Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. В. Павлов, Перенормировка и размерная регуляризация для скалярного поля со связью с кривизной типа Гаусса–Бонне, *ТМФ*, 2004, том 140, номер 2, 241–255

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf96>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.187.58

26 апреля 2023 г., 17:32:11

© 2004 г.

Ю. В. Павлов*

ПЕРЕНОРМИРОВКА И РАЗМЕРНАЯ РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ ДЛЯ СКАЛЯРНОГО ПОЛЯ СО СВЯЗЬЮ С КРИВИЗНОЙ ТИПА ГАУССА–БОННЕ

Рассматривается скалярное поле в искривленном пространстве-времени со связью с кривизной типа Гаусса–Бонне. При такой квадратичной связи с кривизной метрический тензор энергии-импульса не содержит производных от метрики выше второго порядка. Получен метрический тензор энергии-импульса. Найдена геометрическая структура первых трех контрчленов к вакуумным средним тензорам энергии-импульса для произвольной фоновой метрики N -мерного пространства-времени. В однородном изотропном пространстве получены первые три контрчлена n -волновой процедуры, позволяющие вычислять перенормированные значения вакуумных средних тензоров энергии-импульса в размерностях $N = 4, 5$. С помощью размерной регуляризации установлено, что геометрические структуры контрчленов в n -волновой процедуре и в методе эффективного действия совпадают.

Ключевые слова: скалярное поле, квантовая теория в искривленном пространстве, перенормировка, размерная регуляризация.

1. ВВЕДЕНИЕ

Квантовополевые эффекты в искривленном пространстве-времени активно исследуются в настоящее время и могут иметь важное значение в космологии ранней Вселенной и астрофизике (см. [1], [2]). При вычислениях в искривленном пространстве-времени необходимо описать взаимодействие материального поля с внешним гравитационным. Для скалярного поля рассматривались различные типы связи с кривизной. Минимальное взаимодействие заключается в замене в уравнениях свободного поля частных производных на ковариантные. Если, кроме того, в уравнение скалярного поля $\varphi(x)$ добавляется слагаемое $\xi R\varphi$, где R – скалярная кривизна, то при некотором специальном выборе $\xi = \xi_c$ достигается конформная инвариантность уравнений безмассового поля. Условие $\xi = \xi_c$ в ряде работ выделяется как предпочтительное (см., например, [3]). Для скалярных полей в инфляционных моделях [4] обычно предполагается $\xi = 0$. При исследовании квантовых эффектов в искривленном пространстве-времени активно рассматриваются модели с произвольными значениями ξ (см., например, [5]). В случае взаимодействующих полей при перенормировке в искривленном пространстве невозможно сохранить

* Институт проблем машиноведения РАН и Лаборатория теоретической физики им. А. А. Фридмана, Санкт-Петербург, Россия. E-mail: pavlov@lpt.ipme.ru

конформную инвариантность как эффективного, так и просто действия [2]. Модели с произвольным ξ , в которых конформная инвариантность отсутствует уже на классическом уровне, могут быть обобщены добавлением слагаемых, квадратичных по кривизне и т.д. Однако, чтобы избежать радикального изменения теории, следует сохранить важное свойство теорий со взаимодействием вида $\xi R\varphi$: метрический тензор энергии-импульса (ТЭИ) скалярного поля с таким взаимодействием содержит производные метрики не выше второго порядка. Появление высших производных от метрики в метрическом ТЭИ, а следовательно, и в уравнениях Эйнштейна привело бы к качественному изменению теории (см. [6]) еще на классическом (!) уровне.

Требование отсутствия высших производных метрики ранее было положено в основу многомерных обобщений теории гравитации [7]. Такие условия выполняются в многомерных гравитационных теориях Эйнштейна–Гаусса–Бонне, появляющихся как низкоэнергетические приближения струнных теорий [8]. Связь скалярного поля с кривизной, при которой ТЭИ не содержит высших производных метрики, имеет место в теориях с дилатоном, связанным с кривизной посредством инварианта Гаусса–Бонне. Такие теории также появляются как низкоэнергетические следствия в струнных моделях (см., например, [9]).

В данной работе рассматривается перенормировка вакуумных средних ТЭИ скалярного поля со связью с кривизной типа Гаусса–Бонне, определяется геометрическая структура контрчленов в произвольной метрике и рассматривается n -волновая процедура [10] – одна из наиболее эффективных для вычисления перенормированных значений ТЭИ в однородных изотропных пространствах. В разделе 2 вычислен метрический ТЭИ и дано выражение для него, использующее конформный тензор Вейля и удобное для вычислений в однородных изотропных пространствах. В разделе 3 найдена геометрическая структура контрчленов к вакуумным средним ТЭИ в методе эффективного действия. В разделе 4 проведено квантование скалярного поля в однородном изотропном пространстве, вычислены вакуумные средние ТЭИ по вакууму, определяемому методом диагонализации гамильтониана. В разделе 5 вычислены первые три контрчлена n -волновой процедуры в однородном изотропном пространстве-времени, и с помощью размерной регуляризации установлено совпадение их геометрической структуры со структурой контрчленов в методе эффективного действия. В заключении суммируются результаты работы. В приложении 1 приведены выражения для вариаций некоторых геометрических величин, а также тождества Бианки и их следствия, необходимые для получения ТЭИ и контрчленов к его вакуумным средним. В приложении 2 даны выражения для встречающихся в работе геометрических величин в N -мерном однородном изотропном пространстве-времени.

Все вычисления проводятся для N -мерного пространства-времени, что необходимо для проведения размерной регуляризации и может использоваться при исследовании многомерных моделей. В статье используется система единиц, в которой $\hbar = c = 1$. Знаки тензора кривизны и тензора Риччи выбраны так, что $R_{jkl}^i = \partial_l \Gamma_{jk}^i - \partial_k \Gamma_{jl}^i + \Gamma_{nl}^i \Gamma_{jk}^n - \Gamma_{nk}^i \Gamma_{jl}^n$, $R_{ik} = R_{ilk}^l$, где Γ_{jk}^i – символы Кристоффеля.

2. СКАЛЯРНОЕ ПОЛЕ СО СВЯЗЬЮ С КРИВИЗНОЙ ТИПА ГАУССА–БОННЕ

Рассмотрим комплексное скалярное поле $\varphi(x)$ массы m с лагранжианом

$$L(x) = \sqrt{|g|} [g^{ik} \partial_i \varphi^* \partial_k \varphi - (m^2 + V(R)) \varphi^* \varphi] \quad (1)$$

и соответствующим уравнением движения

$$(\nabla^i \nabla_i + V(R) + m^2) \varphi(x) = 0, \quad (2)$$

где ∇_i – ковариантные производные в N -мерном пространстве-времени с метрикой g_{ik} , $g = \det(g_{ik})$; через $V(R)$ обозначена функция, зависящая от инвариантных комбинаций тензора кривизны $R^i{}_{jkl}$ и метрического тензора:

$$V(R) = \xi R + \zeta R^2 + \kappa R_{ij} R^{ij} + \chi R_{ijkl} R^{ijkl} + \dots \quad (3)$$

Уравнение (2) конформно-инвариантно при $m = 0$ и $V(R) = \xi_c R$, где $\xi_c = (N - 2)/[4 \times (N - 1)]$ ($\xi_c = 1/6$ при $N = 4$). Минимальной связи скалярного поля с кривизной соответствует $V(R) \equiv 0$.

Ненулевые константы при квадратичных по кривизне слагаемых в (3), имеющие размерность $[\text{масса}]^{-2}$, приводят в общем случае к наличию в метрическом ТЭИ, а следовательно и в уравнениях Эйнштейна производных метрики третьего и четвертого порядков. Как известно (см. [6]), такие добавки, даже если коэффициенты при них малы, приводят к радикальному изменению теории. Если потребовать, чтобы метрический ТЭИ скалярного поля не содержал производных метрики выше второго порядка, то в качестве $V(R)$ допустима функция

$$V = \xi R + \zeta R_{\text{GB}}^2, \quad (4)$$

где $R_{\text{GB}}^2 \stackrel{\text{def}}{=} R_{lmnp} R^{lmnp} - 4 R_{lm} R^{lm} + R^2$. При такой связи скалярного поля с кривизной, варьируя действие по метрике, получим, используя формулы приложения 1, следующее выражение для метрического ТЭИ:

$$T_{ik} = \partial_i \varphi^* \partial_k \varphi + \partial_k \varphi^* \partial_i \varphi - g_{ik} \partial^l \varphi^* \partial_l \varphi + g_{ik} m^2 \varphi^* \varphi - \\ - 2\xi (G_{ik} + \nabla_i \nabla_k - g_{ik} \nabla^l \nabla_l) (\varphi^* \varphi) - 2\zeta (E_{ik} + P_{ik}) (\varphi^* \varphi), \quad (5)$$

где $G_{ik} = R_{ik} - R g_{ik}/2$ – тензор Эйнштейна,

$$E_{ik} = \frac{\delta \int R_{\text{GB}}^2 \sqrt{|g|} d^N x}{\sqrt{|g|} \delta g^{ik}} = 2 R_{ilmp} R_k{}^{lmp} - \frac{g_{ik}}{2} R_{lmnp} R^{lmnp} - \\ - 4 R^{lm} R_{limk} - 4 R_{il} R_k{}^l + 2 g_{ik} R_{lm} R^{lm} + 2 R R_{ik} - \frac{g_{ik}}{2} R^2, \quad (6)$$

$$P_{ik} = 2 [R \nabla_i \nabla_k + 2 R_{ik} \nabla_l \nabla^l + 2 g_{ik} R_{lm} \nabla^l \nabla^m - R g_{ik} \nabla_l \nabla^l - \\ - 4 R_{l(i} \nabla_{k)} \nabla^l - 2 R_{ilm} \nabla^l \nabla^m]. \quad (7)$$

Здесь введено обозначение симметризации: $A_{n(i} B_{k)} = (A_{ni} B_k + A_{nk} B_i)/2$. Отметим, что $R_{\text{GB}}^2 \equiv 0$ при $N = 2, 3$. Поэтому в этих размерностях не может появиться новых

эффектов от $\zeta \neq 0$. В четырехмерном пространстве-времени $E_{ik} = 0$ (см. [11]), но $P_{ik}(\varphi^*\varphi) \neq 0$ для метрики общего вида при $\varphi(x) \neq \text{const}$.

В четномерных пространствах справедлива теорема Гаусса–Бонне (см., например, [12]), согласно которой для компактного ориентируемого многообразия M четной размерности $N = 2k$ эйлерова характеристика, являющаяся топологическим инвариантом, равна

$$\chi(M) = \int_M E(x) \sqrt{g} d^N x, \quad (8)$$

где g_{ik} – риманова метрика на M ,

$$E(x) = \frac{(-1)^k}{(4\pi)^k k! 2^k} \sum_{\pi, \sigma} (-1)^\pi (-1)^\sigma R^{\pi(1)\pi(2)}_{\sigma(1)\sigma(2)} \dots R^{\pi(N-1)\pi(N)}_{\sigma(N-1)\sigma(N)}. \quad (9)$$

Сумма берется по всем парам перестановок $\{\pi, \sigma\}$ набора $\{1, \dots, N\}$, $(-1)^\pi, (-1)^\sigma$ – знаки перестановок. При $N = 2$ $E(x) = -(4\pi)^{-1} R(x)$. При $N = 4$ выражение под знаком суммы в выражении (9) совпадает с R_{GB}^2 (доказательство см. в работе [11]). Поэтому связь скалярного поля с кривизной в уравнении (2) с $V(R)$ вида (4) естественно называть связью типа Гаусса–Бонне.

Для дальнейшего исследования ТЭИ в однородном изотропном пространстве приведем формулы для E_{ik} и P_{ik} , выразив тензор Римана через конформный тензор Вейля:

$$C_{iklm} = R_{iklm} + \frac{2}{N-2} (R_{m[i} g_{k]l} - R_{l[i} g_{k]m}) + \frac{2R g_{l[i} g_{k]m}}{(N-1)(N-2)}. \quad (10)$$

Здесь квадратные скобки в индексах обозначают антисимметризацию: $A_{n[i} B_{k]m} = (A_{ni} B_{km} - A_{nk} B_{im})/2$. Подставив (10) в (6) и (7), получим

$$E_{ik} = 2C_{ilm} C_k{}^{lmp} - \frac{g_{ik}}{2} C_{lm} C^{lm} - (N-4) {}^{(3)}H_{ik}, \quad (11)$$

$$P_{ik} = 4 \left[\frac{N-3}{N-2} \left(R_{ik} \nabla_l \nabla^l + g_{ik} R_{lm} \nabla^l \nabla^m - 2R_{l(i} \nabla_{k)} \nabla^l + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{NR}{2(N-1)} (\nabla_i \nabla_k - g_{ik} \nabla_l \nabla^l) \right) - C_{ilm} \nabla^l \nabla^m \right], \quad (12)$$

где введенный в статье [13] тензор

$${}^{(3)}H_{ik} = \frac{4}{N-2} C_{ilm} R^{lm} + \frac{2(N-3)}{(N-2)^2} \left[2R_{il} R_k^l - \frac{N}{N-1} R R_{ik} - \right. \\ \left. - g_{ik} \left(R_{lm} R^{lm} - \frac{N+2}{4(N-1)} R^2 \right) \right] \quad (13)$$

ковариантно сохраняется в конформно-плоском случае (т.е. при $C_{iklm} = 0$), в частности, в однородном изотропном пространстве.

3. ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ СТРУКТУРА КОНТРЧЛЕНОВ

В пространстве-времени с метрикой общего вида для анализа геометрической структуры расхождений вакуумных средних ТЭИ удобно использовать размерно-регуляризованное эффективное действие. Для комплексного скалярного поля $\varphi(x)$ с уравнением движения (2) однопетлевое эффективное действие может быть записано в виде (см. [2], [14])

$$S_{\text{eff}} = \int L_{\text{eff}}(x) \sqrt{|g|} d^N x, \quad (14)$$

где

$$L_{\text{eff}}(x) = (4\pi)^{-N/2} \left(\frac{M}{m} \right)^{2\varepsilon} \sum_{j=0}^{\infty} a_j(x) m^{N_0-2j} \Gamma\left(j - \frac{N}{2}\right), \quad (15)$$

$$a_0(x) = 1, \quad a_1(x) = \frac{1}{6}R - V = \left(\frac{4-N}{12(N-1)} + \Delta\xi \right) R - \zeta R_{\text{GB}}^2, \quad (16)$$

$$a_2(x) = \frac{1}{180} R_{lmnpq} R^{lmnpq} - \frac{1}{180} R_{lm} R^{lm} + \frac{1}{72} R^2 - \frac{1}{30} \nabla^l \nabla_l R - \\ - \frac{1}{6} R V + \frac{1}{2} V^2 + \frac{1}{6} \nabla^l \nabla_l V, \quad (17)$$

N – размерность пространства-времени, которая рассматривается как переменная, аналитически продолженная в комплексную плоскость, ε – комплексный параметр, M – константа размерности массы [15], введенная для сохранения обычной размерности L_{eff} ([длина] $^{-N_0}$) в случае $N = N_0 - 2\varepsilon$, $\Gamma(z)$ – гамма-функция, $\Delta\xi \equiv \xi_c - \xi$.

Используя (10), для связи с кривизной типа Гаусса–Бонне (4) выражение для a_2 может быть записано следующим образом:

$$a_2(x) = \frac{(N-6)R_{\text{GB}}^2}{720(N-3)} + \frac{(N-2)C_{lmnpq}C^{lmnpq}}{240(N-3)} - \frac{1}{6} \nabla^l \nabla_l \left(\frac{1}{5} R - V \right) + \\ + \left(\frac{(N-4)(N-6)}{480(N-1)^2} - \frac{\Delta\xi(N-4)}{12(N-1)} + \frac{(\Delta\xi)^2}{2} \right) R^2 + \\ + \left(\frac{(N-4)}{12(N-1)} - \Delta\xi \right) \zeta R R_{\text{GB}}^2 + \frac{1}{2} \zeta^2 R_{\text{GB}}^4. \quad (18)$$

Первые $[N_0/2] + 1$ слагаемых в (15) исключаются для получения перенормированного L_{eff} ($[b]$ обозначает целую часть числа b). Варьированием по g_{ik} соответствующих $j = 0, 1, 2$ слагаемых в эффективном действии получим, с использованием формул приложения 1, вычитаемые из вакуумного ТЭИ члены

$$T_{ik,\varepsilon}[0] = -\frac{m^{N_0}}{2^{N_0-1}\pi^{N_0/2}} \left(\frac{4\pi M^2}{m^2} \right)^\varepsilon \Gamma\left(\varepsilon - \frac{N_0}{2}\right) g_{ik}, \quad (19)$$

$$T_{ik,\varepsilon}[1] = \frac{m^{N_0-2}}{2^{N_0-1}\pi^{N_0/2}} \left(\frac{4\pi M^2}{m^2} \right)^\varepsilon \Gamma\left(1 - \frac{N}{2}\right) \left[\left(\frac{1}{6} - \xi \right) G_{ik} - \zeta E_{ik} \right] = \\ = \frac{m^{N_0-2}}{2^{N_0-1}\pi^{N_0/2}} \left(\frac{4\pi M^2}{m^2} \right)^\varepsilon \left[\Delta\xi \Gamma\left(1 - \frac{N}{2}\right) G_{ik} - \right. \\ \left. - \frac{\Gamma(3 - N/2)}{(N-2)} \left(\frac{G_{ik}}{3(N-1)} + \zeta \frac{4E_{ik}}{(N-4)} \right) \right], \quad (20)$$

$$\begin{aligned}
T_{ik,\varepsilon}[2] = & \frac{m^{N_0-4}}{(4\pi)^{N_0/2}} \left(\frac{4\pi M^2}{m^2} \right)^\varepsilon \left\{ \frac{\Gamma(2-N/2)}{360(N-3)} [(N-6)E_{ik} + 3(N-2)W_{ik}] + \right. \\
& + \left[\frac{\Gamma(4-N/2)}{60(N-1)^2} + \Delta\xi \frac{\Gamma(3-N/2)}{3(N-1)} + (\Delta\xi)^2 \Gamma\left(2 - \frac{N}{2}\right) \right] {}^{(1)}H_{ik} - \\
& - \zeta \frac{\Gamma(3-N/2)}{3(N-1)} [(R_{ik} + \nabla_i \nabla_k - g_{ik} \nabla_l \nabla^l) R_{\text{GB}}^2 + (E_{ik} + P_{ik})R] + \\
& + \zeta 2\Gamma\left(2 - \frac{N}{2}\right) \left[\zeta \left(\frac{g_{ik}}{4} R_{\text{GB}}^2 + E_{ik} + P_{ik} \right) R_{\text{GB}}^2 - \right. \\
& \left. \left. - \Delta\xi ((R_{ik} + \nabla_i \nabla_k - g_{ik} \nabla_l \nabla^l) R_{\text{GB}}^2 + (E_{ik} + P_{ik})R) \right] \right\}, \quad (21)
\end{aligned}$$

где

$${}^{(1)}H_{ik} = \frac{\delta \int R^2 \sqrt{|g|} d^N x}{\sqrt{|g|} \delta g^{ik}} = 2(\nabla_i \nabla_k R - g_{ik} \nabla^l \nabla_l R) + 2R \left(R_{ik} - \frac{1}{4} R g_{ik} \right), \quad (22)$$

$$\begin{aligned}
W_{ik} = & \frac{\delta \int C_{lmnp} C^{lmnp} \sqrt{|g|} d^N x}{\sqrt{|g|} \delta g^{ik}} = \\
= & E_{ik} + \frac{4(N-3)}{N-2} \left(2R^{lm} R_{limk} - \frac{g_{ik}}{2} R_{lm} R^{lm} - \frac{NR R_{ik}}{2(N-1)} + \frac{NR^2 g_{ik}}{8(N-1)} + \right. \\
& \left. + \frac{N-2}{2(N-1)} \nabla_i \nabla_k R + \frac{g_{ik}}{2(N-1)} \nabla^l \nabla_l R - \nabla^l \nabla_l R_{ik} \right). \quad (23)
\end{aligned}$$

В конформно-плоском случае $C_{iklm} = 0$, $E_{ik}/(4-N) = {}^{(3)}H_{ik}$, $W_{ik} = 0$ и, следовательно,

$$\begin{aligned}
T_{ik,\varepsilon}[1] = & \frac{m^{N_0-2}}{2^{N_0-1}\pi^{N_0/2}} \left(\frac{4\pi M^2}{m^2} \right)^\varepsilon \left[\Delta\xi \Gamma\left(1 - \frac{N}{2}\right) G_{ik} + \right. \\
& \left. + \frac{\Gamma(3-N/2)}{(N-2)} \left(\zeta 4 {}^{(3)}H_{ik} - \frac{G_{ik}}{3(N-1)} \right) \right], \quad (24)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T_{ik,\varepsilon}[2] = & \frac{m^{N_0-4}}{(4\pi)^{N_0/2}} \left(\frac{4\pi M^2}{m^2} \right)^\varepsilon \left\{ {}^{(3)}H_{ik} \left[\frac{-\Gamma(4-N/2)}{90(N-3)} + \right. \right. \\
& + \zeta 4\Gamma\left(3 - \frac{N}{2}\right) \left(\left(\frac{N-4}{12(N-1)} - \Delta\xi \right) R + \zeta R_{\text{GB}}^2 \right) \Big] + \\
& + {}^{(1)}H_{ik} \left[\frac{\Gamma(4-N/2)}{60(N-1)^2} + \Delta\xi \frac{\Gamma(3-N/2)}{3(N-1)} + (\Delta\xi)^2 \Gamma\left(2 - \frac{N}{2}\right) \right] - \\
& - \zeta \frac{\Gamma(3-N/2)}{3(N-1)} [(R_{ik} + \nabla_i \nabla_k - g_{ik} \nabla_l \nabla^l) R_{\text{GB}}^2 + P_{ik}R] + \\
& + \zeta 2\Gamma\left(2 - \frac{N}{2}\right) \left[\zeta \left(\frac{g_{ik}}{4} R_{\text{GB}}^2 + P_{ik} \right) R_{\text{GB}}^2 - \right. \\
& \left. \left. - \Delta\xi ((R_{ik} + \nabla_i \nabla_k - g_{ik} \nabla_l \nabla^l) R_{\text{GB}}^2 + P_{ik}R) \right] \right\}. \quad (25)
\end{aligned}$$

В предположении, что вакуумные средние ТЭИ $\langle T_{ik} \rangle$ являются источниками гравитационного поля (см. [1], [2]), т.е.

$$G_{ik} + \Lambda g_{ik} = -8\pi G (T_{ik}^b + \langle T_{ik} \rangle), \quad (26)$$

где Λ , G – космологическая и гравитационная постоянные, T_{ik}^b – ТЭИ фоновой материи, формулы (19)–(21) позволяют сделать следующий вывод. Первые три вычитания из вакуумного ТЭИ в N -мерном пространстве-времени соответствуют перенормировке космологической и гравитационной постоянных и параметров при квадратичных, кубических и четвертой степени по кривизне слагаемых в затравочном гравитационном лагранжиане следующего вида:

$$L_{gr, \varepsilon} = \sqrt{|g|} \left[\frac{R - 2\Lambda_\varepsilon}{16\pi G_\varepsilon} + \alpha_\varepsilon R_{GB}^2 + \beta_\varepsilon R^2 + \gamma_\varepsilon C_{lmnp} C^{lmnp} + \delta_\varepsilon R R_{GB}^2 + \theta_\varepsilon R_{GB}^4 \right]. \quad (27)$$

Вычитание $T_{ik, \varepsilon}[0]$ согласно (19) соответствует бесконечной перенормировке космологической постоянной Λ_ε . Из (20) следует, что вычитание $T_{ik, \varepsilon}[1]$ соответствует перенормировке гравитационной постоянной G_ε (конечной при $N \rightarrow 4$ для $\xi = \xi_c$) и бесконечной перенормировке параметра α_ε (при $\zeta \neq 0$). Вычитание $T_{ik, \varepsilon}[2]$ согласно (18) и (21) соответствует перенормировке параметров α_ε , β_ε , γ_ε , δ_ε , θ_ε . При $\xi = \xi_c$ и $N \rightarrow 4$ параметры β_ε и δ_ε испытывают конечную перенормировку.

Отметим, что запись в (27) слагаемого с $\alpha_\varepsilon R_{GB}^2$ согласована с использованием размерной регуляризации ($E_{ik} \equiv 0$ только при целых $N = 2, 3, 4$).

При $N \rightarrow 4$ произведения $E_{ik} \Gamma(1 - (N/2))$ и $E_{ik} \Gamma(2 - (N/2))$ имеют конечные пределы для произвольной метрики пространства-времени, поскольку при аналитическом продолжении по размерности зависимость выражений для E_{ik} от N предполагается дробно-рациональной, $E_{ik} = 0$ при $N = 4$ и гамма-функция имеет в точках 0 и -1 полюсы первого порядка. Поэтому соответствующие слагаемые в (20) и (21) конечны, и для получения конечных величин в уравнении (26), описывающем обратное влияние квантованного поля на метрику, их вычитание не является необходимым. Однако без таких вычитаний эффективное действие останется расходящимся, и выражение для аномального следа вакуумного ТЭИ будет отличаться от стандартного даже при $\zeta = 0$. Поскольку соответствующие слагаемые появляются при использовании различных методов регуляризации (см. [1], [2]), общепринято сохранять их в контрчленах к вакуумному ТЭИ.

Вопросы о необходимости конечных перенормировок и о значениях ренормированных параметров относятся к области эксперимента. Возможно, как отмечено в [1], что ренормированные параметры при неэйнштейновских слагаемых в гравитационном лагранжиане равны нулю.

4. СКАЛЯРНОЕ ПОЛЕ В ОДНОРОДНОМ ИЗОТРОПНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Метрику N -мерного однородного изотропного пространства-времени запишем в виде

$$ds^2 = g_{ik} dx^i dx^k = a^2(\eta)(d\eta^2 - dl^2), \quad (28)$$

где $dl^2 = \gamma_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta$ – метрика $(N - 1)$ -мерного пространства постоянной кривизны $K = 0, \pm 1$. Полная система решений уравнения (2) в метрике (28) может быть найдена в форме

$$\varphi(x) = a^{-(N-2)/2}(\eta) g_\lambda(\eta) \Phi_J(\mathbf{x}), \quad (29)$$

где

$$g_\lambda''(\eta) + \Omega^2(\eta) g_\lambda(\eta) = 0, \quad (30)$$

$$\Omega^2(\eta) = m^2 a^2 + \lambda^2 - \Delta \xi a^2 R + \zeta a^2 R_{\text{GB}}^2, \quad (31)$$

$$\Delta_{N-1} \Phi_J(\mathbf{x}) = - \left(\lambda^2 - \left(\frac{N-2}{2} \right)^2 K \right) \Phi_J(\mathbf{x}), \quad (32)$$

штрих обозначает производную по конформному времени η , J – набор индексов (квантовых чисел), нумерующих собственные функции оператора Лапласа–Бельтрами Δ_{N-1} в $(N - 1)$ -мерном пространстве. Отметим, что из неотрицательности собственных значений оператора $-\Delta_{N-1}$ следует неравенство $\lambda^2 - ((N - 2)/2)^2 K \geq 0$.

В соответствии с методом диагонализации гамильтониана [1] (случай произвольной $V(R)$ см. в работе [16]), функции $g_\lambda(\eta)$ должны удовлетворять следующим начальным условиям:

$$g'_\lambda(\eta_0) = i\Omega(\eta_0) g_\lambda(\eta_0), \quad |g_\lambda(\eta_0)| = \Omega^{-1/2}(\eta_0). \quad (33)$$

Для квантования разложим поле $\varphi(x)$ по полной системе решений (29):

$$\varphi(x) = \int d\mu(J) [\varphi_J^{(+)} a_J^{(+)} + \varphi_J^{(-)} a_J^{(-)}], \quad (34)$$

где

$$\varphi_J^{(+)}(x) = \frac{a^{-(N-2)/2}(\eta)}{\sqrt{2}} g_\lambda(\eta) \Phi_J^*(\mathbf{x}), \quad \varphi_J^{(-)}(x) = (\varphi_J^{(+)}(\mathbf{x}))^*, \quad (35)$$

и потребуем выполнения коммутационных соотношений

$$[a_J^{(-)}, a_{J'}^{(+)}] = [a_J^{(-)}, a_{J'}^{(+)}] = \delta_{JJ'}, \quad [a_J^{(\pm)}, a_{J'}^{(\pm)}] = [a_J^{(\pm)}, a_{J'}^{(\pm)}] = 0. \quad (36)$$

Средние от оператора ТЭИ по вакууму $|0\rangle$, уничтожаемому операторами $a_J^{(-)}$, $a_{J'}^{(-)}$, удобно выражать через билинейные комбинации функций g_λ и g_λ^* :

$$S = \frac{|g'_\lambda|^2 + \Omega^2 |g_\lambda|^2}{4\Omega} - \frac{1}{2}, \quad U = \frac{\Omega^2 |g_\lambda|^2 - |g'_\lambda|^2}{2\Omega}, \quad V = -\frac{d(g_\lambda^* g_\lambda)}{2d\eta}, \quad (37)$$

которые в соответствии с (30) удовлетворяют системе дифференциальных уравнений

$$S' = \frac{\Omega'}{2\Omega} U, \quad U' = \frac{\Omega'}{\Omega} (1 + 2S) - 2\Omega V, \quad V' = 2\Omega U. \quad (38)$$

С учетом начальных условий $S(\eta_0) = U(\eta_0) = V(\eta_0) = 0$, следующих из (33), уравнения (38) могут быть записаны в виде системы интегральных уравнений Вольтерра:

$$U(\eta) + iV(\eta) = \int_{\eta_0}^{\eta} w(\eta_1) (1 + 2S(\eta_1)) e^{2i\Theta(\eta_1, \eta)} d\eta_1, \quad (39)$$

$$S(\eta) = \frac{1}{2} \int_{\eta_0}^{\eta} d\eta_1 w(\eta_1) \int_{\eta_0}^{\eta_1} d\eta_2 w(\eta_2) (1 + 2S(\eta_2)) \cos[2\Theta(\eta_2, \eta_1)], \quad (40)$$

где $w(\eta) = \Omega'(\eta)/\Omega(\eta)$, $\Theta(\eta_1, \eta_2) = \int_{\eta_1}^{\eta_2} \Omega(\eta) d\eta$.

Для получения вакуумного ТЭИ используем следующие формулы суммирования для собственных функций оператора Δ_{N-1} (см. [17]):

$$\sum_{J(\lambda=\text{const})} |\Phi_J(\mathbf{x})|^2 = f(\lambda), \quad (41)$$

$$\sum_{J(\lambda=\text{const})} [(\partial_\alpha \Phi_J^*) \partial_\beta \Phi_J + (\partial_\beta \Phi_J^*) \partial_\alpha \Phi_J] = \frac{2\gamma_{\alpha\beta}}{N-1} \left(\lambda^2 - \left(\frac{N-2}{2} \right)^2 K \right) f(\lambda), \quad (42)$$

$$\sum_{J(\lambda=\text{const})} [(\tilde{\nabla}_\alpha \tilde{\nabla}_\beta \Phi_J^*) \Phi_J + \Phi_J^* \tilde{\nabla}_\alpha \tilde{\nabla}_\beta \Phi_J] = -\frac{2\gamma_{\alpha\beta}}{N-1} \left(\lambda^2 - \left(\frac{N-2}{2} \right)^2 K \right) f(\lambda), \quad (43)$$

где знак $\sum$ для непрерывного J обозначает интегрирование, $\tilde{\nabla}_\alpha$ — ковариантное дифференцирование в $(N-1)$ -мерном пространстве с метрикой $\gamma_{\alpha\beta}$. В квазиевклидовом ($K=0$) случае функция $f(\lambda)$ равна

$$f(\lambda) = \frac{B_N}{2} \lambda^{N-2}, \quad B_N = \left[2^{N-3} \pi^{(N-1)/2} \Gamma\left(\frac{N-1}{2}\right) \right]^{-1} \quad (44)$$

(случай $K \neq 0$ см. в работе [17]).

Подставив разложение (34) в (5) и используя (11)–(13), (36), (37), (41)–(43) и формулы приложения 2, для вакуумных средних ТЭИ получим следующие (расходящиеся) выражения:

$$\langle 0|T_{ik}|0\rangle = \frac{B_N}{a^{N-2}} \int d\mu(\lambda) \tau_{ik}, \quad (45)$$

где

$$\begin{aligned} \tau_{00} = & \Omega \left(S + \frac{1}{2} \right) + (N-1)(\Delta\xi - \tilde{\zeta}(c^2 + K)) \times \\ & \times \left[cV + (c' + (N-2)c^2) \frac{1}{\Omega} \left(S + \frac{1}{2}U + \frac{1}{2} \right) \right], \quad (46) \\ \tau_{\alpha\beta} = & \gamma_{\alpha\beta} \left\{ \frac{1}{(N-1)\Omega} \left[\lambda^2 \left(S + \frac{1}{2} \right) - (\Omega^2 - \lambda^2) \frac{U}{2} \right] - \right. \\ & - 2(\Delta\xi - \tilde{\zeta}(c^2 + K))\Omega U + [\Delta\xi(N-1) - \tilde{\zeta}((N+1)(c^2 + K) - 2c')]cV - \\ & - \frac{1}{\Omega} \left(S + \frac{1}{2}U + \frac{1}{2} \right) [\Delta\xi((N-1)c' + (N-2)K) - \\ & \left. - \tilde{\zeta}((N-1)c^2(3c' - 2(c^2 + K)) + K((N+1)c' + (N-4)(c^2 + K))) \right] \right\}, \quad (47) \end{aligned}$$

$\tilde{\zeta} \equiv \zeta a^{-2} 2(N-2)(N-3)$, $c \equiv a'/a$.

В четырехмерном пространстве-времени мера интегрирования в выражении (45) имеет вид (см. [1])

$$\int d\mu(\lambda) \dots = \begin{cases} \int_0^\infty d\lambda \lambda^2 \dots, & K = 0, -1, \\ \sum_{\lambda=1}^\infty \lambda^2 \dots, & K = 1. \end{cases} \quad (48)$$

В N -мерном случае $d\mu(\lambda) = \sigma(\lambda) d\lambda$ (см. [17]), где

$$\sigma(\lambda) = \lambda^{N-2} + \alpha_N \lambda^{N-4} + \beta_N \lambda^{N-6} + \dots, \quad (49)$$

$$\alpha_N = -\frac{1}{24}(N-2)(N-3)(N-4)K, \quad (50)$$

$$\beta_N = \frac{1}{5760}(N-2)(N-3)(N-4)(N-5)(N-6)(5N-8)K^2. \quad (51)$$

5. n -ВОЛНОВАЯ ПРОЦЕДУРА

В однородных изотропных пространствах для вычисления перенормированного вакуумного ТЭИ часто применяется n -волновая процедура, предложенная в работе [10]. Для N -мерного однородного изотропного пространства-времени n -волновую процедуру можно выразить следующими формулами (см. [17]):

$$\langle 0|T_{ik}|0\rangle_{\text{ren}} = \frac{B_N}{a^{N-2}} \lim_{\Lambda \rightarrow \infty} \left[\int^\Lambda d\mu(\lambda) \tau_{ik} - \sum_{l=0}^{[N/2]} \int_0^\Lambda d\lambda \lambda^{N-2} a_{ik}[l] \right], \quad (52)$$

где

$$a_{ik}[l] = \frac{1}{l!} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\partial^l}{\partial (n-2)^l} \left(\frac{\tau_{ik}(n\lambda, nm)\sigma(n\lambda)}{n^{N-1}\lambda^{N-2}} \right). \quad (53)$$

Для получения явного вида $a_{ik}[l]$ разложим S , U и V (см. (37)) по обратным степеням n при замене $\lambda \rightarrow n\lambda$, $m \rightarrow nm$ и $n \rightarrow \infty$: $S = \sum_{k=1}^\infty n^{-k} S_k, \dots$. Используя последовательные итерации в интегральных уравнениях (39), (40) и метод стационарной фазы, получим для первых отличных от нуля членов разложений

$$V_1 = W, \quad U_2 = DW, \quad S_2 = \frac{1}{4}W^2, \quad V_3 = \frac{1}{2}W^3 - D^2W - \frac{\omega}{2}D\left(\frac{q}{\omega^3}\right), \quad (54)$$

$$U_4 = \frac{3}{2}W^2DW - D^3W - D\left(\frac{\omega}{2}D\left(\frac{q}{\omega^3}\right)\right) + \frac{q}{2\omega^2}DW, \quad (55)$$

$$S_4 = \frac{3}{16}W^4 + \frac{1}{4}(DW)^2 - \frac{1}{2}WD^2W - \frac{1}{4}\omega WD\left(\frac{q}{\omega^3}\right), \quad (56)$$

где

$$q = (\Delta\xi R - \zeta R_{\text{GB}}^2)a^2, \quad \omega = (m^2a^2 + \lambda^2)^{1/2}, \quad W = \frac{\omega'}{2\omega^2}, \quad D = \frac{1}{2\omega} \frac{d}{d\eta}. \quad (57)$$

Отметим, что в выражения (54)–(56) исключены нелокальные по времени (т.е. зависящие как от η , так и от η_0) слагаемые. Такие слагаемые отсутствуют, если $V_1(\eta_0) = V_3(\eta_0) = U_2(\eta_0) = U_4(\eta_0) = 0$, что и предполагается далее. В частности, нелокальные слагаемые отсутствуют, когда первые $2[N/2]$ производных от масштабного фактора $a(\eta)$ метрики обращаются в нуль в начальный момент времени.

Используя (46), (47), (49), (54)–(56), для $a_{ik}[l]$ получим

$$a_{00}[0] = \tau_{00}[0] = \frac{\omega}{2}, \quad a_{\alpha\beta}[0] = \tau_{\alpha\beta}[0] = \gamma_{\alpha\beta} \frac{\lambda^2}{2(N-1)\omega}, \quad (58)$$

$$a_{ik}[1] = \tau_{ik}[1] + \frac{\alpha_N}{\lambda^2} \tau_{ik}[0], \quad a_{ik}[2] = \tau_{ik}[2] + \frac{\alpha_N}{\lambda^2} \tau_{ik}[1] + \frac{\beta_N}{\lambda^4} \tau_{ik}[0], \quad (59)$$

где

$$\begin{aligned} \tau_{00}[1] = & \omega S_2 + (N-1)(\Delta\xi - \tilde{\zeta}(c^2 + K))cV_1 + \\ & + \frac{N-1}{8\omega} [\Delta\xi 2(N-2)(c^2 - K) + \tilde{\zeta}(c^2 + K)((4-3N)c^2 + (N-4)K)], \end{aligned} \quad (60)$$

$$\begin{aligned} \tau_{\alpha\beta}[1] = & \gamma_{\alpha\beta} \left\{ \frac{1}{(N-1)\omega} \left[\lambda^2 S_2 - \frac{m^2 a^2}{2} \left(U_2 + \frac{q}{2\omega^2} \right) \right] - 2\Delta\xi \omega U_2 + \right. \\ & + 2\tilde{\zeta}(c^2 + K)\omega U_2 + [\Delta\xi(N-1) - \tilde{\zeta}((N+1)(c^2 + K) - 2c')]cV_1 + \\ & + \frac{1}{4\omega} \left[\Delta\xi(N-2)(c^2 - K - 2c') + \tilde{\zeta} \left(c^2(3N-4) \left(2c' - \frac{3}{2}c^2 \right) + \right. \right. \\ & \left. \left. + K \left(2Nc' - 3Nc^2 + \frac{3}{2}(N-4)K \right) \right) \right] \right\}, \end{aligned} \quad (61)$$

$$\begin{aligned} \tau_{00}[2] = & \omega \left(S_4 + \frac{q}{4\omega^2} U_2 + \frac{q^2}{16\omega^4} \right) + (N-1)(\Delta\xi - \tilde{\zeta}(c^2 + K))cV_3 + \\ & + [\Delta\xi 2(N-2)(c^2 - K) + \tilde{\zeta}(c^2 + K)((N-4)K - (3N-4)c^2)] \times \\ & \times \frac{N-1}{4\omega} \left(S_2 + \frac{1}{2}U_2 + \frac{q}{4\omega^2} \right), \end{aligned} \quad (62)$$

$$\begin{aligned} \tau_{\alpha\beta}[2] = & \gamma_{\alpha\beta} \left\{ \frac{1}{N-1} \left[\frac{\lambda^2}{\omega} \left(S_4 + \frac{qU_2}{4\omega^2} + \frac{q^2}{16\omega^4} \right) - \frac{m^2 a^2}{2\omega} \left(U_4 + \frac{q^2}{4\omega^4} + \frac{qS_2}{\omega^2} \right) \right] + \right. \\ & + [\Delta\xi(N-1) - \tilde{\zeta}((N+1)(c^2 + K) - 2c')]cV_3 - \\ & - 2(\Delta\xi - \tilde{\zeta}(c^2 + K)) \left(\omega U_4 - \frac{qU_2}{2\omega} \right) + \\ & + \left[\Delta\xi(N-2)(c^2 - K - 2c') + \tilde{\zeta} \left(c^2(3N-4) \left(2c' - \frac{3}{2}c^2 \right) + \right. \right. \\ & \left. \left. + K \left(2Nc' - 3Nc^2 + \frac{3}{2}(N-4)K \right) \right) \right] \frac{1}{2\omega} \left(S_2 + \frac{1}{2}U_2 + \frac{q}{4\omega^2} \right) \right\}. \end{aligned} \quad (63)$$

Приведенные выражения исчерпывают все вычисления в размерностях $N = 4, 5$.

Перенормированный в соответствии с (52) вакуумный ТЭИ ковариантно сохраняется. Это доказывается на основании выражений (58), (59) и равенств $\nabla^i(\tau_{ik}/a^{N-2}) = 0$ и $\nabla^i(\tau_{ik}[l]/a^{N-2}) = 0$, которые следуют из (38), (46), (47), (60)–(63).

Для выяснения геометрической структуры контрчленов n -волновой процедуры проведем, как и в работе [18], размерную регуляризацию. При вычислении интегралов в размерно-регуляризованных контрчленах

$$T_{ik,\varepsilon}[l] = \frac{B_N}{a^{N-2}} (M)^{2\varepsilon} \int_0^\infty d\lambda \lambda^{N-2} a_{ik,\varepsilon}[l], \quad (64)$$

где $a_{ik,\varepsilon}[l]$ определяются по формулам (58)–(63) с заменой $N \rightarrow N_0 - 2\varepsilon$, используем равенство

$$\int_0^\infty x^k (1+x^2)^{-p} dx = \frac{\Gamma((k+1)/2)\Gamma(p-(k+1)/2)}{2\Gamma(p)}. \quad (65)$$

В тех случаях, когда интеграл в левой части формулы (65) не существует в обычном смысле, он полагается равным аналитическому продолжению правой части формулы (65) на соответствующие значения k и p . В результате громоздких, но не содержащих принципиальных трудностей вычислений с учетом формул приложения 2 получим для 0-го, 1-го и 2-го контрчленов n -волновой процедуры выражения (19), (24), (25), соответственно. Следовательно, геометрическая структура первых трех вычитаний в n -волновой процедуре и в методе эффективного действия совпадают.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе рассмотрено скалярное поле со связью с кривизной типа Гаусса–Бонне, при которой метрический ТЭИ не содержит производных от метрики выше второго порядка. Получены выражения для ТЭИ (5)–(7) и дано их представление через конформный тензор Вейля, удобное для вычислений как в конформно-плоских (в частности, в однородных изотропных) пространствах, так и в Риччи-плоских пространствах (т.е. при $R_{ik} = 0$; см. (11), (12)). Найдена геометрическая структура первых трех контрчленов к вакуумному ТЭИ в произвольной метрике для N -мерного пространства-времени (см. (19)–(21)). В размерностях $N = 4, 5$ эти контрчлены исчерпывают все вычитания. Анализ геометрической структуры этих контрчленов позволяет сделать вывод, что первые три вычитания соответствуют перенормировке космологической и гравитационной постоянных и параметров при квадратичных, кубических и четвертой степени по кривизне слагаемых в затравочном гравитационном лагранжиане вида (27). Для однородного изотропного пространства-времени получены формулы (45)–(47), определяющие перенормированные вакуумные средние ТЭИ. Найдены первые три контрчлена n -волновой процедуры (52) для вакуумного ТЭИ (см. (58)–(63)). С помощью размерной регуляризации установлено, что геометрическая структура контрчленов n -волновой процедуры в однородном изотропном пространстве совпадает со структурой контрчленов, полученных в методе эффективного действия (19), (24), (25). Формулы (45)–(47), (52), (58)–(63) позволяют вычислять перенормированные вакуумные средние ТЭИ скалярного поля со связью с кривизной типа Гаусса–Бонне в однородном изотропном пространстве-времени в размерностях $N = 4, 5$.

Учет возможной связи скалярного поля с инвариантом Гаусса–Бонне R_{GB}^2 может играть важную роль в ранней Вселенной. Эффекты от ненулевого значения параметра ζ в уравнениях скалярного поля могут проявляться в излучении черных дыр (случай дилатона, связанного с инвариантом Гаусса–Бонне, см. в работе [19]), влиять на параметры

так называемых бозонных звезд (см., например, работу [20]) и т.д. Вопросы о величине параметра ζ , так же как и параметра ξ , относятся в конечном итоге к области эксперимента.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Здесь приведены выражения для вариаций некоторых геометрических величин, а также тождества Бианки и их следствия, необходимые для получения ТЭИ скалярного поля со связью с кривизной типа Гаусса–Бонне и контрчленов к его вакуумным средним. Точки с запятой в индексах обозначают соответствующие ковариантные производные.

При вычислении вариаций обозначим вариации метрик $\delta g_{ik} = h_{ik}$ и $h = h^i_i$. Тогда $\delta g^{ik} = -h^{ik}$,

$$\delta \sqrt{|g|} = -\frac{1}{2} \sqrt{|g|} g_{ik} \delta g^{ik} = \frac{1}{2} \sqrt{|g|} h, \quad \delta \Gamma^i_{kl} = \frac{1}{2} (h^i_{k;l} + h^i_{l;k} - h_{kl}^{;i}), \quad (\text{A.1})$$

$$\delta R^i_{jkl} = \frac{1}{2} (h^i_{j;kl} + h^i_{k;jl} - h_{jk}^{;i}{}_l - h^i_{l;jk} - h^i_{j;lk} + h_{jl}^{;i}{}_k), \quad (\text{A.2})$$

$$\delta R_{ik} = \frac{1}{2} (h_{;ik} + h_{ik}^{;l}{}_l - h^l_{i;k} - h^l_{k;i}), \quad (\text{A.3})$$

$$\delta R = h_{;l}^l - h_{lm}^{;lm} - R^{lm} h_{lm}, \quad (\text{A.4})$$

$$\delta (R^2) = 2R h_{;l}^l - 2R h_{lm}^{;lm} - 2R R^{lm} h_{lm}, \quad (\text{A.5})$$

$$\delta (R_{ik} R^{ik}) = R^{ik} (h_{;ik} + h_{ik}^{;l}{}_l - h^l_{i;k} - h^l_{k;i}) - 2R_{il} R_k^l h^{ik}, \quad (\text{A.6})$$

$$\delta (R_{lm} R^{lm}) = 2R^{lm} (h_{lp;m} + h_{lp;qm}) - 2R_{lm} R^{lm} h^{li}, \quad (\text{A.7})$$

$$\begin{aligned} \delta (R_{lm} R^{lm} - 4R_{lm} R^{lm} + R^2) = \\ = 2[(4R_{il} R_k^l - R_{ilpq} R_k^{lpq} - R R_{ik}) h^{ik} + R_i^l R_k^q (h^{ik}_{;lq} + h^{ik}_{;ql}) + \\ + R h_{;l}^l - R h^{ik}_{;ik} - 2R^{lm} h_{;lm} - 2R_{ik} h^{ik}_{;l}{}^l + 4R_{il} h^{ik;l}{}_k]. \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

Тождества Бианки для симметричной связности, согласованной с метрикой, имеют вид

$$R^i_{jkl;m} + R^i_{jmk;l} + R^i_{jlm;k} = 0. \quad (\text{A.9})$$

Из (A.9) и свойств симметрии тензора кривизны следует, что

$$R^n_{ilm;n} = R_{im;l} - R_{il;m}, \quad R^l_{m;l} = \frac{1}{2} R_{;m}. \quad (\text{A.10})$$

Повторное дифференцирование (A.10) приводит к тождествам

$$R^{ilkn}_{;ln} = R^{ik}_{;l}{}^l - R^{il;k}{}_l, \quad R^{lm}_{;lm} = \frac{1}{2} R_{;m}{}^m. \quad (\text{A.11})$$

Используя (A.10) и имеющее место для симметричной связности и произвольного тензора 2-го ранга тождество

$$(\nabla_l \nabla_k - \nabla_k \nabla_l) A^{il} = R^i_{nkl} A^{nl} - R_{nk} A^{in}, \quad (\text{A.12})$$

получим следующее следствие тождеств Бианки:

$$R^{il}_{;kl} = \frac{1}{2} R^{i;k}{}_k + R^i_{mkl} R^{ml} - R^{im} R_{mk}. \quad (\text{A.13})$$

ПРИЛОЖЕНИЕ Б

Здесь приведены выражения для некоторых геометрических величин в N -мерном однородном изотропном пространстве-времени с метрикой (28).

Символы Кристоффеля:

$$\Gamma_{00}^0 = \frac{a'}{a} \equiv c, \quad \Gamma_{0j}^i = c\delta_j^i, \quad \Gamma_{\alpha\beta}^0 = c\gamma_{\alpha\beta}, \quad \Gamma_{\beta\delta}^\alpha(g_{ik}) = \Gamma_{\beta\delta}^\alpha(\gamma_{\nu\mu}). \quad (\text{Б.1})$$

Компоненты тензора Риччи и скалярная кривизна:

$$R_{00} = (N-1)c', \quad R_{\alpha\beta} = -\gamma_{\alpha\beta}[c' + (N-2)(c^2 + K)], \quad (\text{Б.2})$$

$$R = a^{-2}(N-1)[2c' + (N-2)(c^2 + K)]. \quad (\text{Б.3})$$

Компоненты тензора Эйнштейна:

$$G_{00} = -\frac{(N-1)(N-2)}{2}(c^2 + K), \quad G_{\alpha\beta} = \gamma_{\alpha\beta}(N-2)\left[c' + \frac{(N-3)}{2}(c^2 + K)\right]. \quad (\text{Б.4})$$

Используя (Б.2), (Б.3) и формулу

$$R_{lm pq}R^{lm pq} - 4R_{lm}R^{lm} + R^2 = C_{lm pq}C^{lm pq} - \frac{4(N-3)}{N-2}\left(R_{lm}R^{lm} - \frac{NR^2}{4(N-1)}\right), \quad (\text{Б.5})$$

в однородном изотропном случае получим

$$R_{lm pq}R^{lm pq} - 4R_{lm}R^{lm} + R^2 = a^{-4}(N-1)(N-2)(N-3)(c^2 + K) \times \\ \times [4c' + (N-4)(c^2 + K)]. \quad (\text{Б.6})$$

Компоненты $^{(1)}H_{ik}$ и $^{(3)}H_{ik}$ выражаются следующими формулами:

$$^{(1)}H_{00} = \frac{(N-1)^2}{a^2}\left[2c'^2 - 4c''c - 4(N-4)c'c^2 - \frac{c^4}{2}(N-2)(N-10) - \right. \\ \left. - K(N-2)\left(\frac{N-2}{2}K + (N-6)c^2\right)\right], \quad (\text{Б.7})$$

$$^{(1)}H_{\alpha\beta} = \gamma_{\alpha\beta}a^{-2}(N-1)\left\{4c^{(3)} + 4(2N-9)c''c + 2(3N-11)c'^2 + \right. \\ \left. + 6(N^2 - 10N + 20)c'c^2 + \frac{1}{2}(N-2)(N^2 - 15N + 50)c^4 + \right. \\ \left. + K(N-2)\left[(N-5)(N-6)c^2 + 2(N-6)c' + \frac{1}{2}(N-2)(N-5)K\right]\right\}, \quad (\text{Б.8})$$

$$^{(3)}H_{00} = a^{-2}2^{-1}(N-1)(N-2)(N-3)(c^2 + K)^2, \quad (\text{Б.9})$$

$$^{(3)}H_{\alpha\beta} = -\gamma_{\alpha\beta}a^{-2}2^{-1}(N-2)(N-3)[4c'(c^2 + K) + (N-5)(c^2 + K)^2]. \quad (\text{Б.10})$$

Благодарности. Автор благодарит проф. А. А. Гриба и участников семинара лаборатории теоретической физики им. А. А. Фрийдмана за обсуждение работы. Работа поддержана Министерством образования РФ, грант Е02-3.1-198.

Список литературы

- [1] *А. А. Гриб, С. Г. Мамаев, В. М. Мостепаненко.* Вакуумные квантовые эффекты в сильных полях. М.: Энергоатомиздат, 1988.
- [2] *Н. Бирелл, П. Девис.* Квантованные поля в искривленном пространстве-времени. М.: Мир, 1984.
- [3] *A. A. Grib, E. A. Poberii.* Helv. Phys. Acta. 1995. V. 68. P. 380; *К. С. Мамаева, Н. Н. Трунов.* ТМФ. 2003. Т. 135. № 1. С. 82.
- [4] *А. Д. Линде.* Физика элементарных частиц и инфляционная космология. М.: Наука, 1990.
- [5] *M. Bordag, J. Lindig, V. M. Mostepanenko, Yu. V. Pavlov.* Int. J. Mod. Phys. D. 1997. V. 6. P. 449; *V. B. Bezerra, V. M. Mostepanenko, C. Romero.* Mod. Phys. Lett. A. 1997. V. 12. P. 145; *S. Habib, C. Molina-París, E. Mottola.* Phys. Rev. D. 2000. V. 61. P. 024010.
- [6] *R. M. Wald.* Commun. Math. Phys. 1977. V. 54. P. 1.
- [7] *D. Lovelock.* J. Math. Phys. 1971. V. 12. P. 498.
- [8] *B. Zwiebach.* Phys. Lett. B. 1985. V. 156. P. 315.
- [9] *С. В. Кетов.* Введение в квантовую теорию струн и суперструн. Новосибирск: Наука, 1990.
- [10] *Я. Б. Зельдович, А. А. Старобинский.* ЖЭТФ. 1971. Т. 61. С. 2161.
- [11] *C. Lanczos.* Ann. Math. 1938. V. 39. P. 842.
- [12] *Х. Цикон, Р. Фрезе, В. Кириш, Б. Саймон.* Операторы Шредингера с приложениями к квантовой механике и глобальной геометрии. М.: Мир, 1990.
- [13] *T. S. Bunch.* J. Phys. A. 1979. V. 12. P. 517.
- [14] *S. A. Fulling.* Aspects of Quantum Theory in Curved Space-Time. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1991.
- [15] *G. 't Hooft.* Nucl. Phys. B. 1973. V. 61. P. 455.
- [16] *Yu. V. Pavlov.* Int. J. Mod. Phys. A. 2002. V. 17. P. 1041.
- [17] *Ю. В. Павлов.* ТМФ. 2004. Т. 138. № 3. С. 453.
- [18] *С. Г. Мамаев, В. М. Мостепаненко, В. А. Шелюто.* ТМФ. 1985. Т. 63. № 1. С. 64.
- [19] *S. Mignemi, N. R. Stewart.* Phys. Rev. D. 1993. V. 47. P. 5259.
- [20] *E. W. Mielke, F. E. Schunck.* Nucl. Phys. B. 2000. V. 564. P. 185.

Поступила в редакцию 21.X.2003 г.