned} \bar{\Delta}_1^a \exp \left[\frac{i}{\hbar} W_1 \right] &= 0, \\ \bar{\Delta}_1^a &= \Delta_1^a + \frac{i}{\hbar} V_1^a = \int dt (-1)^{\varepsilon_A} \frac{\delta}{\delta \Phi_1^A} \frac{\delta}{\delta \Phi_{1Aa}^*} + \int dt \frac{i}{\hbar} \varepsilon^{ab} \Phi_{1Ab}^* \frac{\delta}{\delta \bar{\Phi}_{1A}}. \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Оператор $\bar{\Delta}^a$ представляется в виде

$$\bar{\Delta}^a = \bar{\Delta}_1^a + \int dt (-1)^{\varepsilon_n} \frac{\delta}{\delta \varphi^n} \frac{\delta}{\delta \varphi_{na}^*} + \int dt \frac{i}{\hbar} \varepsilon^{ab} \varphi_{nb}^* \frac{\delta}{\delta \bar{\varphi}_n}.$$

Напишем очевидное равенство

$$\begin{aligned} \bar{\Delta}_1^a \exp \left[\frac{i}{\hbar} W_1 \right] &+ \int D\varphi \int dt \left((-1)^{\varepsilon_n} \frac{\delta}{\delta \varphi^n} \frac{\delta}{\delta \varphi_{na}^*} + \right. \\ &\left. + \frac{i}{\hbar} \varphi_{nb}^* \varepsilon^{ab} \frac{\delta}{\delta \bar{\varphi}_n} \right) \exp \left[\frac{i}{\hbar} W \right] \Big|_{\varphi_a^* = \bar{\varphi} = 0} = 0. \end{aligned} \quad (10)$$

Последнее слагаемое в (10) имеет вид интеграла от полной производной и поэтому равно нулю.

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

Покажем, что замена переменных $z^n \rightarrow Y^n$ может быть обобщена до $Sp(2)$ -калибровочного преобразования. Предварительно мы приведем без доказательства ряд свойств операторов специального вида, которые нам понадобятся ниже.

Пусть Γ^i – набор координат. Рассмотрим оператор

$$\hat{T} = \exp \left\{ t^i(\Gamma) \frac{\delta}{\delta \Gamma^i} \right\}.$$

Оператор $\hat{T}$ действует как оператор замены переменных. Именно: $(\hat{T}F(\Gamma)) = F(\mathbf{\Gamma})$, $\mathbf{\Gamma} = (\hat{T}\Gamma)$, где $(\hat{T}\dots)$ означает, что оператор действует только на функции, появляющиеся внутри скобок.

Оператор вида

$$\hat{U} = \exp \left\{ a(\Gamma) + t^i(\Gamma) \frac{\delta}{\delta \Gamma^i} \right\} \quad (11)$$

может быть представлен в виде

$$\hat{U} = \exp\{\rho(\Gamma)\}\hat{T}, \quad \rho(\Gamma) = \int_0^1 d\alpha \left(\exp \left[\alpha t^i(\Gamma) \frac{\delta}{\delta \Gamma^i} \right] a(\Gamma) \right).$$

В частности имеем

$$\exp \left\{ \frac{\delta}{\delta \Gamma^i} t^i(\Gamma) (-1)^{\varepsilon_i} \right\} = \exp \left\{ \left((-1)^{\varepsilon_i} \frac{\delta t^i(\Gamma)}{\delta \Gamma^i} \right) + t^i(\Gamma) \frac{\delta}{\delta \Gamma^i} \right\} = \frac{D(\mathbf{\Gamma})}{D(\Gamma)} \hat{T}. \quad (12)$$

Перейдем к $Sp(2)$ -теории. Пусть нам задана замена переменных $\Phi \rightarrow \mathbf{\Phi}$. Мы предположим, что существует оператор

$$\hat{T} = \exp \left\{ t^A(\Phi) \frac{\delta}{\delta \Phi^A} \right\},$$

так что

$$\mathbf{\Phi}^A = (\hat{T}\Phi^A). \quad (13)$$

Рассмотрим $Sp(2)$ -калибровочное преобразование вида

$$K = \exp \left(\frac{i\hbar}{2} \varepsilon_{ab} [\bar{\Delta}^b, [\bar{\Delta}^a, \bar{\Phi}_A t^A(\Phi)]_+] \right). \quad (14)$$

Явное вычисление оператора, стоящего в экспоненте дает

$$\begin{aligned} & (-1)^{\varepsilon_A} \frac{\delta t^A}{\delta \Phi^A} + t^A \frac{\delta}{\delta \Phi^A} - (-1)^{\varepsilon_A + \varepsilon_C} \frac{\delta t^C}{\delta \Phi^A} \bar{\Phi}_C \frac{\delta}{\delta \bar{\Phi}_A} - \frac{\delta t^B}{\delta \Phi^A} \Phi_{Ba}^* \frac{\delta}{\delta \Phi_{Aa}^*} - \\ & - \varepsilon_{ab} \frac{i\hbar}{2} (-1)^{\varepsilon_A + \varepsilon_C} \frac{\delta^2 t^C}{\delta \Phi^B \delta \Phi^A} \bar{\Phi}_C \frac{\delta}{\delta \Phi_{Aa}^*} \frac{\delta}{\delta \Phi_{Bb}^*}, \end{aligned}$$

откуда следует очевидное равенство

$$(K \dots) \Big|_{\Phi_{Aa}^* = \bar{\Phi}_A = 0} = \left(\exp \left\{ (-1)^{\varepsilon_A} \frac{\delta t^A}{\delta \Phi^A} + t^A \frac{\delta}{\delta \Phi^A} \right\} \dots \right) \Big|_{\Phi_{Aa}^* = \bar{\Phi}_A = 0}.$$

С использованием (12) получаем

$$\left(K \exp \left(\frac{i}{\hbar} W \right) \right) \Big|_{\Phi_{Aa}^* = \bar{\Phi}_A = 0} = \exp \left(\frac{i}{\hbar} \left[(\hat{T}W) + O(\hbar) \right] \right) \Big|_{\Phi_{Aa}^* = \bar{\Phi}_A = 0}.$$

Таким образом, оператор (14) является искомым обобщением замены переменных (13) до $Sp(2)$ -калибровочного преобразования. Для полноты приведем аналогичные формулы в стандартной формулировке. Пусть $W(\Gamma)$ удовлетворяет квантовому мастер-уравнению

$$\Delta \exp \left[\frac{i}{\hbar} W \right] = 0, \quad \Delta = (-1)^{\varepsilon_I} \int dt \frac{\delta}{\delta \Phi^I} \frac{\delta}{\delta \Phi_I^*}. \quad (15)$$

Назовем оператор

$$\hat{k} = \exp[\Delta, X(\Gamma)]_+, \quad \varepsilon(X(\Gamma)) = 1, \quad (16)$$

калибровочным преобразованием. Пусть $W'(\Gamma)$ – новое действие, построенное по правилу

$$\exp \left(\frac{i}{\hbar} W'(\Gamma) \right) = \left(\hat{k} \exp \left[\frac{i}{\hbar} W(\Gamma) \right] \right) = \exp \left[\frac{i}{\hbar} W(\Gamma) \right] + \Delta B(\Gamma),$$

где $B(\Gamma)$ – некоторая функция. Легко видеть, что W' также удовлетворяет квантовому мастер-уравнению (15) и что действия W и W' физически эквивалентны. Оператор $\hat{k}$ имеет структуру (11), так что он может быть выражен через оператор замены переменных:

$$\hat{k} = \rho(\Gamma) \exp(\hat{X}), \quad \hat{X}F(\Gamma) \equiv \int dt \left(\frac{\delta_r F}{\delta \Phi^A} \frac{\delta_l X}{\delta \Phi_A^*} - \frac{\delta_r F}{\delta \Phi_A^*} \frac{\delta_l X}{\delta \Phi^A} \right) \equiv (F, X),$$

$$\rho(\Gamma) = \left[\frac{D(\Gamma)}{D(\Phi)} \right]^{1/2} = \frac{D(\Phi)}{D(\Gamma)}, \quad \Gamma = \exp(\hat{X})\Gamma.$$

Напомним, что якобиан антиканонической замены переменных, вообще говоря, не равен единице. Действия W и W' связаны соотношением $W'(\Gamma) = W(\Gamma(\Gamma)) - i\hbar \ln \rho(\Gamma)$. Пусть задана замена переменных (13). Калибровочное преобразование, обобщающее эту замену, имеет вид (16) с фермионом, равным $X(\Gamma) = \int dt t^A(\Gamma) \Phi_A^*$.

Список литературы

- [1] *G. Curci, R. Ferrari.* Phys. Lett. 1976. V. B63. P. 91.
- [2] *I. A. Batalin, P. M. Lavrov, I. V. Tyutin.* J. Math. Phys. 1990. V. 31. P. 6.
- [3] *I. A. Batalin, P. M. Lavrov, I. V. Tyutin.* J. Math. Phys. 1990. V. 31. P. 1487.
- [4] *I. A. Batalin, P. M. Lavrov, I. V. Tyutin.* J. Math. Phys. 1990. V. 31. P. 2708.
- [5] *I. A. Batalin, P. M. Lavrov, I. V. Tyutin.* Int. J. Mod. Phys. 1991. V. A6. P. 3599.
- [6] *I. A. Batalin, P. M. Lavrov, I. V. Tyutin.* J. Math. Phys. 1991. V. 32. P. 532.
- [7] *I. A. Batalin, P. M. Lavrov, I. V. Tyutin.* J. Math. Phys. 1991. V. 32. P. 2513.
- [8] *C. M. Hull.* Mod. Phys. Lett. 1990. V. A5. P. 1871.
- [9] *I. A. Batalin, R. Marnelius, A. M. Semikhatov.* Nucl. Phys. 1995. V. B446. P. 249.
- [10] *Г. Б. Грузгорян, Р. П. Грузгорян, И. В. Тютин.* Ядерная физика. 1991. Т. 53. С. 1729.
- [11] *I. A. Batalin, I. V. Tyutin.* Int. J. Mod. Phys. 1996. V. A11. P. 1353.
- [12] *D. M. Gitman, I. V. Tyutin.* Quantization of fields with constraints. Berlin: Springer, 1990.

Поступила в редакцию 25.VII.1996 г.

I. V. Tyutin, S. S. Shahverdiyev

**THE EQUIVALENCE OF THE LAGRANGIAN AND
HAMILTONIAN $Sp(2)$ SYMMETRIC BRST QUANTIZATIONS**

The existence of the local solution to the $Sp(2)$ quantum master equation and equivalence of the Lagrangian and Hamiltonian $Sp(2)$ quantizations are proved (in framework of the perturbation theory).