Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. П. Маслов, Новые формулы, связанные с аналитической теорией чисел, и их приложение к статистической физике, *ТМФ*, 2018, том 196, номер 1, 161–166

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf9597>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.208.226.222

26 апреля 2023 г., 11:49:05

© 2018 г.

В. П. Маслов^{*†}

НОВЫЕ ФОРМУЛЫ, СВЯЗАННЫЕ С АНАЛИТИЧЕСКОЙ ТЕОРИЕЙ ЧИСЕЛ, И ИХ ПРИЛОЖЕНИЕ К СТАТИСТИЧЕСКОЙ ФИЗИКЕ

Со времен глубокой работы Бора и Калькара 1938 года была известна связь формулы Рамануджана в задаче о разбиениях в теории чисел со статистической физикой и теорией ядра. Попытки обобщения этой задачи теории чисел, когда вместо целых чисел используются числа произвольной дискретной последовательности, т. е. построение так называемой абстрактной аналитической теории чисел, предпринимались с начала семидесятых годов прошлого столетия. В статистической физике фигурируют такие параметры, как объем V , температура T и химический потенциал μ , которые не являются целыми числами и, следовательно, связаны с абстрактной аналитической теорией чисел. Связь с физическими понятиями привела автора к новым соотношениям в абстрактной аналитической теории чисел, которые оказались полезными в статистической физике.

Ключевые слова: аналитическая теория чисел, распределения Бозе–Эйнштейна, Ферми–Дирака и Джен tile, самосогласованное уравнение, скачок удельной энергии.

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf9597>

1. Теория чисел и связь бозонов с фермионами. Рассмотрим фундаментальную задачу теории чисел о разбиении целого числа на слагаемые, отличные от нуля. Условия этой задачи записываются в виде

$$\sum_{i=1}^M N_i = N, \quad \sum_{i=1}^M iN_i = M. \quad (1)$$

Эту задачу можно сформулировать следующим образом: *Сколько существует способов представить натуральное число M в виде суммы $N \leq M$ натуральных слагаемых: $M = a_1 + a_2 + \dots + a_N$?*

Работа выполнена по теме государственного задания (№ госрегистрации АААА-А17-117021310377-1).

^{*}Национальный исследовательский университет “Высшая школа экономики”, Москва, Россия. E-mail: v.p.maslov@mail.ru

[†]Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия

Такая постановка задачи эквивалентна следующей: *Сколько существует наборов целых чисел $N_i \geq 0$ таких, что одновременно выполнены равенства (1)?*

Действительно, пусть имеется некоторое разбиение числа M на $N \leq M$ натуральных слагаемых. Пусть N_1 – число слагаемых, равных 1, в этом разбиении, N_2 – число слагаемых, равных 2, и т. д. При этом если слагаемые, равные i , отсутствуют в данном разбиении, то $N_i = 0$. Тогда, очевидно, сумма всех N_i должна быть равна числу всех слагаемых, участвующих в разбиении, т. е. равна N . В то же время сумма всех чисел i , помноженных на число их повторений N_i , должна равняться M .

С другой стороны, очевидно, что любой набор целых чисел $N_i \geq 0$, удовлетворяющий системе (1), соответствует одному разбиению M .

Таким образом, каждое разбиение однозначно соответствует набору целых чисел $N_i \geq 0$, который удовлетворяет системе (1). Следовательно, указанные формулировки задачи теории чисел эквивалентны друг другу.

2. Нецелые значения энергии и числа частиц. Вывод квантования Бора.

Приведенное утверждение справедливо для целых чисел. Нужно отметить, что в книге Ландау и Лифшица [1] и в квантовой термодинамике, включающей в рассмотрение бозоны и фермионы, используются два равенства. Одно из них содержит число частиц N , другое – энергию E . Число частиц можно считать целым числом, однако энергия E не является целым числом (имеет даже размерность). Если использовать замены, нецелое число N также легко превратить в целое число. Поэтому мы рассматриваем равенства (1) применительно не только к целым числам, но и к нецелым числам. Это обстоятельство в теории чисел учитывается в концепции, которая подробно изложена в книге Постникова [2].

Вместе с тем, при значении энергии $\varepsilon_i = i$ мы получаем с точностью до константы квантование Бора не как квантовую аксиоматику, а как следствие из утверждения, приведенного в п. 1.

Фундаментальная задача теории чисел о разложении числа M на N слагаемых в пространстве целых чисел разбивается на два случая. В первом случае среди слагаемых разложения допускаются повторяющиеся слагаемые. Во втором случае повторяющиеся слагаемые не допускаются. Например, требуется разложить число 5 на не более чем три слагаемых. В первом случае будут допустимы четыре варианта разложения: $5 = 2 + 3 = 4 + 1 = 1 + 1 + 3 = 2 + 2 + 1$, во втором случае только два: $5 = 2 + 3 = 4 + 1$. Как видим, число вариантов разложения числа 5 в двух случаях задачи о разложении целых чисел будет различным.

Хорошо известно, что первый случай (с повторяющимися слагаемыми) отвечает распределению Бозе–Эйнштейна, а второй случай (без повторяющихся слагаемых) отвечает распределению Ферми–Дирака. Этот факт указывает на то, что аналитическая теория чисел должна быть связана со статистической физикой. Впервые на связь теории чисел со статистической физикой и теорией ядра обратили внимание Бор и Калькар в работе [3]. В настоящей статье автор решает задачу аналитического продолжения для случая перехода бозе-статистики в ферми-статистику. Данная статья является продолжением работы [4], в которой была подробно изложена термодинамическая концепция автора.

3. Самосогласованное уравнение. Будем обозначать через N_i число частиц, находящихся на i -м уровне энергии. В случае статистики Дженгиля [5] на каждом уровне энергии может находиться не более K частиц. Согласно общепринятым

определениям при $K = 1$ имеет место распределение Ферми–Дирака, при $K = \infty$ – распределение Бозе–Эйнштейна. Однако в силу равенств (1) для бозе-системы очевидно, что $N_i \leq N$. Следовательно, для бозе-системы $K \leq N$.

Из этого следует, что максимально большое значение K равно N , а не бесконечности. Этот физический вывод существенным образом меняет формулы.

В книге [1] вводятся параметры массы m и константы Планка $\hbar$. В теории чисел можно считать все эти константы, а также объем V равными единице. Чтобы сравнивать формулы теории чисел и статистических распределений, мы введем обозначения некоторых величин, которые в теории чисел будут равны единице.

Введем общий параметр Φ , который соотносится с обозначениями, принятыми в книге Ландау и Лифшица [1]:

$$\Phi = \lambda^{2(\gamma+1)} V T^{\gamma+1} = V (\lambda^2 T)^{\gamma+1},$$

где V – объем, T – температура, $\lambda = \sqrt{2\pi m}/2\pi\hbar$.

Для случая $N = K$ автором были получены ранее новые уравнения для энергии E и числа частиц N :

$$E = \Phi T(\gamma + 1) \left(\text{Li}_{2+\gamma}(a) - \frac{1}{(N+1)^{\gamma+1}} \text{Li}_{2+\gamma}(a^{N+1}) \right), \quad (2)$$

$$N = \Phi \left(\text{Li}_{1+\gamma}(a) - \frac{1}{(N+1)^\gamma} \text{Li}_{1+\gamma}(a^{N+1}) \right), \quad (3)$$

где $\gamma = D/2 - 1$, D – число степеней свободы, a – активность.

В статистической физике используются интегральные представления как для бозе-статистики, так и для ферми-статистики и статистики Дженгиля. Автор также использует интегральную форму представления статистических распределений. В частности, интегральное уравнение для числа частиц N имеет вид

$$N = \Phi \beta \int_0^\infty \left(\frac{1}{e^{\varepsilon/T} - 1} - \frac{K+1}{e^{(K+1)\varepsilon/T} - 1} \right) d\varepsilon, \quad \beta = \frac{1}{T}. \quad (4)$$

Максимальное число частиц на уровне энергии в системе имеет место при максимальном значении активности a , т. е. в каустической точке¹⁾ $a = 1$. Это значение $N = K$ мы будем обозначать через N_c .

Соотношение для N_c имеет вид

$$N_c = \Phi \beta \int_0^\infty \left(\frac{1}{e^{\varepsilon/T} - 1} - \frac{N_c + 1}{e^{(N_c+1)\varepsilon/T} - 1} \right) d\varepsilon, \quad \beta = \frac{1}{T}. \quad (5)$$

Таким образом, мы получили самосогласованное уравнение, в котором параметр N_c входит в левую и правую части равенства.

4. Скачок удельной энергии. Нас интересует вопрос о скачке удельной энергии, который имеет место при переходе из ферми-системы в бозе-систему.

Необходимо подчеркнуть, что переход бозона в фермион происходит не в точке $a = 0$, а в точке a , отличной от нуля. Будем обозначать через a_0 , такое значение активности a , при котором число частиц распределения Бозе–Эйнштейна $N = 0$. В этой точке бозонов уже не существует. Это момент перехода, когда бозон уже

¹⁾В термодинамике эта каустика называется спинодалью.

исчез, распавшись на два фермиона, и при этом один из пары фермионов должен куда-то пропасть. Что с ним происходит, на какое расстояние он удалился от оболочки ядра? Это можно вычислить, определив величину энергии, которая была затрачена на распад бозона. Эта энергия очень мала, хотя отрыв фермиона происходит в макроскопическом объеме V . Когда один из фермионов пересек этот объем, то он исчез. Это значит, что фермион отрывается не в оболочке ядра, а в большем объеме. В этой ситуации имеет место скачок спина в макроскопическом объеме. Этот вывод отвечает экспериментам, в частности, описанным Беллом [6]. Отметим, что фермионы не меняются местами. Это значит, что фермионы пронумерованы (см. [7]). Мы вычисляем эту энергию скачка спина как удельную энергию следующим образом.

Фактор сжимаемости $Z = PV/NT$, где P – давление, умноженный на температуру T , является удельной энергией. Чтобы получить скачок удельной энергии, достаточно рассмотреть скачок фактора сжимаемости из ферми-системы в бозе-систему. В работе [8] получена формула для фактора сжимаемости Z , который является удельным отношением, в случае $\gamma < 0$. Это же отношение имеет место и для $\gamma > 0$. Но оно не продолжается для величин, для которых a_0 имеет порядок, больший $O(a_0^2)$.

Скачок фактора сжимаемости из ферми-системы в бозе-систему определяется формулой

$$\Delta Z(a) = Z|_{\text{Fermi}} - Z|_{\text{Bose}} = \frac{\text{Li}_{2+\gamma}(-a)}{\text{Li}_{1+\gamma}(-a)} - \frac{\text{Li}_{2+\gamma}(a)}{\text{Li}_{1+\gamma}(a)}. \quad (6)$$

Скачок фактора сжимаемости при малых a выражается в виде

$$\Delta Z(a) = Z|_{\text{Fermi}} - Z|_{\text{Bose}} = \frac{a}{2^{\gamma+1}} + O(a^2), \quad (7)$$

а скачок удельной энергии E_{spec} имеет вид

$$\Delta E_{\text{spec}}(a) = T(\gamma + 1)\Delta Z(a) = T(\gamma + 1)\frac{a}{2^{\gamma+1}} + O(a^2). \quad (8)$$

При $a = a_0$ получаем

$$\Delta Z(a_0) = \frac{a_0}{2^{\gamma+1}} = -\frac{1}{2^{\gamma+1}\Phi \ln a_0}. \quad (9)$$

Разность энергий для всей системы частиц в случае $\gamma > 0$ не превосходит значения ΔE , вычисляемого по формуле

$$\Delta E = \frac{\gamma + 1}{2^{\gamma+1} \ln \Phi} \text{Li}_{1+\gamma}(1) \left(1 - \frac{1}{(N_c + 1)^\gamma} \right), \quad (10)$$

а в случае $\gamma = 0$ – значения ΔE , вычисляемого по формуле

$$\Delta E = \frac{1}{2 \ln \Phi} \log(N_c + 1), \quad (11)$$

где N_c находится по формуле (5).

В случае $\gamma < 0$ для скачка энергии имеет место выражение

$$\Delta E = \frac{\gamma + 1}{2^{\gamma+1} \Phi \ln \Phi} (\Phi C(\gamma))^{1/(\gamma+1)} = \frac{\gamma + 1}{2^{\gamma+1} \ln \Phi} C(\gamma)^{1/(\gamma+1)} \Phi^{-\gamma/(\gamma+1)}, \quad (12)$$

где

$$C(\gamma) = \frac{1}{\Gamma(\gamma+1)} \int_0^\infty \left(\frac{1}{\xi} - \frac{1}{e^\xi - 1} \right) \xi^\gamma d\xi. \quad (13)$$

Как было показано в работе [8], скачок удельной энергии $E_{\text{спец}}$ имеет вид

$$\Delta E_{\text{спец}}(a_0) = T(\gamma+1)\Delta Z(a) = T(\gamma+1)\frac{a_0}{2^{\gamma+1}} + O(a_0^2). \quad (14)$$

5. Продолжение самосогласованного уравнения. Отметим, что число степеней свободы γ – не обязательно целое число, поскольку оно зависит от величины температуры и является осреднением по числу частиц, у каждой из которых может быть, вообще говоря, свое число степеней свободы. Как было показано выше, случаи, когда $\gamma > 0$ и когда $\gamma < 0$, существенно различаются. Точке $\gamma = 0$ соответствует двумерный случай, который отвечает теории чисел.

В двумерном случае возникают две важные точки. Одна из них – это точка решения самосогласованного уравнения, полученного выше в (5). Другая точка получена Эрдешем, который использовал замечательную формулу Рамануджана. Можно сказать, что точка самосогласованного уравнения ближе к отрицательным значениям γ , а точка Эрдеша ближе к положительным значениям γ . Хотя обе эти точки отвечают случаю $\gamma = 0$.

Скачок от решения самосогласованного уравнения к решению формулы Эрдеша мы продолжаем для значений $\gamma > 0$ так, чтобы при $\gamma = 0$ получилась формула Эрдеша. При этом используется и статистика Дженгиля, и статистика Бозе–Эйнштейна.

Из распределения Бозе–Эйнштейна следует, что

$$T = \left(\frac{M}{\zeta(\gamma+2)} \right)^{1/(\gamma+2)}, \quad (15)$$

где $\zeta(\cdot)$ – дзета-функция Римана.

Обозначим через $\tilde{N}$ значение числа частиц, которые дают вклад в энергию, т. е. $N = N_0 + \tilde{N}$, где N_0 – число частиц, лежащих на нулевом уровне энергии (бозе-конденсат) при $\gamma > 0$.

Соотношение для $\tilde{N}$ в случае $\gamma > 0$ имеет вид

$$\tilde{N} = \left(\frac{M}{\zeta(\gamma+2)} \right)^{1/(\gamma+2)} \ln \left\{ \left(\frac{M}{\zeta(\gamma+2)} \right)^{1/(\gamma+2)} \right\}. \quad (16)$$

Для $\gamma < 0$ формула (7) справедлива (записывается единым образом) как для малых N , так и для больших N . Для $\gamma > 0$ формула (7) “разрывается”: для больших $\tilde{N}$ – это продолжение формулы Эрдеша, а для малых $\tilde{N}$ – это продолжение общей формулы (7).

Таким образом, самосогласованное уравнение непосредственно продолжается для $O(a^2)$ и $\gamma > 0$ и дает точку, в которой бозе-частицы переходят в ферми-частицы.

В силу того что в теории ядра рассматривается, как правило, трехмерный случай, именно формула самосогласованного уравнения для малых N и дает нужный переход, который совершается при достаточно малых значениях активности a (см. рис. 2 работы [8]).

Рис. 1. Асимптотическая сплошная линия зависимости γ от T , заданная формулой (17).

6. Асимптотическая сплошная линия зависимости числа степеней свободы от температуры. Существует много способов аппроксимации гладкой кривой конечного упорядоченного набора точек. В данном разделе приводится способ, основанный на вычислении главного члена асимптотики. Этот способ для случая, когда число частиц N стремится к бесконечности, подробно изложен в работе [4].

Для газа Ван-дер-Ваальса, а также для экспериментально вычисленной спинодали исследуемого газа известна зависимость $Z_{\text{sp}}(xT)$ на отрицательной спинодали. Если приравнять к этому выражению значение Z модели Бозе–Эйнштейна, то можно получить зависимость $\gamma(T)$:

$$Z_{\text{sp}}(xT) = \frac{T^\gamma \zeta(2 + \gamma)}{(C(\gamma))^{1/(\gamma+1)}}, \quad (17)$$

где $C(\gamma)$ определяется соотношением (13) (более подробно см. [4]).

Таким образом, можно получить переход от дискретных значений γ к непрерывной (сплошной) кривой $\gamma(T)$ (см. рис. 1).

Переход к непрерывному случаю можно пояснить на примере грубого приближения. Имеются две частицы, соединенные струной, как гантели. У таких частиц не шесть степеней свободы, а пять. Но если повышать температуру, то струна тоже будет играть роль: она будет вибрировать и давать еще одну степень свободы.

Список литературы

- [1] Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Теоретическая физика*, т. 5: *Статистическая физика. Часть I*, Наука, М., 1976.
- [2] А. Г. Постников, *Введение в аналитическую теорию чисел*, Наука, М., 1971.
- [3] Н. Бор, Ф. Калькар, “О превращениях атомных ядер, вызванных столкновениями с материальными частицами”, *УФН*, **20**:3 (1938), 317–340.
- [4] В. П. Маслов, “Двухфлюидная картина надкритических явлений”, *ТМФ*, **180**:3 (2014), 394–432.
- [5] W.-S. Dai, M. Xie, “Gentile statistics with a large maximum occupation number”, *Ann. Phys.*, **309**:2 (2004), 295–305.
- [6] J. S. Bell, “On the Einstein Podolsky Rosen paradox”, *Physics*, **1**:3 (1964), 195–200.
- [7] V. P. Maslov, “Rotation of a neutron in the coat of Helium-5 as a classical particle for a relatively large value of the hidden parameter t_{meas} ”, *Math. Notes*, **103**:1 (2018), 67–74.
- [8] V. P. Maslov, “Statistical transition of the Bose gas to the Fermi gas”, *Math. Notes*, **103**:6 (2018), 3–9.