Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Славнов, Перенормируемость и унитарность
модели Энглера–Браута–Хиггса–Киббла, *ТМФ*, 2018,
том 197, номер 2, 252–256

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf9606>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.237.59.107

26 апреля 2023 г., 12:12:04

© 2018 г.

А. А. Славнов*

ПЕРЕНОРМИРУЕМОСТЬ И УНИТАРНОСТЬ МОДЕЛИ ЭНГЛЕРА–БРАУТА–ХИГГСА–КИББЛА

Показано, что модель Энглера–Браута–Хиггса–Киббля является перенормируемой и унитарной.

Ключевые слова: модель Энглера–Браута–Хиггса–Киббля, перенормировка калибровочно-инвариантных теорий, спонтанное нарушение симметрии.

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf9606>

1. ВВЕДЕНИЕ

Грибовская неоднозначность не связана напрямую с выбором калибровки. Более того, в электродинамике она отсутствует.

Модель Энглера–Браута–Хиггса–Киббля (ЭБХК) [1]–[3] допускает простое доказательство унитарности. Это доказательство основано на простом факте, известном из квантовой электродинамики (КЭД). Хорошо известно, что КЭД в основном описывается с помощью тензора электромагнитного поля $F_{\mu\nu}$. Однако удобней описывать КЭД, вводя четырехвектор A_μ . Только две из компонент вектора A_μ являются наблюдаемыми. Более того, временная компонента обладает отрицательной энергией. Одновременно в теории появляется новая симметрия – калибровочная инвариантность, которая позволяет отличить мнимые компоненты от наблюдаемых. Калибровочная функция, описывающая произвол, должна удовлетворять уравнению $\square\varphi = 0$. Это гармоническое уравнение, и его решение должно иметь экстремум на границе. Поскольку калибровочная функция стремится к нулю на бесконечности, функция, описывающая произвол, тождественно равна нулю [4]. Это не так в теории Янга–Миллса. Калибровочное преобразование имеет вид

$$A_\mu^a \rightarrow A_\mu^a + (D_\mu\varphi)^a. \quad (1)$$

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 14-50-00005).

*Математический институт им. В. А. Стеклова Российской академии наук, Москва, Россия. E-mail: slavnov@mi-ras.ru

Аналогом кулоновской калибровки является равенство $\partial_i D_i \varphi = 0$. Как показал Зингер, из топологии следует, что не существует калибровки, которая была бы справедлива всюду. При малых $D_\mu \varphi$ это так, но в целом это неверно! Недавно в серии работ [5]–[11] было показано, что это не так: произвол может быть зафиксирован.

Можно было бы попробовать наложить условие $A_0 = 0$. Калибровки типа $A_0 = 0$ называют алгебраическими, калибровки типа $\partial_i A_i = 0$ называют дифференциальными. Но, во-первых, алгебраические калибровки, строго говоря, не являются калибровками, во-вторых, теория возмущений в алгебраических калибровках неперенормируема. Уравнение $A_0^2 = 0$ можно решить точно по теории возмущений, но эта теория неперенормируема! Если же мы хотим перейти от алгебраической калибровки к явно перенормируемой, то мы столкнемся с сингулярностью! Так что это не решает проблему. Важный факт заключается в том, что теория обладает дополнительной симметрией, которая и позволяет решить проблему.

2. МОДЕЛЬ ЭВХК

Начнем с калибровочно-инвариантной модели, описываемой лагранжианом

$$L = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F_{\mu\nu}^a + (D_\mu \varphi_+)^* (D_\mu \varphi_-) + (D_\mu \varphi_-)^* (D_\mu \varphi_+) - \lambda_c^2 (\varphi^* \varphi - \mu^2)^2 + (D_\mu b_+)^* (D_\mu b_-) + (D_\mu b_-)^* (D_\mu b_+). \quad (2)$$

Мы ограничимся группой $SU(2)$, хотя модель можно распространить и на другие группы.

Поле φ – это комплексный дублет, описывающий модель Хиггса, а $\varphi_\pm$ и $b_\pm$ – это вспомогательные поля, образующие аналогичные дублеты. Поля $\varphi_\pm$ коммутируют, а поля $b_\pm$ антикоммутируют. Удобно параметризовать поле эрмитовыми компонентами:

$$\varphi = \left(\frac{i\varphi_1 + \varphi_2}{\sqrt{2}}, \frac{\varphi_0 - i\varphi_3}{\sqrt{2}} \right). \quad (3)$$

Мы предполагаем, что поля φ и $\varphi_\pm$ имеют тривиальную асимптотику на бесконечности

$$\varphi_\pm \rightarrow \hat{m} = \langle m \rangle, \quad \varphi \rightarrow \hat{\mu} = \langle \mu \rangle, \quad (4)$$

где m и μ – постоянные спиноры.

Введем поля $\tilde{\varphi}_\pm$ и $\tilde{\varphi}$ равенствами $\varphi_\pm = \tilde{\varphi}_\pm + \hat{m}$, $\varphi = \tilde{\varphi} + \hat{\mu}$. В терминах новых полей $\tilde{\varphi}$, $\tilde{\varphi}_\pm$ лагранжиан записывается как

$$L = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F_{\mu\nu}^a + (D_\mu \tilde{\varphi}_+)^* (D_\mu \tilde{\varphi}_-) + (D_\mu \tilde{\varphi}_-)^* (D_\mu \tilde{\varphi}_+) + (D_\mu \tilde{\varphi}_+)^* (D_\mu \hat{m}) + (D_\mu \hat{m})^* (D_\mu \tilde{\varphi}_+) + (D_\mu b_+)^* (D_\mu b_-) + (D_\mu b_-)^* (D_\mu b_+) + (D_\mu \tilde{\varphi}^*) (D_\mu \tilde{\varphi}) + (D_\mu \tilde{\varphi}^*) (D_\mu \hat{\mu}) + (D_\mu \hat{\mu})^* (D_\mu \tilde{\varphi}) - \lambda_c^2 ((\tilde{\varphi} - \hat{\mu})^2 - \mu^2)^2. \quad (5)$$

Подчеркнем, что здесь и далее символом тильда обозначены поля, убывающие на бесконечности. Последние слагаемые в этом лагранжиане совпадают с соответствующими членами в модели ЭВХК. В частности, слагаемое $(D_\mu \tilde{\varphi}^*) (D_\mu \tilde{\varphi})$ порождает

массу поля Янга–Миллса. Теория, очевидно, имеет симметрию относительно преобразований

$$\begin{aligned}\delta\tilde{\varphi}_-^a &= m\eta^a + \frac{g}{2}\epsilon^{abc}\tilde{\varphi}_-^b\eta^c + \frac{g}{2}\tilde{\varphi}_-^0\eta^a, \\ \delta\tilde{\varphi}^a &= \mu\eta^a + \frac{g}{2}\epsilon^{abc}\tilde{\varphi}^b\eta^c + \frac{g}{2}\tilde{\varphi}^0\eta^a\end{aligned}\quad (6)$$

и

$$\tilde{\varphi}_+^a = M^{-1}\tilde{\varphi}_+^{\prime a}, \quad \tilde{b}_\pm = M^{-1}b'_\pm, \quad (7)$$

где

$$M = 1 + \frac{g}{2m}\tilde{\varphi}_-^0 = e^{gh/2m}, \quad (8)$$

а η^a – произвольные функции. Докажем, что всегда можно выбрать $\eta^a = 0$. Наложим условие калибровки

$$\tilde{\varphi}_-^a = 0. \quad (9)$$

Как легко видеть, калибровка $\delta\tilde{\varphi}_-^a = m\eta^a$ алгебраическая, и она не имеет грибовской копии. Уравнение $\delta\tilde{\varphi}_-^a = m\eta^a$ имеет единственное решение $\eta^a = 0$, что и требовалось доказать.

Лагранжиан в калибровке (9) имеет вид

$$\begin{aligned}L &= -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^a F_{\mu\nu}^a + \partial_\mu h \partial_\mu \tilde{\varphi}_+^0 - \frac{g}{2m} \partial_\mu h \partial_\mu h \tilde{\varphi}_+^0 + m\tilde{\varphi}_+^a \partial_\mu A_\mu^a + \\ &+ \left[\left(D_\mu b_+^a + \frac{g}{2m} b_+^a \partial_\mu h \right)^* \left(D_\mu b_-^a + \frac{g}{2m} b_-^a \partial_\mu h \right) + \text{э.с.} \right] + \\ &+ \frac{mg}{2} (A_\mu^a)^2 \tilde{\varphi}_+^0 + g \partial_\mu h A_\mu^a \tilde{\varphi}_+^a + \mu \tilde{\varphi}_+^a \partial_\mu A_\mu^a + \frac{m^2}{2} (A_\mu^a)^2 + \dots\end{aligned}\quad (10)$$

Как видно, свободный лагранжиан (10) отличается от лагранжиана безмассового поля Янга–Миллса присутствием массового члена $\frac{m^2}{2}(A_\mu^a)^2$, смешанного члена $\mu\varphi^a\partial_\mu A_\mu^a$ и свободного лагранжиана для поля Хиггса.

На первый взгляд может показаться, что разложение по константе связи соответствует неперенормируемой теории. Это не так, если учесть, что поле всегда входит в лагранжиан вместе с производной. Свободные пропагаторы равны

$$\begin{aligned}\Delta(A_\mu^a, A_\nu^b) &= \frac{T_{\mu\nu}^{ab}}{p^2 - \mu^2}, & \Delta(A_\mu^a, \tilde{\varphi}_+^b) &= \frac{-i\delta^{ab}p^\mu}{mp^4}, \\ \Delta(\tilde{\varphi}_+^0, h) &= \frac{i}{p^2}, & \Delta(\tilde{\varphi}^{*0}, \tilde{\varphi}^0) &= \frac{i}{p^2 - \mu^2}, & \Delta(\tilde{\varphi}^a, \tilde{\varphi}^b) &= \frac{\delta_{ab}}{p^2}, \\ \Delta(b_+^0, b_-^0) &= \frac{i}{p^2}, & \Delta(b_+^a, b_-^b) &= \frac{\delta^{ab}}{p^2},\end{aligned}\quad (11)$$

где $T_{\mu\nu}$ – проектор на поперечные поля. Нетрудно вычислить индекс расходимости для произвольной диаграммы. Он равен

$$n = 4 - 2L_{\tilde{\varphi}_+^a} - L_A - L_c - L_{b_+^0} - L_h - L_{\tilde{\varphi}^a} - L_{\tilde{\varphi}^0}. \quad (12)$$

Здесь $L_{\{\cdot\}}$ – число диаграмм с внешними линиями данного типа (поле s введено ниже после формулы (13)).

3. УНИТАРНОСТЬ

Лагранжиан (5), полученный в результате замены переменных (7), содержит большое число духовых полей. К ним относятся φ'^a_+ , h , $b_\pm$ и компоненты поля Янга–Миллса. Ведущую роль в их отщеплении играет преобразование суперсимметрии: в свободной теории, которая описывает поля до и после рассеяния,

$$\begin{aligned} \delta\tilde{\varphi}^a_+ &= 0, & \delta\tilde{\varphi}^0_+ &= 0, & \delta\tilde{\varphi}^0 &= b^0_+, \\ \delta b^{*a} &= \tilde{\varphi}^{*a}_+, & \delta b^{*0} &= \tilde{\varphi}^{*0}_+, & \delta b^a_+ &= 0, & \delta b^0_+ &= 0, \\ & & \delta h &= b^0_-, \end{aligned} \quad (13)$$

мы можем добавить, не нарушая симметрии, член $\lambda^a\tilde{\varphi}^a_- + mc^a + \tilde{b}_a\bar{c}^a$, такой что $(s_1\bar{c})^a = \lambda^a$, $(s_1\lambda)^a = 0$, $(s_1c)^a = 0$. Здесь s_1 – нильпотентный оператор, аналогичный БРСТ-оператору, определяемому калибровочным преобразованием, которое оставляет инвариантным лагранжиан (5). Легко видеть, что выписанный выше член обладает БРСТ-инвариантностью. Явно интегрируя по c и $\bar{c}$, подставляя $\bar{c}^a = \tilde{b}_a/m$, мы получаем желаемый ответ.

Оператор Q , который сохраняется из-за БРСТ-инвариантности и суперсимметрии и выделяет физический сектор модели, действует следующим образом:

$$\begin{aligned} QA^a_\mu &= \frac{1}{m} \partial_\mu b^a_+, & Q\tilde{\varphi}^a &= \frac{\mu}{b} b^a_+, & Qh &= -b^0_+, \\ Q\tilde{\varphi}^a_+ &= 0, & Q\tilde{\varphi}^a_- &= 0, & Q\tilde{\varphi}^0_+ &= 0, & Q\tilde{\varphi}^0 &= 0, \\ Qb^a_+ &= 0, & Qb^0_+ &= \tilde{\varphi}^0_-. \end{aligned} \quad (14)$$

Если мы отождествим b^a_- с антидуховым полем, а поле b^a_+/m – с духовым полем c^a , то первые четыре преобразования совпадут с БРСТ-преобразованиями в обычной модели ЭБХК, обеспечивающими отщепление духов и антидухов, а также нефизических компонент поля Янга–Миллса от физических состояний. Остальные преобразования обеспечивают отщепление полей b^0_- , h , b^0_+ и $\tilde{\varphi}^0_+$. Ультралокальные поля $\bar{c}$, c и λ не дают вклада в асимптотические состояния, что обеспечивает унитарность.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Доказана непerturbативную унитарность и перенормируемость модели ЭБХК. Доказательство проще, чем в работе [8], поскольку мы оперируем с асимптотическими величинами. При работе над этой статьей мне помогла книга [12].

Список литературы

- [1] F. Englert, R. Brout, “Broken symmetry and the mass of gauge vector mesons”, *Phys. Lett.*, **13**:9 (1964), 321–323.
- [2] P. W. Higgs, “Broken symmetries, massless particles and gauge fields”, *Phys. Lett.*, **12**:2 (1964), 132–133.
- [3] T. W. B. Kibble, “Symmetry breaking in non-Abelian gauge theories”, *Phys. Rev.*, **155**:5 (1967), 1554–1561.
- [4] V. N. Gribov, “Quantization of non-Abelian gauge theories”, *Nucl. Phys. B*, **139**:1–2 (1978), 1–19.
- [5] A. A. Slavnov, “A Lorentz invariant formulation of the Yang–Mills theory with gauge invariant ghost field Lagrangian”, *JHEP*, **08** (2008), 047, 11 pp., arXiv:0807.1795.

- [6] А. А. Славнов, “Лоренц-инвариантное квантование теории Янга–Миллса без неоднозначности Грибова”, *Тр. МИАН*, **272** (2011), 246–255.
- [7] A. Quadri, A. A. Slavnov, “Renormalization of the Yang–Mills theory in the ambiguity-free gauge”, *JHEP*, **07** (2010), 087, 22 pp., arXiv: 1002.2490.
- [8] А. Квадри, А. А. Славнов, “Свободная от неоднозначности формулировка модели Хиггса–Киббла”, *ТМФ*, **166**:3 (2011), 336–349.
- [9] А. А. Славнов, “Квантование моделей массивных неабелевых калибровочных полей со спонтанно нарушенной симметрией вне рамок теории возмущений”, *ТМФ*, **189**:2 (2016), 279–285.
- [10] А. А. Славнов, “Новый подход к квантованию поля Янга–Миллса”, *ТМФ*, **183**:2 (2015), 163–176.
- [11] А. А. Славнов, “О возможности описания неабелевых массивных калибровочных полей в рамках перенормируемой теории”, *ТМФ*, **193**:3 (2017), 484–492.
- [12] А. А. Славнов, Л. Д. Фаддеев, *Введение в квантовую теорию калибровочных полей*, Наука, М., 1988.

Поступила в редакцию 29.07.2018