Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. Г. Строганов, Уравнение тетраэдра и спиновые интегрируемые модели на кубической решетке, *ТМФ*, 1997, том 110, номер 2, 179–213

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf961>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.5.30

26 апреля 2023 г., 16:40:16

Ю.Г. Строганов*

**УРАВНЕНИЕ ТЕТРАЭДРА И
СПИНОВЫЕ ИНТЕГРИРУЕМЫЕ
МОДЕЛИ НА КУБИЧЕСКОЙ РЕШЕТКЕ¹⁾**

Работа представляет собой обзор результатов по трехмерному обобщению уравнения Янга–Бакстера, опубликованных в период с 1980 г. (пионерские работы А. Замолдчикова) по 1995 г. Речь идет об одном из условий интегрируемости статистических спиновых моделей на простой кубической решетке – уравнении тетраэдра (УТ). Рассмотрены различные версии этого уравнения, его симметричные свойства. Подробно рассмотрено решение УТ, соответствующее модели Бажанова–Бакстера. Приведен список решений УТ, известных в настоящее время. Рассмотрено обобщение для неоднородных спиновых моделей с больцмановскими весами двух типов, чередующихся в шахматном порядке.

Содержание

Введение

1. Уравнение тетраэдра – общие понятия

- 1.1. Z -инвариантность и уравнение тетраэдра
- 1.2. Уравнение тетраэдра и перестановочность матриц перехода
- 1.3. Различные версии уравнения тетраэдра
- 1.4. Симметрии уравнения тетраэдра
- 1.5. Уравнения d -симплексов

2. Модель Бажанова–Бакстера

- 2.1. Формулировка и симметричные свойства модели
- 2.2. Прямое доказательство трехмерных соотношений звезда–звезда
- 2.3. Уравнение тетраэдра модели Бажанова–Бакстера

3. Модифицированные уравнения тетраэдров

- 3.1. Формулировка модели
- 3.2. Модифицированные уравнения тетраэдров
- 3.3. Доказательство интегрируемости модели

Заключение

¹⁾Статья написана по заказу Редколлегии.

* Институт физики высоких энергий, Протвино, Московская обл.

ВВЕДЕНИЕ

В отличие от двумерных интегрируемых моделей релятивистской квантовой теории поля и статистической физики, интегрируемые модели в пространствах большей размерности изучены довольно слабо. Настоящая работа посвящена в основном рассмотрению уравнения тетраэдра, или уравнения Замолодчикова, которое является трехмерным обобщением известного уравнения Янга–Бакстера. Начнем с небольшого исторического обзора. Впервые уравнение тетраэдра было сформулировано в работах А. Б. Замолодчикова [1, 2] как условие факторизуемости релятивистской S -матрицы рассеяния прямых струн в пространстве-времени размерности $2+1$. Это “уравнение” представляет собой огромную (около тысячи в простейших случаях) систему алгебраических уравнений четвертой степени. Замолодчиков сначала угадал правильную форму решения в так называемом статическом пределе, когда скорости струн стремятся к нулю, а затем нашел полную S -матрицу. Он установил также перестановочность матриц перехода для статистической модели на кубической решетке со спиновыми переменными на гранях и с больцмановскими весами, равными элементам его S -матрицы. Бажанов численно проверил, что элементы S -матрицы Замолодчикова действительно удовлетворяют уравнению тетраэдра. Немного позже в работе [3] Бажанов и Строганов рассмотрели несколько вариантов уравнения тетраэдра для статистических моделей с разными типами взаимодействия. Они предложили также обобщение уравнения тетраэдра для моделей в пространствах большей размерности, назвав их D -симплексными уравнениями. Хотя работа не содержала новых решений, в ней было сделано любопытное предсказание. Дело в том, что любое N -цветное (т.е. спиновая переменная модели принимает N значений) решение уравнения тетраэдра приводит к счетной серии решений уравнения Янга–Бакстера, для которых спиновая переменная принимает N^n значений, где n – любое натуральное число. Авторы предположили, что решение уравнения тетраэдра можно будет найти, исследуя счетные серии решения уравнения Янга–Бакстера, и именно так была построена N -цветная интегрируемая модель Бажанова–Бакстера [4] и было найдено N -цветное решение уравнения тетраэдра [5, 6], которое в частном случае $N = 2$ сводится к решению Замолодчикова. Но это уже десятью годами позже, а в 1984 г. было найдено решение уравнения тетраэдра с грассмановыми переменными на ребрах [7].

Дальнейший прогресс был тесно связан с работами Бакстера. В работе [8] он переформулировал модель Замолодчикова, придав ей IRC (Interaction Round Cube)-форму, и, используя высокую симметрию модели, свел проверку более чем тысячи уравнений к проверке двух тождеств, которые он и доказал с помощью формул сферической тригонометрии. В последующих работах [9, 10] Бакстер, используя калибровочные преобразования, привел весовые функции модели Замолодчикова к замечательному BCC (Body Centered Cube)-виду, что позволило ему вычислить статистическую сумму модели. Позднее BCC-форма оказалась очень полезной при конструировании новых интегрируемых моделей.

Следует упомянуть цикл работ Бажанова и Строганова по модели свободных фермионов (МСФ) [11]. Она является двумерной в отличие от модели Замолодчикова. Тем не менее унитарный фактор и кроссинг-симметричные свойства последней совпали с унитарным фактором и кроссинг-симметричными свойствами одного из вариантов МСФ. Это давало надежду на вычисление статистической суммы модели Замолодчикова в предположении аналитичности. Несмотря на то что предположение аналитичности ока-

залось неверным и основная цель этих работ не была достигнута, авторам удалось найти неожиданную скрытую симметрию модели.

Дальнейший прогресс в теории интегрируемых спиновых систем на кубической решетке оказался связан с одной необычной двумерной моделью — с киральной моделью Поттса (СРМ). Хорошо известно, что подавляющее большинство решений уравнения Янга–Бакстера параметризуется одним спектральным параметром согласно схеме

$$R_{12}(u)R_{13}(v)R_{23}(v-u) = R_{23}(v-u)R_{13}(v)R_{12}(u),$$

и матричные элементы R -матрицы описываются эллиптическими, тригонометрическими или рациональными функциями этого параметра. Исключением является упомянутая выше модель свободных фермионов [11]. В 1987 г. в работах [12, 13] было найдено решение уравнения Янга–Бакстера, параметризуемое в терминах кривой рода $g > 1$. Это решение соответствовало числу цветов $N = 3, 4$, и вскоре в работе [14] было найдено решение для произвольного числа цветов N . Соответствующая модель и была названа киральной моделью Поттса. Бажанов и Строганов показали [15], что эта модель находится в тесном родстве с хорошо известной шестивершинной моделью и вывели функциональные уравнения, позволившие Бакстеру вычислить статистическую сумму модели. Необычные свойства решения уравнений Янга–Бакстера, соответствующие СРМ, оказались тесно связанными с тем обстоятельством, что квантовая группа $\mathcal{U}_q(SL(2))$ с квантовым параметром $q = \exp(2i\pi/N)$ допускает циклические представления. Далее, благодаря усилиям японских физиков-математиков и ученых Института физики высоких энергий была сконструирована обобщенная киральная модель Поттса (GCPM), связанная с циклическими представлениями квантовой группы $\mathcal{U}_q(SL(n+1))$ [16, 17]. Спиновая переменная для GCPM принимает N^n значений.

Прошло меньше года, и в конце 1991 г. Бажанов и Бакстер проинтерпретировали серию GCPM как единую трехмерную интегрируемую модель, в которой спиновая переменная принимает N значений, а кубическая решетка имеет n слоев вдоль одного из направлений [4]. Ранг группы превратился в добавочное измерение. Далее оказалось, что бальмановский вес модели симметричен по всем трем направлениям кубической решетки, несмотря на особое происхождение третьего направления [5, 18]. Эта симметрия вместе с упомянутой выше ВСС-структурой веса позволила Бажанову с Бакстером вычислить статистическую сумму модели. Заметим, что авторы не нуждались в построении решений уравнения тетраэдра, поскольку рассматривали свою модель как двумерную модель с составным весом. Решение уравнения тетраэдра, соответствующее модели Бажанова–Бакстера, было предложено в работе [5] и доказано в работе [6]. Доказательство использовало ВСС-форму решения уравнения тетраэдра и две специальных системы алгебраических соотношений — так называемые соотношения звезда–квадрат и соотношения ортогональности.

Недавно были опубликованы [19, 20] два решения уравнения тетраэдра другого (вершинного) типа со спиновой переменной, принимающей два значения. Параметризация этих решений напоминает параметризацию статического предела модели Замолотчикова. Нам удалось сконструировать полное решение уравнения тетраэдра вершинного типа для произвольного N , которое содержит решение Корепанова и решение Хиетаринты как частные случаи [21]. Оказалось, что после перестройки решетки эта вершинная модель свелась к модели Бажанова–Бакстера, тем не менее есть надежда на то, что вершинная форма решения окажется полезной, например, при построении L -операторов,

двумерного аналога анзаца Бете и т. д. Замечательно то, что решение Хиетаринты обобщается на произвольные значения N двумя различными способами, и одно из этих двух обобщений представляется нам новым [22].

Вновь вернемся в 1980 г. Решение Замолодчикова было параметризовано тригонометрическими функциями углов тетраэдра. Однако в первой, неопубликованной версии работы [1] было предложено более общее статическое решение, параметризующееся эллиптическими функциями. Численная проверка, выполненная Бажановым, выявила любопытное обстоятельство. Выяснилось, что эллиптический анзац Замолодчикова действительно удовлетворяет части уравнений, а что касается остальных уравнений, то каждое из них выполнялось лишь при условии смены знака некоторых весов модели. Никакой сменой знаков не удалось удовлетворить всем уравнениям одновременно. Через 13 лет Мангазееву и Строганову удалось показать [23], что можно фиксировать знаки эллиптического анзаца Замолодчикова так, чтобы он удовлетворял некоторой паре модифицированных (скрученных) уравнений тетраэдра. Было показано, что решение такой пары модифицированных уравнений тетраэдра позволяет построить интегрируемую трехмерную модель с коммутирующим семейством двухслойных матриц перехода. С помощью той же техники, которая была использована при построении решения уравнения тетраэдра для модели Бажанова–Бакстера, в работе [24] удалось обобщить двухцветное эллиптическое решение на произвольное число цветов N . Дальнейшее мощное развитие эти идеи получили в работе [25].

Предлагаемый обзор состоит из трех глав.

Первая глава содержит вывод уравнения тетраэдра как условия перестановочности матриц перехода. Показана связь уравнения тетраэдра с понятием Z -инвариантности и рассмотрены его различные версии, соответствующие различным вариантам взаимодействия спинов на решетке. Перечислены возможные симметричные свойства решений, обусловленные симметрией самого уравнения тетраэдра. Приведено уравнение 4-симплексов, являющееся обобщением уравнения тетраэдра на пространство четырех измерений.

Вторая глава полностью посвящена вопросам, связанным с моделью Бажанова–Бакстера. Она содержит рассмотрение симметричных свойств модели, два различных доказательства так называемых соотношений звезда–звезда, которые были проверены численно, но не доказаны в работе [4]. Предложена и доказана точная форма решений уравнения тетраэдра, соответствующих модели Бажанова–Бакстера. Доказательство использует весьма эффективную математическую технику, являющуюся распространением техники базисных гипергеометрических рядов на особый случай, когда база q является корнем из единицы.

И, наконец, в третьей главе изложена идеология использования пары модифицированных уравнений тетраэдра для построения интегрируемых моделей. Сначала рассмотрен случай $N = 2$, когда решение получается из эллиптического анзаца Замолодчикова. Затем показано, как это решение обобщается на случай произвольного числа цветов N .

Дальнейшие перспективы этого направления обсуждаются в заключении.

1. УРАВНЕНИЕ ТЕТРАЭДРА – ОБЩИЕ ПОНЯТИЯ

1.1. Z -инвариантность и уравнение тетраэдра. В этом разделе мы вводим понятие Z -инвариантности статистической суммы, приписываемой некоторой неоднород-

ной статистической спиновой модели на трехмерной нерегулярной решетке. Достаточным условием Z -инвариантности модели является некоторая специальная система алгебраических соотношений для больцмановских весов. Эти соотношения могут быть легко представлены графически равенством двух тетраэдров и поэтому называются уравнениями тетраэдра, или уравнениями Замолотчикова, которому удалось найти первое нетривиальное решение этих уравнений [1]. Хотя вывод уравнения тетраэдра с помощью Z -инвариантности представляется идейно довольно простым, мы сталкиваемся здесь с некоторой технической проблемой, которая сильно затрудняет изложение. Более простой вывод уравнения тетраэдра как условия коммутации двух матриц перехода содержится в следующем разделе.

Рассмотрим решетку, образованную пересечением некоторого числа плоскостей. Мы считаем, что эти плоскости находятся в общем положении: любые три из них имеют в точности одну общую точку, и никакие четыре плоскости общей точки не имеют. Точку пересечения трех плоскостей будем называть вершиной. Определим теперь статистическую модель, размещая спиновые переменные на этой решетке. Мы будем рассматривать различные типы моделей в зависимости от того, где будут размещаться спиновые переменные, – реберные, граневые или объемные модели. Статистическую сумму Z для этих моделей определим обычным образом, приписывая каждой вершине определенный больцмановский вес, зависящий как от конфигурации спиновых переменных, инцидентных данной вершине, так и от углов, образованных плоскостями, пересекающимися в данной вершине. По спиновым переменным, принадлежащим внутренним (компактным) элементам решетки, производится суммирование, в то время как внешние, т.е. принадлежащие некомпактным элементам решетки, остаются фиксированными.

По аналогии с двумерным случаем [26] назовем Z -инвариантными такие модели, для которых статистическая сумма не меняется при параллельном переносе любой из образующих плоскостей. Рассмотрим, что происходит при параллельном сдвиге какой-либо плоскости. Структура решетки меняется, когда эта плоскость проходит через неподвижную вершину (см. рис. 1).

Рис. 1. Прохождение плоскости через вершину.

Полная перестройка решетки при движении одной из плоскостей сводится к элементарным перестройкам одного или нескольких внутренних тетраэдров. Равенство статистических сумм левой и правой частей рис. 1 называется уравнением тетраэдра и обеспечивает Z -инвариантность модели.

Вроде бы все просто, однако для того чтобы получить конкретную алгебраическую формулировку уравнения тетраэдра, мы должны фиксировать спиновую структуру модели. Это подразумевает не только определенное размещение спиновых переменных на решетке, но также фиксированную ориентацию каждой вершины. Хотелось бы, в част-

ности, выбрать ориентацию так, чтобы все возникающие при движении плоскостей элементарные уравнения тетраэдра имели одинаковую спиновую структуру. Мы покажем ниже, что это может быть сделано для любой нерегулярной решетки. Используемый метод аналогичен методу Бакстера для двумерного случая [26].

Рассмотрим для простоты модель, в которой спиновые переменные размещаются на ребрах решетки. Шесть спинов, принадлежащих ребрам, инцидентным некоторой вершине, будем обозначать $i_a, j_a, i_b, j_b, i_c, j_c$, и определим болцмановский вес модели как матричный элемент $\mathcal{R}_{j_a, j_b, j_c}^{i_a, i_b, i_c}$ некоторого оператора R_{abc} , действующего в прямом произведении трех пространств $a \otimes b \otimes c$ (см. рис. 2).

Рис. 2. Ориентация вершины R_{abc} .

Фиксируем расположение индексов и ориентацию линий рис. 1 так, как это изображено на рис. 3. При этом можно выбрать следующую индексную форму для уравнения тетраэдра:

$$\sum_{k_a, k_b, k_c, k_d, k_e, k_f} \mathcal{R}_{i_a, i_b, i_c}^{k_a, k_b, k_c} \mathcal{R}_{k_a, i_d, i_e}^{j_a, k_d, k_e} \mathcal{R}_{k_b, k_d, i_f}^{j_b, j_d, k_f} \mathcal{R}_{k_c, k_e, k_f}^{j_c, j_e, j_f} =$$

$$= \sum_{k_a, k_b, k_c, k_d, k_e, k_f} \mathcal{R}_{i_c, i_e, i_f}^{k_c, k_e, k_f} \mathcal{R}_{i_b, i_d, k_f}^{k_b, k_d, j_f} \mathcal{R}_{i_a, k_d, k_e}^{j_a, j_d, j_e} \mathcal{R}_{k_a, k_b, k_c}^{j_a, j_b, j_c}. \quad (1)$$

Рис. 3. Уравнение тетраэдра.

Рис. 3 можно рассматривать как графическую форму этого уравнения, при этом индексы k , по которым производится суммирование, соответствуют шести внутренним линиям и не указаны на рисунке.

Ниже мы будем использовать также сокращенную операторную запись этого уравнения. Рассматривая все операторы в (1) как операторы, действующие в прямом произведении шести пространств $a \otimes b \otimes c \otimes d \otimes e \otimes f$, так что, например, оператор R_{abc} действует тривиально в пространствах d, e, f и т.д., мы можем переписать (1) следующим образом:

$$R_{abc} R'_{ade} R''_{bdf} R'''_{cef} = R'''_{cef} R''_{bdf} R'_{ade} R_{abc}. \quad (2)$$

Мы хотим фиксировать эту форму уравнения тетраэдра как каноническую. Однако, как упоминалось выше, здесь есть некоторая проблема. Дело в том, что, фиксируя форму уравнения тетраэдра в виде (2), мы фиксировали как ориентацию всех линий решетки, так и порядок пространств, в которых действуют операторы R , т.е. порядок ребер, инцидентных данной вершине. Однако одни и те же вершины могут входить в различные уравнения тетраэдра, и совсем не очевидно, что наша конвенция согласованна.

Имеющееся доказательство существования такой ориентации всех линий и вершин решетки, что все возникающие при проверке Z -инвариантности элементарные уравнения тетраэдра имеют вид (2), является очень громоздким, и мы его не приводим.

1.2. Уравнение тетраэдра и перестановочность матриц перехода. В этом разделе мы покажем, что уравнение тетраэдра возникает как достаточное условие перестановочности матриц перехода для однородных статистических спиновых систем на трехмерной кубической решетке. Существование семейств коммутирующих матриц перехода ведет к существованию большого числа законов сохранения и тем самым к интегрируемости модели.

Начнем с формулировки трехмерной вершинной модели. Пусть $\mathcal{C}$ — простая кубическая решетка, имеющая размеры $K \times L \times M$. Мы будем предполагать выполнение периодических граничных условий во всех трех направлениях, т.е. будем рассматривать кубическую решетку на трехмерном торе. Поместим на все ребра решетки спиновые переменные σ , $\sigma = 0, 1, \dots, N-1$. Энергия системы определяется суммой энергий элементарных взаимодействий шести спинов, размещенных на ребрах, инцидентных некоторой вершине. Элементарный больцмановский вес модели R представлен на рис. 4. Статистическая сумма модели является суммой по всем возможным спиновым конфигурациям от произведения элементарных больцмановских весов, соответствующих всем вершинам решетки.

Рис. 4. Элементарный больцмановский вес.

Как и в двумерном случае, мы можем записать статистическую сумму с помощью матрицы перехода T :

$$Z = \text{Tr}\{T^K\},$$

Рис. 5. Матрица перехода T .

где T является матрицей размера $N^{LM} \times N^{LM}$ (см. рис. 5).

Спиновые переменные, соответствующие нижним вертикальным ребрам, являются входными индексами T -матрицы, а верхним – выходными. По остальным (горизонтальным) спинам подразумевается суммирование.

Наша трехмерная статистическая система может быть рассмотрена как двумерная система с составным весом. А именно, рассматривая проекцию кубической решетки вдоль третьего (от нас) направления, мы получаем квадратную решетку с эффективным больцмановским весом, показанным на рис. 6. Подразумевается суммирование по всем спиновым переменным, принадлежащим внутренним ребрам. Напомним, что по всем трем направлениям мы имеем периодические граничные условия, т.е. отождествляем спины, расположенные на переднем и заднем ребрах рис. 6, и по ним суммируем.

Рис. 6. Составной вес $\mathcal{R}$.

Достаточным условием того, что две матрицы перехода T и T' перестановочны, является выполнение уравнения Янга–Бакстера для составных весов $\mathcal{R}_{\{1\}\{2\}}$ и $\mathcal{R}'_{\{1\}\{4\}}$:

$$\mathcal{R}_{\{1\}\{2\}} \mathcal{R}'_{\{1\}\{4\}} \mathcal{R}''_{\{2\}\{4\}} = \mathcal{R}''_{\{2\}\{4\}} \mathcal{R}'_{\{1\}\{4\}} \mathcal{R}_{\{1\}\{2\}}.$$

Нумерация пространств 1, 2 и 4 связана с фиксированной нумерацией, которую мы хотим иметь для уравнения тетраэдра. В частности, “скрытое” направление “от нас” в составном весе $\mathcal{R}$ будем нумеровать цифрой 3, а в весе $\mathcal{R}'$ – цифрой 5. Предположим теперь, что сплетающий вес $\mathcal{R}''$ имеет ту же самую составную структуру, что и $\mathcal{R}$, $\mathcal{R}'$ со “скрытым” направлением 6. Получающееся уравнение Янга–Бакстера показано на рис. 7. Левая и правая части этого уравнения представляют собой шпуры произведений M некоторых вспомогательных $N^3 \times N^3$ -матриц l_α и r_α (см. рис. 8, 9).

Спиновые переменные, принадлежащие ребрам, идущим в направлениях 3, 5, 6, являются входными и выходными индексами этих вспомогательных матриц. Индекс α принимает N^6 значений, соответствующих разным значениям спиновых переменных, принадлежащих ребрам фронтальной плоскости.

Рис. 7. Составное уравнение Янга-Бакстера.

Рис. 8. Вспомогательные матрицы l_α и r_α .

Рис. 9. Правая часть составного уравнения Янга-Бакстера.

И, наконец, если существует вспомогательная невырожденная матрица R''' размера $N^3 \times N^3$ такая, что

$$l_\alpha R''' = R''' r_\alpha,$$

Рис. 10. Уравнение тетраэдра.

тогда шпурь в левой и правой частях равны и составное уравнение Янга–Бакстера выполняется. Это соотношение, представленное на рис. 10, и есть искомое уравнение тетраэдра.

В индексной форме мы можем записать его следующим образом:

$$\sum_{\substack{k_1, k_2, k_3, \\ k_4, k_5, k_6}} R_{i_1, i_2, i_3}^{k_1, k_2, k_3} R_{k_1 i_4 i_5}^{j_1 k_4 k_5} R_{k_2 k_4 i_6}^{j_2 j_4 k_6} R_{k_3 k_5 k_6}^{j_3 j_5 j_6} = \\ = \sum_{\substack{k_1, k_2, k_3, \\ k_4, k_5, k_6}} R_{i_3, i_5, i_6}^{k_3, k_5, k_6} R_{i_2 i_4 k_6}^{k_2 k_4 j_6} R_{i_1 k_4 k_5}^{k_1 j_4 j_5} R_{k_1 k_2 k_3}^{j_1 j_2 j_3}. \quad (3)$$

Итак, мы показали, что если R и R' удовлетворяют уравнению тетраэдра (3), то соответствующие матрицы перехода T и T' (см. рис. 5) перестановочны. И если семейство матриц R' для фиксированного R достаточно велико, то мы можем надеяться на точную интегрируемость соответствующей модели.

1.3. Различные версии уравнения тетраэдра. Хорошо известно, что в двумерном случае существуют несколько различных версий уравнения Янга–Бакстера, например вершинная версия или IRF (Interaction Round Face)-версия. Аналогично этому можно предложить несколько вариантов уравнения тетраэдра. В модели, рассмотренной в предыдущем разделе, взаимодействие определялось шестью спинами, принадлежащими ребрам, присоединенным к одной вершине. Рассмотрим теперь модель, в которой спины по-прежнему размещаются на ребрах кубической решетки, но взаимодействие определяется двенадцатью спинами, принадлежащими элементарному кубу (см. рис. 11).

Уравнение тетраэдра для этого варианта моделей имеет вид

$$\sum_{l_1'', l_2'', l_4'', k_3''} S_{i_3 k_3 l_3 k_3''}^{j_1 l_1 k_1 l_1''} S'_{j_4 l_4 k_4 l_4''}^{l_1'' k_1 i_1 k_1'} S''_{l_4'' k_4 i_4 k_4'}^{j_1 l_1' k_1' l_1''} S'''_{j_4 l_4' k_4' l_4''}^{j_2 l_2'' k_2' l_2'} = \\ = \sum_{k_1'', k_2'', k_4'', l_3''} S'''_{l_4 k_4 i_4 k_4''}^{l_2 k_2 i_2 k_2''} S''_{j_4 l_4 k_4' l_4''}^{l_1 k_1 i_1 k_1'} S'_{l_4' k_4' i_4 k_4'}^{j_1 l_1 k_1' l_1''} S_{k_3' l_3' j_3 l_3'}^{l_1' k_1'' i_1 k_1'} \quad (4)$$

Рис. 11. S -вес.

Если мы перейдем теперь к дуальной решетке C^* , т.е. к решетке с вершинами, размещенными в центрах элементарных кубов решетки C , то получим модель со спиновыми переменными на гранях. Модель Замолотчикова, болцмановские веса которой представили первое решение уравнения тетраэдра, является моделью такого типа [1, 2].

Рис. 12. Углы, параметризующие решения уравнения тетраэдра.

Автор проинтерпретировал свою модель в терминах релятивистской матрицы рассеяния прямых струн. Больцмановские веса, удовлетворяющие уравнению тетраэдра, являются элементами факторизованной S -матрицы. Требования релятивистской инвариантности и кроссинг-симметрии дают следующую геометрическую параметризацию решений уравнения тетраэдра:

$$\begin{aligned} S &= S(\theta_3, \theta_1, \theta_2), \\ S' &= S(\pi - \theta_5, \theta_1, \pi - \theta_4), \\ S'' &= S(\theta_6, \pi - \theta_2, \pi - \theta_4), \\ S''' &= S(\theta_6, \theta_3, \theta_5), \end{aligned} \quad (5)$$

где θ_i являются внутренними двугранными углами произвольного тетраэдра (см. рис. 12).

Третий вариант уравнения тетраэдра возникает в моделях со спинами, размещенными в узлах кубической решетки, причем взаимодействие определяется восемью спинами, принадлежащими элементарному кубу (см. рис. 13). Такие модели принято называть IRC (Interaction Round Cube)-моделями.

Рис. 13. W -вес.

Соответствующая версия уравнения тетраэдра имеет вид

$$\begin{aligned}
 & \sum_d W(a_4|c_2, c_1, c_3|b_1, b_3, b_2|d) W'(c_1|b_2, a_3, b_1|c_4, d, c_6|b_4) \times \\
 & \quad \times W''(b_1|d, c_4, c_3|a_2, b_3, b_4|c_5) W'''(d|b_2, b_4, b_3|c_5, c_2, c_6|a_1) = \\
 & = \sum_d W'''(b_1|c_1, c_4, c_3|a_2, a_4, a_3|d) W''(c_1|b_2, a_3, a_4|d, c_2, c_6|a_1) \times \\
 & \quad \times W'(a_4|c_2, d, c_3|a_2, b_3, a_1|c_5) W(d|a_1, a_3, a_2|c_4, c_5, c_6|b_4). \quad (6)
 \end{aligned}$$

Иногда бывает удобно перейти от одной версии уравнения тетраэдра к другой. Так, например, переформулировав модель Замолотчикова в W -виде, Бакстер [8, 9] доказал, что уравнение тетраэдра выполняется, и вычислил статистическую сумму модели. В работе [20] можно найти детальное обсуждение случаев, когда один вариант уравнения тетраэдра сводится к другому.

Далее мы будем называть три типа уравнений тетраэдра (3), (4), (6) соответственно уравнениями R -, S - и W -типа, а три типа бoльцмановских весов (рис. 4, 11, 13) соответственно весами R -, S - и W -типа.

1.4. Симметрии уравнения тетраэдра. В этом разделе мы коротко обсудим симметрии уравнения тетраэдра. Нам будет удобно использовать вершинный (R) тип уравнения тетраэдра, так как он допускает короткую операторную форму записи (2).

Напомним, что оператор R действует в прямом произведении трех пространств. Будем обозначать символами " t_a ", " t_b ", " t_c " транспонирование в соответствующем пространстве. Графически можно представить транспонирование обращением ориентации стрелок на рис. 4.

Рассмотрим сначала транспонирование по всем трем пространствам. Введем обозначение

$$\bar{R}_{abc} = R_{abc}^{t_a t_b t_c}.$$

Тогда уравнение (2) примет вид

$$\bar{R}_{cef} \bar{R}_{bdf} \bar{R}_{ade} \bar{R}_{abc} = \bar{R}_{abc} \bar{R}_{ade} \bar{R}_{bdf} \bar{R}_{cef}.$$

Мы видим, что при условии

$$\bar{R}_{abc}(\theta_a, \theta_b, \theta_c) = R_{abc}(\theta_a, \theta_b, \theta_c) \quad (7)$$

правая часть этого уравнения совпадает с левой частью уравнения (2) и наоборот.

В факторизованной теории рассеяния прямых струн Замоладчикова эта симметрия соответствует T -инвариантности релятивистской S -матрицы, т.е. инвариантности по отношению к обращению времени.

Покажем теперь, что уравнение тетраэдра (2) совместно со следующим соотношением между весами:

$$R_{abc}(\theta_a, \theta_b, \theta_c) = R_{cba}(\theta_c, \theta_b, \theta_a). \quad (8)$$

Эта симметрия тесно связана с P -инвариантностью S -матрицы, т.е. с законом сохранения четности.

Подставим (8) во все весовые функции уравнения (2). Получаем

$$\begin{aligned} R_{cba}(\theta_c, \theta_b, \theta_a) R_{eda}(\pi - \theta_e, \pi - \theta_d, \theta_a) R_{fdb}(\theta_f, \pi - \theta_d, \pi - \theta_b) R_{fec}(\theta_f, \theta_e, \theta_c) = \\ = R_{fec}(\theta_f, \theta_e, \theta_c) R_{fdb}(\theta_f, \pi - \theta_d, \pi - \theta_b) R_{eda}(\pi - \theta_e, \pi - \theta_d, \theta_a) R_{cba}(\theta_c, \theta_b, \theta_a). \end{aligned}$$

Меняя индексы по правилу $a \leftrightarrow f$, $b \leftrightarrow e$, мы вновь приходим к уравнению (2) с переставленными левой и правой частями.

Транспонируем теперь уравнение (2) по отношению к трем пространствам a, b, c :

$$R_{ade}^{t_a} R_{bdf}^{t_b} R_{cef}^{t_c} \bar{R}_{abc} = \bar{R}_{abc} R_{cef}^{t_c} R_{bdf}^{t_b} R_{ade}^{t_a}.$$

Это уравнение вновь сводится к исходному (2), если постулировать “кроссинг”-инвариантность весовых функций²⁾:

$$R_{abc}^{t_a}(\theta_a, \theta_b, \theta_c) = R_{bca}(\pi - \theta_b, \pi - \theta_c, \theta_a).$$

Используя эту симметрию вместе с T - и P -инвариантностями (7), (8), можем переписать уравнение тетраэдра (2) в симметричной форме:

$$R_{abc} R_{aed}^{t_a} R_{fbd}^{t_b} R_{fec}^{t_c} = R_{fec}^{t_c} R_{fbd}^{t_b} R_{aed}^{t_a} R_{abc}, \quad (9)$$

где все аргументы весовых функций совпадают с внутренними двугранными углами произвольного тетраэдра θ_i в соответствии с индексами пространств: $R_{abc} \equiv R_{abc}(\theta_a, \theta_b, \theta_c)$ и т.д.

Наша цель теперь – показать, что еще одна симметрия

$$R_{abc}(\theta_a, \theta_b, \theta_c) = R_{bac}(\theta_b, \theta_a, \theta_c) \quad (10)$$

согласуется с уравнением (2). Сделаем в нем замену

$$R_{abc}^{\dots}(\theta_a, \theta_b, \theta_c) = \tilde{R}_{bac}^{\dots}(\theta_b, \theta_a, \theta_c) \quad (11)$$

(где точки означают, что замена (10) производится во всех весах уравнения). Транспонируем полученное уравнение по отношению к пространству d и поменяем индексы согласно правилу: $a \leftrightarrow b$, $e \leftrightarrow f$. Очевидно, что полученное уравнение имеет тот же вид, что и исходное уравнение (9) с точностью до замены $R \leftrightarrow \tilde{R}$.

²⁾Эта симметрия отличается от кроссинг-симметрии, введенной Замоладчиковым в работе [1].

Объединяя симметрии (8) и (10), мы приходим к “полной” перестановочной инвариантности весовых функций:

$$R_{abc}(\theta_a, \theta_b, \theta_c) = R_{P(a), P(b), P(c)}(\theta_{P(a)}, \theta_{P(b)}, \theta_{P(c)}),$$

где символ P обозначает произвольную перестановку трех элементов. В теории струн эта симметрия соответствует тождественности струн с учетом сохранения четности.

Теперь мы можем представить нашу “кроссинг”-инвариантность в виде

$$R_{abc}^{t_c}(\theta_a, \theta_b, \theta_c) = R_{abc}^{t_a t_b}(\theta_a, \theta_b, \theta_c) = R_{abc}(\pi - \theta_a, \pi - \theta_b, \theta_c),$$

совпадающем с кроссинг-инвариантностью в формулировке Замолотчикова [1].

Мы обсудили возможные симметрии решений уравнения тетраэдра лишь в вершинной (R -тип) формулировке. Однако эти симметрии имеют четкую геометрическую интерпретацию и могут быть легко обобщены на любой тип уравнения тетраэдра. Точную форму этих симметрий для уравнения тетраэдра S -типа можно найти в работах Замолотчикова [1, 2], а для W -типа – в работе Бакстера [8].

1.5. Уравнения d -симплексов. В работе [3] помимо рассмотрения различных версий уравнения тетраэдра было предложено также обобщение на решетки произвольной размерности d . Чтобы не загромождать изложение, ограничимся случаем $d = 4$ и приведем полученное уравнение 4-симплекса без вывода. Для модели вершинного типа уравнение может быть записано в операторной форме:

$$R_{abcd} R'_{aefg} R''_{behi} R'''_{cfhj} R''''_{dgij} = R''''_{dgij} R'''_{cfhj} R''_{behi} R'_{aefg} R_{abcd},$$

где оператор R_{abcd} действует в прямом произведении четырех пространств $a \otimes b \otimes c \otimes d$ и т. д.

2. МОДЕЛЬ БАЖАНОВА–БАКСТЕРА

Настоящая глава посвящена результатам изучения трехмерной модели Бажанова–Бакстера (ББ-модель). В первом разделе мы даем формулировку ББ-модели и показываем, что модель инвариантна относительно действия группы симметрий куба. Трехмерные соотношения звезда–звезда, предложенные Бажановым и Бакстером в качестве условий локальной интегрируемости, соответствуют специальному преобразованию из этой группы. Раздел второй содержит прямое доказательство соотношений звезда–звезда, которое, как мы надеемся, позволит обобщить ББ-модель на произвольные значения параметра q . В последнем разделе мы предлагаем параметризацию инвариантных больцмановских весов модели в терминах двугранных углов произвольного сферического треугольника и доказываем, что параметризованные таким образом весовые функции удовлетворяют уравнениям тетраэдра.

2.1 Формулировка и симметричные свойства модели. Рассмотрим простую кубическую решетку $\mathcal{L}$. В каждом узле $\mathcal{L}$ поместим спиновую переменную, принимающую значения в Z_N для любого целого $N \geq 2$ (элементы Z_N задаются N различными числами $0, 1, \dots, N-1$, рассматриваемыми по модулю N). Предположим, что энергия

взаимодействия определяется значениями восьми спиновых переменных, принадлежащих каждому элементарному кубу. Напомним, что согласно терминологии главы 1 это модель W -типа. Статистическая сумма имеет вид

$$Z = \sum \prod W(a|e, f, g|b, c, d|h),$$

где суммирование проводится по всем спинам, а произведение – по всем кубам, $W(a|e, f, g|b, c, d|h)$ является больцмановским весом спиновой конфигурации $a, \dots, h$, изображенной на рис. 14.

Рис. 14. W -вес.

Бажанов и Бакстер показали, что модель становится интегрируемой, если выбрать больцмановские веса специального вида. Мы приведем полученную ими формулу ниже в слегка видоизмененном виде, приспособленном для наших целей.

Пусть

$$\omega = \exp(2\pi i/N).$$

Сначала определим трехмерное комплексное алгебраическое многообразие Γ с помощью шести уравнений типа Ферма

$$x_i^N - x_j^N = x_{ij}^N, \quad i < j, \quad i, j = 1, 2, 3, 4, \quad (12)$$

на десять однородных переменных (координат) x_i, x_{ij} . Весовые функции будут зависеть только от отношения этих переменных, так что мы имеем в точности три эффективных степени свободы.

Пусть x, y, z – некоторые комплексные параметры, удовлетворяющие уравнению Ферма

$$x^N + y^N = z^N,$$

а l является некоторым элементом Z_N . Основным элементом при построении весовых функций модели являются w -функции

$$w(x, y, z|l) = \prod_{s=1}^l \frac{y}{z - x\omega^s}.$$

Кроме того, определим w -функцию с одним добавочным аргументом

$$w(x, y, z|k, l) = w(x, y, z|k - l)\Phi(l), \quad k, l \in Z_N,$$

где

$$\Phi(l) = \omega^{l(l+N)/2}.$$

Из этих определений следуют простые соотношения для w -функции, которые используются нами ниже,

$$\begin{aligned} w(x, y, z|l + k) &= w(x, y, z|k)w(x\omega^k, y, z|l), \\ w(x, y, z|k, l) &= \omega^{kl}/w(z, \omega^{1/2}y, \omega x|l, k). \end{aligned}$$

Весовая функция ББ-модели $W_P(a|e, f, g|b, c, d|h)$ может быть определена формулой

$$\begin{aligned} W_P(a|e, f, g|b, c, d|h) &= \frac{\omega^{fb}}{\omega^{ag}} \left[\frac{w(x_{14}x_{23}, x_{12}x_{34}, x_{13}x_{24}|a + d, e + f)}{w(x_{14}x_{23}, x_{12}x_{34}, x_{13}x_{24}|g + h, c + b)} \right]^{1/2} \times \\ &\times \left[\frac{w(x_4, x_{34}, x_3|e + h, d + c)}{w(x_4, x_{34}, x_3|a + b, f + g)} \right]^{1/2} \left[\frac{w(x_2, x_{12}, x_1|e + g, a + c)}{w(x_2, x_{12}, x_1|d + b, f + h)} \right]^{1/2} \times \\ &\times \frac{\omega^{(ag+gb+bh)/2}}{\omega^{(hd+de+ea)/2}} \left\{ \sum_{\sigma \in Z_N} \frac{w(x_3, x_{13}, x_1|d, h + \sigma)w(x_4, x_{24}, x_2|a, g + \sigma)}{w(x_4, x_{14}, x_1|e, c + \sigma)w(x_3/\omega, x_{23}, x_2|f, b + \sigma)} \right\}_0, \quad (13) \end{aligned}$$

где нижний индекс “0” у фигурных скобок означает, что выражение в фигурных скобках делится само на себя со всеми внешними спинowymi переменными, приравненными к нулю, и нижний аргумент “ P ” у W -веса обозначает абстрактную точку многообразия Γ (см. (12)), определяемую координатами x_i, x_{ij} .

Заметим, что наше определение веса W с точностью до нормировочного фактора и некоторых калибровочных преобразований узлового, реберного и граневого типов совпадает с весовой функцией $V(a|e, f, g|b, c, d|h)$ работы [4], если сделать следующие отождествления:

$$\begin{aligned} x_1 &= q, \quad x_2 = q', \quad x_3 = p, \quad x_4 = p', \\ x_{12} &= q\Delta(q'/q), \quad x_{13} = q\Delta(p/q), \quad x_{14} = q\Delta(p'/q), \\ x_{23} &= \omega^{-1/2}p\Delta(q'/p), \quad x_{24} = q'\Delta(p'/q'), \quad x_{34} = p\Delta(p'/p). \end{aligned}$$

Упомянутые калибровочные преобразования, которые не влияют на величину статистической суммы, выбраны таким образом, что вся W -весовая функция инвариантна относительно действия группы G всех преобразований симметрии трехмерного куба в следующем смысле. Пусть α является некоторым элементом из G . Оказывается, что существует такой автоморфизм $\mathcal{A}_\alpha$ многообразия Γ , для которого справедливо следующее равенство:

$$W_P(a|e, f, g|b, c, d|h) = W_{\mathcal{A}_\alpha(P)}(a'|e', f', g'|b', c', d'|h'), \quad (14)$$

где $P \in \Gamma$ и набор штрихованных индексов $(a', \dots, h')$ получается из набора $(a, \dots, h)$ действием элемента α^{-1} на куб рис. 14.

Рис. 15. ρ - и τ -преобразования.

Для того чтобы доказать это утверждение и построить соответствующие автоморфизмы, заметим, что группа G порождается всего двумя элементами. В качестве первого из этих элементов ρ можно взять вращение вокруг вертикальной линии, связывающей центры двух противоположных горизонтальных граней куба, на угол $\pi/2$ по часовой стрелке по отношению к верхнему наблюдателю, а в качестве второго элемента τ – отражение по отношению к плоскости, проходящей через СЗ–ЮВ-диагонали задней и передней вертикальных граней (см. рис. 15).

Для элемента τ мы получаем следующий частный случай формулы (14):

$$W_P(a|e, f, g|b, c, d|h) = W_{\mathcal{A}_\tau(P)}(a|f, e, g|c, b, d|h), \quad (15)$$

где автоморфизм $\mathcal{A}_\tau$ определяется его действием на координаты x_i, x_{ij} :

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_\tau^*(x_1) &= \omega x_1 x_2 x_4, & \mathcal{A}_\tau^*(x_2) &= x_1 x_2 x_3, \\ \mathcal{A}_\tau^*(x_3) &= \omega x_2 x_3 x_4, & \mathcal{A}_\tau^*(x_4) &= x_1 x_3 x_4, \\ \mathcal{A}_\tau^*(x_{12}) &= \omega^{1/2} x_1 x_2 x_{34}, & \mathcal{A}_\tau^*(x_{13}) &= \omega x_2 x_4 x_{13}, \\ \mathcal{A}_\tau^*(x_{14}) &= \omega x_1 x_4 x_{23}, & \mathcal{A}_\tau^*(x_{23}) &= x_2 x_3 x_{14}, \\ \mathcal{A}_\tau^*(x_{24}) &= x_1 x_3 x_{24}, & \mathcal{A}_\tau^*(x_{34}) &= \omega^{1/2} x_3 x_4 x_{12}. \end{aligned}$$

Справедливость формулы (15) проверяется непосредственной подстановкой выражений для $\mathcal{A}_\tau$ в формулу (13) для веса W .

Менее тривиально строится автоморфизм для элемента ρ . Напомним одно простое свойство преобразования Фурье на кольце Z_N . Пусть $f(\sigma)$ и $g(\sigma)$ являются произвольными функциями, определенными на Z_N . Определим фурье-образы этих функций согласно формуле

$$\tilde{f}(k) = \sum_{\sigma \in Z_N} \omega^{k\sigma} f(\sigma).$$

Имеем следующее тождество:

$$\sum_{\sigma \in Z_N} f(\sigma) g(\sigma) \omega^{k\sigma} = \frac{1}{N} \sum_{\sigma \in Z_N} \tilde{f}(k - \sigma) \tilde{g}(\sigma).$$

Применим эту формулу для преобразования весовой функции W (13), беря в качестве $f(\sigma)$ и $g(\sigma)$ функции

$$\frac{w(x_3, x_{13}, x_1 | d - h - \sigma)}{w(x_4, x_{14}, x_1 | e - c - \sigma)} \quad \text{и} \quad \frac{w(x_4, x_{24}, x_2 | a - g - \sigma)}{w(x_3 / \omega, x_{23}, x_2 | f - b - \sigma)}.$$

Можно показать, что фурье-преобразование от отношения двух w -функций также сводится к отношению w -функций. Соответствующие формулы использовались в работах по киральной модели Поттса (см., например, [27]).

В результате утомительных, хотя и прямолинейных вычислений мы получаем следующую форму (14) для $\alpha = \rho$:

$$W_P(a|e, f, g|b, c, d|h) = W_{\mathcal{A}_\rho(P)}(g|c, a, b|f, h, e|d), \quad (16)$$

где $\mathcal{A}_\rho$ определены следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_\rho^*(x_1) &= \omega x_3 x_{14} x_{23}, & \mathcal{A}_\rho^*(x_2) &= x_3 x_{13} x_{24}, \\ \mathcal{A}_\rho^*(x_3) &= \omega x_4 x_{13} x_{23}, & \mathcal{A}_\rho^*(x_4) &= x_3 x_{13} x_{23}, \\ \mathcal{A}_\rho^*(x_{12}) &= \omega^{1/2} x_3 x_{12} x_{34}, & \mathcal{A}_\rho^*(x_{13}) &= \omega x_1 x_{23} x_{34}, \\ \mathcal{A}_\rho^*(x_{14}) &= \omega x_3 x_{23} x_{34}, & \mathcal{A}_\rho^*(x_{23}) &= x_2 x_{13} x_{34}, \\ \mathcal{A}_\rho^*(x_{24}) &= x_3 x_{13} x_{34}, & \mathcal{A}_\rho^*(x_{34}) &= \omega^{1/2} x_{13} x_{23} x_{34}. \end{aligned}$$

Поскольку любой элемент α группы G может быть получен соответствующей композицией порождающих элементов τ и ρ , то и формула (14) для любого элемента α получается последовательным применением формул (15) и (16).

В качестве примера рассмотрим соотношение (14) для

$$\alpha = (\rho * \tau)^3.$$

Формула (14) сводится в этом случае к соотношению звезда–звезда для весовых функций ББ-модели, которое является альтернативой уравнению тетраэдра в подходе Бажанова–Бакстера и которое они численно проверили для случая $N = 3$ (см. уравнение (6.1)

работы [4]). Используемые в этом уравнении переменные z и $\Delta(z)$ связаны с нашими обозначениями следующим образом:

$$z = \omega^{-1} \frac{x_{13} x_{24}}{x_{14} x_{23}}, \quad \Delta(z) = \omega^{-1/2} \frac{x_{12} x_{34}}{x_{14} x_{23}}.$$

2.2. Прямое доказательство трехмерных соотношений звезда–звезда. В этом разделе мы дадим другое доказательство трехмерных соотношений звезда–звезда, техника которого может оказаться полезной при обобщении модели на произвольные значения параметра ω .

При проведении этого прямого доказательства нам будет удобно перейти к переменным оригинальной работы [4], которые приведены ниже.

Определим две функции $\Delta(x)$ и $f(x, l)$ следующим образом:

$$\Delta(x) = (1 - x^N)^{1/N}, \quad f(x, l) = \prod_{k=1}^l (1 - \omega^k x)^{-1}.$$

Очевидно, что w -функция равна

$$w(x, l) = \Delta(x)^l f(x, l).$$

Далее, пусть даны пять комплексных параметров p, p', q, q', z , связанных соотношением

$$z = \exp(-i\pi/N) \left\{ -\frac{(p^N - q^N)(p'^N - q'^N)}{(p^N - q'^N)(p'^N - q^N)} \right\}^{1/N}.$$

Доказательство будет проведено в три этапа.

Этап 1. Соотношение звезда–звезда (6.1) из работы [4] после сдвига внешних спинов

$$f \rightarrow f + b, \quad a \rightarrow a + g, \quad e \rightarrow e + c, \quad d \rightarrow d + h$$

и перераспределения ω -факторов может быть записано в следующей форме:

$$\begin{aligned} & w(z, e - d - t) w(q'/q, d - f) w^{-1}(q'/q, e - a) \times \\ & \quad \times \sum_{\sigma} \{ w^{-1}(p'/q, \sigma - f) w(p/q, \sigma - a) w(q'/p, e - \sigma) \tilde{w}(p'/q', \sigma - d) \omega^{dt - \sigma t} \} = \\ & = w(z, a - f - t) w(p'/p, e - d) w^{-1}(p'/p, a - f) \times \\ & \quad \times \sum_{\sigma} \{ w^{-1}(p'/q, e - \sigma) w(p/q, d - \sigma) w(q'/p, \sigma - f) \tilde{w}(p'/q', a - \sigma) \omega^{\sigma t - at} \}, \end{aligned}$$

где

$$\tilde{w}(x, l) = w(x, l) * \Phi(l)$$

и мы ввели новую спиновую переменную t для обозначения комбинации $a - f + g + h - b - c$. Заметим, что для любого фиксированного t это уравнение является фактически обычными двумерными соотношениями типа звезда–звезда.

Этап 2. Подставляя в предыдущее соотношение выражение для $w(x, l)$ через $\Delta(x)$ и $f(x)$ и рассматривая отдельно радикалы Δ , мы получим две различных комбинации последних:

$$\Delta(z)\Delta(p/q)\Delta(p'/q')\Delta^{-1}(q'/q)\Delta^{-1}(p'/p)$$

и

$$\Delta(p/q)\Delta(p'/q')\Delta^{-1}(p'/q)\Delta^{-1}(q'/p).$$

Нетрудно проверить, что первая комбинация равна единице, тогда как вторая равна $z\omega^{1/2}p/q'$. Изменим переменную суммирования σ в правой части с помощью формулы $\sigma \rightarrow a + d - \sigma$. Подставляя сейчас $z\omega^t$ взамен z , мы “спрячем” также спиновую переменную t в z . Результирующие соотношения имеют вид

$$\begin{aligned} & f(z, e - d)f(q'/q, d - f)f^{-1}(q'/q, e - a) \sum_{\sigma} \{ (z\omega^{1/2}p/q')^{\sigma} f^{-1}(p'/q, \sigma - f) \times \\ & \quad \times f(p/q, \sigma - a)f(q'/p, e - \sigma)f(p'/q', \sigma - d)\Phi(\sigma - d) \} = \\ & = f(z, a - f)f(p'/p, e - d)f^{-1}(p'/p, a - f) \times \\ & \quad \times \sum_{\sigma} \{ (z\omega^{1/2}p/q')^{\sigma} f^{-1}(p'/q, \sigma + e - a - d) \times \\ & \quad \times f(p/q, \sigma - a)f(q'/p, a + d - f - \sigma)f(p'/q', \sigma - d)\Phi(\sigma - d) \}, \end{aligned} \quad (17)$$

где z удовлетворяет соотношению

$$z^N = \frac{(p^N - q^N)(p'^N - q'^N)}{(p^N - q'^N)(p'^N - q^N)}. \quad (18)$$

Этап 3. Замечательный факт состоит в том, что если мы позволим переменной суммирования σ пробегать значения от $-\infty$ до ∞ , тогда соотношения (17) становятся тождествами как формальные степенные разложения по переменной z (под словом “формальные” подразумевается, что в данный момент мы не рассматриваем вопрос о сходимости). Доказательство этого утверждения может быть проведено с помощью индукции по спиновой переменной $n = e + f - a - d$. Действительно, при $n = 0$ наши соотношения выполняются тождественно. Предполагая, далее, что соотношения (17) справедливы для некоторого $n \neq 0$ и используя рекуррентную формулу для функции f

$$f(x, m) = f(x, m + 1)(1 - x\omega^{m+1}),$$

можно показать, что они действительно справедливы для $n \pm 1$. Интересно заметить, что эти соотношения являются также тождествами по отношению к ω и параметр ω уже не обязан быть корнем из единицы³⁾.

Возвращаясь к случаю конечного суммирования с параметром ω , являющимся корнем из единицы, мы можем замкнуть переход по индукции на кольце Z_N при условии, что выполняется добавочное соотношение (18). Что и требовалось доказать. В завершение этого раздела мы хотели бы высказать предположение о возможности серьезного рассмотрения ББ-модели с бесконечным числом спиновых переменных и с дополнительным

³⁾Мы должны писать $(-1)^k$ вместо $\omega^{kN/2}$ в выражении для функции $\Phi(k)$, для того чтобы исключить целый параметр N .

свободным параметром ω^4). Основная проблема – это, конечно, сходимость бесконечных рядов. К несчастью, области сходимости правой и левой частей соотношений (17) различны, т.е. для $|\omega| < 1$ и соответствующего выбора других непрерывных параметров левая часть сходится при $n \geq 0$, тогда как правая часть – при $n \leq 0$.

С другой стороны, мы можем интерпретировать соотношения (17) как два различных разложения одной и той же функции, определенной для всех значений индекса n . Конечно, соотношения звезда–звезда в этом случае удовлетворяются по определению и, следовательно, не несут информации о коммутативности трансфер-матриц в обычном смысле. Тем не менее мы полагаем, что возможность такой интерпретации соотношений звезда–звезда может привести к новым понятиям интегрируемости статистических систем.

2.3. Уравнения тетраэдра для модели Бажанова–Бакстера. В этом разделе мы докажем справедливость уравнений тетраэдра для больцмановских весов ББ-модели при специальном выборе параметров.

Напомним формулировку уравнения тетраэдра W -типа:

$$\begin{aligned} & \sum_d W(a_4|c_2, c_1, c_3|b_1, b_3, b_2|d) W'(c_1|b_2, a_3, b_1|c_4, d, c_6|b_4) \times \\ & \times W''(b_1|d, c_4, c_3|a_2, b_3, b_4|c_5) W'''(d|b_2, b_4, b_3|c_5, c_2, c_6|a_1) = \\ & = \sum_d W'''(b_1|c_1, c_4, c_3|a_2, a_4, a_3|d) W''(c_1|b_2, a_3, a_4|d, c_2, c_6|a_1) \times \\ & \times W'(a_4|c_2, d, c_3|a_2, b_3, a_1|c_5) W(d|a_1, a_3, a_2|c_4, c_5, c_6|b_4), \end{aligned} \quad (19)$$

где W , W' , W'' и W''' – некоторые четыре набора больцмановских весов. Две части уравнения (19) могут быть представлены геометрически как статистические суммы ромбического додекаэдра с двумя различными ориентациями (см. рис. 2 в [8]). Как было показано в главе 1, эти соотношения гарантируют коммутативность трансфер-матриц слой–слой, построенных из W - и W' -весов:

$$T(W)T(W') = T(W')T(W).$$

В этом смысле они являются локальными условиями интегрируемости для статистической модели. Хотя трехмерные соотношения звезда–звезда выглядят проще и тоже являются локальными условиями интегрируемости, интересно построить решение уравнения тетраэдра для ББ-модели, например для того, чтобы получить новую релятивистскую S -матрицу в пространстве-времени $2+1$. Заметим, что единственный известный пример – S -матрица Замолотчикова – является частным случаем нашей конструкции для $N = 2$.

Мы покажем ниже, что четыре различных веса, входящие в уравнение тетраэдра, являются одной и той же функцией, определенной на многообразии Γ (см. (12)). Сначала формулируем наш результат. Пусть

$$W, W', W'', W''' = W_P, W_{P'}, W_{P''}, W_{P'''}$$

⁴⁾Заметим, что в этом случае существует физическая область параметров модели, где все больцмановские веса положительны.

с некоторыми $P, P', P'', P''' \in \Gamma$.

Для начала рассмотрим $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ – три угла некоторого сферического треугольника. Существуют три основных соотношения между $\{\theta_i\}$ и $\{a_i\}$:

$$\cos \theta_k = \sin \theta_i \sin \theta_j \cos(Na_k) - \cos \theta_i \cos \theta_j, \quad i \neq j \neq k \neq i = 1, 2, 3,$$

где Na_i – сторона треугольника, противолежащая θ_i . Кроме того, введем N -е части линейных эксцессов $\beta_0, \dots, \beta_3$ формулами

$$2\beta_0 = 2\pi/N - a_1 - a_2 - a_3, \quad \beta_i = \pi/N - a_i - \beta_0$$

для $i = 1, 2, 3$. Пусть $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ вещественные и лежат в интервале от 0 до π . Определим

$$c_i = [\cos(\theta_i/2)]^{1/N}, \quad s_i = [\sin(\theta_i/2)]^{1/N}, \quad i = 1, 2, 3,$$

где необходимо выбрать действительные положительные корни. Используя эти переменные, фиксируем координаты x_i, x_{ij} , входящие в определение весов W , следующим образом:

$$\begin{aligned} x_1 &= c_2/s_2, & x_2 &= \omega^{-1/2} s_2/c_2, \\ x_3 &= \exp(-ia_3) s_1/c_1, & x_4 &= \omega^{-1/2} \exp(-ia_3) c_1/s_1, \\ x_{12} &= 1/c_2 s_2, & x_{13} &= \exp(i\beta_3) s_3/c_1 s_2, \\ x_{14} &= \exp(-i\beta_1) c_3/s_1 s_2, & x_{23} &= \omega^{-1/2} \exp(-i\beta_2) c_3/c_1 c_2, \\ x_{24} &= \omega^{-1/2} \exp(i\beta_0) s_3/s_1 c_2, & x_{34} &= \exp(-ia_3)/c_1 s_1. \end{aligned} \quad (20)$$

Легко проверить, что эти координаты действительно удовлетворяют уравнениям (12), определяющим многообразие Γ . Подставляя их в определение W_P , мы получим вес как функцию трех углов $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ (так же как и спиновых переменных), так что можем записать эту зависимость в виде $W[\theta_1, \theta_2, \theta_3]$. Окончательный результат таков:

$$\begin{aligned} W_P &= W[\theta_2, \theta_1, \theta_3], & W_{P'} &= W[\pi - \theta_6, \theta_1, \pi - \theta_4], \\ W_{P''} &= W[\theta_5, \pi - \theta_3, \pi - \theta_4], & W_{P'''} &= W[\theta_5, \theta_2, \theta_6]. \end{aligned} \quad (21)$$

Углы, входящие в эти формулы, являются двугранными углами некоторого произвольного тетраэдра, выбираемыми согласно рис. 15 главы 1. Мы сформулировали результат и осталось его доказать.

Нам окажется полезной следующая система соотношений между координатами, которая равносильна выбранной нами параметризацией:

$$\begin{aligned} \frac{x_2}{x_1} &= \frac{x'_2}{x'_1} = k_1, & \frac{x_{12}}{x_1} &= \frac{x'_{12}}{x'_1} = k'_1, \\ \frac{x_3}{\omega x_4} &= \frac{x''_3}{x''_1} = k_2, & \frac{x_{34}}{\omega^{1/2} x_4} &= \frac{x'''_{12}}{x'''_1} = k'_2, \\ \frac{x_{13} x_{24}}{x_{14} x_{23}} &= \frac{x''_1}{x''_2} = \omega k_3, & \frac{x_{12} x_{34}}{x_{14} x_{23}} &= \frac{x''_{12}}{x''_2} = \omega^{1/2} k'_3, \\ \frac{x'_{14} x'_{23}}{x'_{13} x'_{24}} &= \frac{x''_{14} x''_{23}}{x''_{13} x''_{24}} = k_4, & \frac{x'_{12} x'_{34}}{x'_{13} x'_{24}} &= \frac{x''_{12} x''_{34}}{x''_{13} x''_{24}} = k'_4, \\ \frac{x'_3}{x'_4} &= \frac{x''_3}{x''_4} = \omega k_5, & \frac{x'_{34}}{x'_4} &= \frac{x'''_{34}}{x'''_4} = \omega^{1/2} k'_5, \\ \frac{x'_4}{x'_3} &= \frac{x'''_{13} x'''_{24}}{\omega x'_{14} x'_{23}} = k_6, & \frac{x'_{34}}{x'_3} &= \frac{x'''_{12} x'''_{34}}{\omega^{1/2} x'_{14} x'_{23}} = k'_6, \end{aligned} \quad (22)$$

где штрихи добавлены к переменным типа x в соответствии со штрихами точек P и k_i , k'_i – параметры, связанные уравнениями Ферма

$$k_i^N + k'^N_i = 1, \quad i = 1, \dots, 6,$$

– даются следующими выражениями:

$$k_i = \omega^{-1/2} [\operatorname{tg}(\theta_i/2)]^{2/N}, \quad k'_i = 1/[\cos(\theta_i/2)]^{2/N}, \quad i = 1, \dots, 6.$$

Помимо этих соотношений нам понадобятся при доказательстве четыре добавочных соотношения:

$$\begin{aligned} \omega \frac{x_{23}}{x_3} \frac{x'_4}{x'_{24}} \frac{x''_{24}}{x''_2} \frac{x'''_2}{x'''_{24}} &= 1, & \frac{x_{13}}{x_1} \frac{x'_1}{x'_{14}} \frac{x''_{14}}{x''_1} \frac{x'''_1}{x'''_{14}} &= 1, \\ \frac{x_{14}}{x_4} \frac{x'_4}{x'_{14}} \frac{x''_{14}}{x''_4} \frac{x'''_4}{x'''_{24}} &= 1, & \frac{x_{13}}{x_3} \frac{x'_3}{x'_{13}} \frac{x''_{13}}{x''_1} \frac{x'''_1}{x'''_{23}} &= 1. \end{aligned} \quad (23)$$

Они также легко проверяются с помощью формул сферической тригонометрии.

Для доказательства нам понадобятся два специальных тождества для w -функций. Первое тождество назовем соотношением ортогональности

$$\sum_{k \in Z_N} \frac{w(x, y, z|k, l)}{w(x, y, \omega z|k, m)} = N \delta_{l, m} \frac{(1 - z/x)}{(1 - z^N/x^N)}, \quad (24)$$

где $l, m \in Z_N$, x, y, z лежат на кривой Ферма и $\delta_{l, m}$ – символ Кронекера на Z_N .

Чтобы сформулировать второе соотношение, введем нециклический аналог w -функции, определяемый рекуррентно следующим образом:

$$w(x|0) = 1, \quad \frac{w(x|l)}{w(x|l-1)} = \frac{1}{(1 - x\omega^l)}, \quad l \in Z, \quad (25)$$

где Z – множество всех целых чисел. Очевидно, что

$$w(x, y, z|l) = \left(\frac{y}{z}\right)^l w(x/z|l), \quad l \in Z_N, \quad (26)$$

где индекс l , рассматриваемый по модулю N , интерпретируется как элемент Z_N . Имеем следующее тождество:

$$\begin{aligned} & \left\{ \sum_{\sigma \in Z_N} \frac{w(x_1, y_1, z_1|a + \sigma) w(x_2, y_2, z_2|b + \sigma)}{w(x_3, y_3, z_3|c + \sigma) w(x_4, y_4, z_4|d + \sigma)} \right\}_0 = \\ &= \frac{(x_2 y_1 / x_1 z_2)^a (x_1 y_2 / x_2 z_1)^b (z_3 / y_3)^c (z_4 / y_4)^d}{\Phi(a - b) \omega^{(a+b)/2}} \times \\ & \times \frac{w(\omega x_3 x_4 z_1 z_2 / x_1 x_2 z_3 z_4 | c + d - a - b)}{w\left(\frac{x_4 z_1}{x_1 z_4} \mid d - a\right) w\left(\frac{x_3 z_2}{x_2 z_3} \mid c - b\right) w\left(\frac{x_3 z_1}{x_1 z_3} \mid c - a\right) w\left(\frac{x_4 z_2}{x_2 z_4} \mid d - b\right)}, \end{aligned} \quad (27)$$

где нижний индекс “0” при фигурных скобках указывает на то, что левая часть нормирована на единицу при значениях внешних спинов, равных нулю. Кроме того, наложены следующие ограничения:

$$\frac{y_1}{z_1} \frac{y_2}{z_2} \frac{z_3}{y_3} \frac{z_4}{y_4} = \omega.$$

Назовем соотношение (27) соотношением “звезда–квадрат”⁵⁾.

Отметим, что отдельные w -функции в правой части соотношения (27) не являются однозначными функциями на Z_N , но в целом правая часть является циклической по внешним спинам a, b, c, d .

Теперь покажем, что уравнение тетраэдра (19) есть следствие соотношений ортогональности и звезда–квадрат при условии, что наложены ограничения (22) и (23).

Подставим в уравнение (19) выражение (13) для веса W . Благодаря условиям (22) все факторы перед фигурными скобками формулы (13) для больцмановских весов, входящих в (19), взаимно сокращаются.

Умножим обе части получившегося соотношения на следующее произведение w функций:

$$\begin{aligned} & \frac{w(x_3'', x_{23}'', x_2'' | c_4, a_2 + l_2)}{w(x_3''' / \omega, x_{13}''', x_1''' | c_6, a_1 + l_1)} \cdot \frac{w(x_3', \omega x_{23}', x_2' | a_3, c_4 + l_3)}{w(x_4, x_{24}, \omega x_2 | a_4, c_3 + l_4)} \times \\ & \times \frac{w(x_4', x_{14}'', x_1' / w | b_2, c_2 + m_2)}{w(x_4''', x_{24}''', \omega x_2''' | b_1, c_3 + m_1)} \cdot \frac{w(\omega x_4', x_{14}', x_1' | c_2, b_3 + m_3)}{w(x_3 / \omega, x_{13}, x_1 | c_6, b_4 + m_4)}, \end{aligned}$$

и просуммируем по $a_1, a_2, a_3, a_4, b_1, b_2, b_3, b_4$. Отметим, что благодаря соотношениям ортогональности (24) мы не теряем информацию при переходе от спинов a_i, b_i к l_i, m_i . Полученную систему уравнений будем называть трансформированным уравнением тетраэдра.

Можно видеть, что суммирование по спинам a_1, a_2, a_3, a_4 в левой части, а также суммирование по b_1, b_2, b_3, b_4 в правой части дают по четыре символа Кронекера, что позволяет снять суммирование по спинам σ , которые возникли из выражения (13) для функций $W_P, W_{P'}, W_{P''}, W_{P'''}$. В свою очередь, суммирование по a_1, a_2, a_3, a_4 в правой части и по b_1, b_2, b_3, b_4 в левой сводится к использованию соотношений звезда–квадрат (27) при условии выполнения соотношений (23).

После проведения этих операций суммы по центральным спинам d в обеих частях трансформированного уравнения тетраэдра примут вид соотношения ортогональности.

В итоге мы получаем слева и справа одинаковые произведения десяти w -функций, зависящих от спиновых переменных $l_i, m_i, i = 1, \dots, 4$, и $c_i, i = 1, \dots, 6$, с точностью до некоторой не зависящей от спинов постоянной.

С другой стороны, можно показать, что уравнение тетраэдра (19) становится тождеством при некоторых специальных значениях внешних спинов. Для этой цели можно применить $(\tau\rho)^3$ -преобразование куба ко всем больцмановским весам $W_P, W_{P'}, W_{P''}, W_{P'''}$ правой части уравнения тетраэдра. Это преобразование соответствует следующему соотношению для весовых функций:

$$W_P(a|efg|bcd|h) = W_P(h|bcd|efg|a), \quad P \in \Gamma.$$

⁵⁾ Подобное равенство возникло при изучении восьмивершинной модели (раздел 10.13 работы [28]).

Полагая все внешние спины равными нулю, мы получаем тождество, т.е. упомянутая выше постоянная равна единице, что и завершает доказательство уравнения тетраэдра для ББ-модели.

Наш метод доказательства существенно отличен от метода, использованного Бакстером в его работе [8] при доказательстве решения Замолдчикова, которое соответствует частному случаю $N = 2$.

Соотношения ортогональности и соотношения звезда–квадрат выглядят значительно проще, чем уравнение тетраэдра. Вероятно, новые решения этих соотношений помогут нам в поисках новых решений уравнений тетраэдра.

3. МОДИФИЦИРОВАННЫЕ УРАВНЕНИЯ ТЕТРАЭДРА

Как мы видели в главе 1, решения уравнения тетраэдра приводят к перестановочности матриц перехода и к вероятной интегрируемости соответствующей модели. Речь шла об однородных спиновых моделях на кубической решетке. Можно обобщить это рассмотрение на неоднородные модели с двумя разными типами весовых функций (“шахматные” модели). При этом решение пары модифицированных уравнений тетраэдра ведет к перестановочности двухслойных матриц перехода.

В первом разделе настоящей главы мы даем формулировку модели в простейшем случае $N = 2$. Следующий раздел содержит краткое изложение идеологии использования модифицированных уравнений тетраэдра. В третьем разделе дается набросок доказательства того, что наша модель действительно доставляет решение модифицированного уравнения тетраэдра.

3.1. Формулировка модели. Согласно терминологии главы 1 рассматриваемая модель принадлежит к W -типу, т.е. спиновые переменные размещаются в узлах решетки, а взаимодействие определяется восемью спинами, принадлежащими одному элементарному кубу (см. рис. 16).

Рис. 16. W -вес.

В отличие от рассматриваемых ранее однородных моделей, в новой модели мы будем различать элементарные кубы двух сортов: A и B . Все кубики, имеющие общую грань с кубиком A , имеют тип B и наоборот. При этом кубикам типа A соответствует весовая функция W , а кубикам типа B — $\overline{W}$ (см. рис. 17).

Рис. 17. Чередование весов модели.

Три спектральных параметра, от которых зависит весовая функция $W(a|efg|bcd|h; \theta_1, \theta_2, \theta_3)$, связаны соотношением

$$\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 = \pi. \quad (28)$$

Все спиновые переменные принимают значения 0, 1, и все вычисления над ними проводятся по модулю 2.

W -функции для нашего случая удовлетворяют следующим свойствам симметрии:

$$\begin{aligned} W(a|e, f, g|b, c, d|h) &= W(\bar{a}|e, f, g|\bar{b}, \bar{c}, \bar{d}|h) = \\ &= W(a|\bar{e}, \bar{f}, \bar{g}|b, c, d|\bar{h}) = W(\bar{a}|\bar{e}, \bar{f}, \bar{g}|\bar{b}, \bar{c}, \bar{d}|\bar{h}), \end{aligned}$$

где $\bar{a} = 1 - a$, $\bar{b} = 1 - b$ и т. д.; отметим, что спектральные параметры во всех W -функциях одни и те же. С учетом этой симметрии мы имеем 64, вообще говоря различные, весовые функции.

Определим следующие комбинации спиновых переменных a, e, f, g, b, c, d, h :

$$\begin{aligned} j_1 &= a + b + e + h, & j_2 &= a + c + f + h, & j_3 &= a + d + g + h, \\ m_1 &= e + h, & m_2 &= f + h, & m_3 &= g + h, \\ l_1 &= j_2 + j_3, & l_2 &= j_1 + j_3, & l_3 &= j_1 + j_2. \end{aligned}$$

Напомним, что все спиновые переменные в этих формулах принимают значения 0, 1. Весовая функция W определяется формулой

$$W(a|e, f, g|b, c, d|h; \theta_1, \theta_2, \theta_3) = (-1)^{\Phi(j_1, j_2, j_3, m_1, m_2, m_3)} \frac{s_1^{j_1} s_2^{j_2} s_3^{j_3}}{c_1^{l_1} c_2^{l_2} c_3^{l_3}} k^{j_1 j_2 j_3}, \quad (29)$$

где нами использованы следующие обозначения:

$$s_i = \left[\operatorname{sn} \left(\frac{\theta_i K}{\pi} \right) \right]^{1/2}, \quad c_i = \left[\frac{\operatorname{cn} \left(\frac{\theta_i K}{\pi} \right)}{\operatorname{dn} \left(\frac{\theta_i K}{\pi} \right)} \right]^{1/2}, \quad i = 1, 2, 3, \quad (30)$$

sn , cn и dn – эллиптические функции Якоби модуля k , K – полный эллиптический интеграл первого рода (см., например, [29]).

Если спектральные параметры θ_i удовлетворяют условию $0 \leq \theta_i \leq \pi$, $i = 1, 2, 3$, тогда все значения эллиптических функций неотрицательны и можно фиксировать знак плюс у всех квадратных корней в формулах (30).

Знаковый фактор Φ в формуле для веса (29) определяется следующим выражением:

$$\begin{aligned} \Phi(j_1, j_2, j_3, m_1, m_2, m_3) = & j_1 m_2 m_3 + j_2 m_3 m_1 + j_3 m_1 m_2 + \\ & + n_1(j_1 m_2 m_3 + j_2 m_3 m_1 + j_3 m_1 m_2 + j_1 j_2 m_3 + j_2 j_3 m_1 + j_3 j_1 m_2) + \\ & + n_2 j_1 j_2 j_3 + n_3(j_1 + j_2 + j_3) + n_4(m_1 + m_2 + m_3), \end{aligned} \quad (31)$$

где n_1, n_2, n_3, n_4 – произвольные целые числа.

Ниже мы явно учтем связь (28) между спектральными параметрами по схеме

$$W(a|e, f, g|b, c, d|h; \theta_1, \theta_2) \equiv W(a|e, f, g|b, c, d|h; \theta_1, \pi - \theta_1 - \theta_2, \theta_2). \quad (32)$$

3.2. Модифицированные уравнения тетраэдра. Рассмотрим следующее уравнение:

$$\begin{aligned} & \sum_d W(a_1|c_1 c_2 c_3|b_1 b_2 b_3|d; \theta_1, \theta_2) \overline{W}(c_1|a_2 b_3 b_2|d c_6 c_4|b_4; \theta_1, \theta_2 + \theta_3) \times \\ & \times W(b_3|c_4 c_2 d|b_1 b_4 a_3|c_5; \theta_1 + \theta_2, \theta_3) \overline{W}(d|b_4 b_1 b_2|c_3 c_6 c_5|a_4; \theta_2, \theta_3) = \\ & = \sum_d \overline{W}(d|a_2 a_3 a_4|c_5 c_6 c_4|b_4; \theta_1, \theta_2) W(a_1|d c_2 c_3|b_1 a_4 a_3|c_5; \theta_1, \theta_2 + \theta_3) \times \\ & \times \overline{W}(c_1|a_2 a_1 b_2|c_3 c_6 d|a_4; \theta_1 + \theta_2, \theta_3) W(b_3|c_4 c_2 c_1|a_1 a_2 a_3|d; \theta_2, \theta_3). \end{aligned} \quad (33)$$

Оно чрезвычайно похоже на уравнение тетраэдра W -типа (19), но наряду с системой весов W в нем фигурирует еще одна система весов $\overline{W}$.

В следующем разделе мы покажем, что функция W , определенная формулами (29)–(32), удовлетворяет модифицированному уравнению тетраэдра (33), если выбрать вторую весовую функцию $\overline{W}$ согласно формуле

$$\overline{W}(a|e, f, g|b, c, d|h; \theta_1, \theta_2) = W(h|b, c, d|e, f, g|a; \theta_1, \theta_2). \quad (34)$$

Заметим, что второй вес $\overline{W}$ получается в нашем случае из веса W с помощью одного из упоминавшихся в предыдущей главе преобразований симметрии куба – $(\tau\rho)^3$ (см. [5, 18]). Для ББ-модели веса инвариантны по отношению ко всей группе симметрии куба, в том числе эти веса обладают $(\tau\rho)^3$ -инвариантностью (трехмерные соотношения звезда-звезда). В нашем случае только абсолютные величины весов обладают этой инвариантностью, и поэтому часть весов $\overline{W}$ отличается знаком от W .

Напомним, что знаковый фактор Φ для веса W определяется формулой (31), которая помимо спиновых переменных зависит от четырех произвольных целых параметров n_1, n_2, n_3, n_4 . Оказалось, что для любого набора этих параметров мы можем выбрать четыре других целых параметра n'_1, n'_2, n'_3, n'_4 так, что знаковый фактор $\overline{\Phi}$ для веса $\overline{W}$ также определяется формулой (31).

Далее, если набору n_i соответствует набор n'_i , то набору n'_i соответствует набор n_i , что естественно ввиду соотношения

$$((\tau\rho)^3)^2 = (\tau\rho)^6 = I,$$

где I – тождественное преобразование.

Это означает, что наряду с уравнением (33) выполнено также уравнение

$$\begin{aligned} & \sum_d \overline{W}(a_1|c_1c_2c_3|b_1b_2b_3|d; \theta_1, \theta_2) W(c_1|a_2b_3b_2|dc_6c_4|b_4; \theta_1, \theta_2 + \theta_3) \times \\ & \quad \times \overline{W}(b_3|c_4c_2d|b_1b_4a_3|c_5; \theta_1 + \theta_2, \theta_3) W(d|b_4b_1b_2|c_3c_6c_5|a_4; \theta_2, \theta_3) = \\ & = \sum_d W(d|a_2a_3a_4|c_5c_6c_4|b_4; \theta_1, \theta_2) \overline{W}(a_1|dc_2c_3|b_1a_4a_3|c_5; \theta_1, \theta_2 + \theta_3) \times \\ & \quad \times W(c_1|a_2a_1b_2|c_3c_6d|a_4; \theta_1 + \theta_2, \theta_3) \overline{W}(b_3|c_4c_2c_1|a_1a_2a_3|d; \theta_2, \theta_3), \end{aligned} \quad (35)$$

которое получается из (33) заменой W на $\overline{W}$ (и наоборот). Пару уравнений (33), (35) будем называть модифицированными уравнениями тетраэдра. Нам удалось показать [23], что уравнение тетраэдра для составного веса, изображенного на рис. 2, является следствием пары модифицированных уравнений тетраэдра для элементарных кубиков этого веса.

В свою очередь, уравнение тетраэдра для комплексного веса ведет к перестановочности двухслойных матриц перехода в описываемых нами сейчас моделях “шахматного” типа (см. рис. 18).

Рис. 18. Модель шахматного типа.

В итоге мы получаем, что горизонтальные матрицы перехода $T(\theta_1, \theta_2)$, построенные с помощью чередующихся весов $W(\theta_1, \theta_2)$ и $\overline{W}(\theta_1, \theta_2)$, удовлетворяют коммутационным соотношениям

$$[T(\theta_1, \theta_2), T(\theta_1, \theta_3)] = 0.$$

3.3. Доказательство интегрируемости модели. В этом разделе мы приводим схему доказательства того, что весовые функции W и $\overline{W}$, определяемые формулами (29)–(32) и (34), удовлетворяют уравнению (33) (а значит, и (35)). Введем для начала некоторые полезные обозначения. Вместо спиновых переменных $a_i, b_i, c_i \in \mathbb{Z}_2$ будем использовать новые спиновые переменные, принимающие значения ± 1 , и обозначать их греческими буквами:

$$\begin{aligned}\alpha_i &= 1 - 2a_i, & \beta_i &= 1 - 2b_i, & i &= 1, \dots, 4, \\ \gamma_i &= 1 - 2c_i, & i &= 1, \dots, 6.\end{aligned}\tag{36}$$

Определим еще девять комбинаций спинов (36):

$$\begin{aligned}\mu_1 &= \alpha_1 \alpha_2 \beta_1 \beta_4, & \mu_2 &= \alpha_1 \alpha_4 \beta_3 \beta_4, & \mu_3 &= \alpha_3 \alpha_4 \beta_2 \beta_3, \\ \rho_1 &= \alpha_1 \beta_1 \gamma_1, & \rho_2 &= \alpha_1 \beta_3 \gamma_3, & \rho_3 &= \alpha_3 \beta_3 \gamma_5, \\ \rho_4 &= \alpha_2 \beta_2 \gamma_4, & \nu_1 &= \alpha_1 \beta_2 \gamma_2, & \nu_3 &= \alpha_4 \beta_1 \gamma_6.\end{aligned}\tag{37}$$

Введем также следующие обозначения:

$$\begin{aligned}\tilde{s}_i &= k^{1/2} \operatorname{sn} \left(\frac{\theta_i K}{\pi} \right), & \tilde{c}_i &= k^{1/2} \frac{\operatorname{cn} \left(\frac{\theta_i K}{\pi} \right)}{\operatorname{dn} \left(\frac{\theta_i K}{\pi} \right)}, & i &= 1, 2, 3, \\ \tilde{s}_{12} &= k^{1/2} \operatorname{sn} \left(\frac{(\theta_1 + \theta_2) K}{\pi} \right), & \tilde{s}_{23} &= k^{1/2} \operatorname{sn} \left(\frac{(\theta_2 + \theta_3) K}{\pi} \right), \\ \tilde{c}_{12} &= k^{1/2} \frac{\operatorname{cn} \left(\frac{(\theta_1 + \theta_2) K}{\pi} \right)}{\operatorname{dn} \left(\frac{(\theta_1 + \theta_2) K}{\pi} \right)}, & \tilde{c}_{23} &= k^{1/2} \frac{\operatorname{cn} \left(\frac{(\theta_2 + \theta_3) K}{\pi} \right)}{\operatorname{dn} \left(\frac{(\theta_2 + \theta_3) K}{\pi} \right)}, \\ \tilde{s}_{123} &= k^{1/2} \operatorname{sn} \left(\frac{(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) K}{\pi} \right), & \tilde{c}_{123} &= k^{1/2} \frac{\operatorname{cn} \left(\frac{(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) K}{\pi} \right)}{\operatorname{dn} \left(\frac{(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) K}{\pi} \right)}.\end{aligned}\tag{38}$$

Подставляя формулы (29)–(32), (34) для W - и $\overline{W}$ -весов в модифицированное уравнение

тетраэдра (33) и принимая во внимание формулы (36)–(38), получаем

$$\begin{aligned}
& k \left[\nu_1 \rho_1 \rho_2 \frac{(\mu_3-1)}{2} \frac{(1+\mu_2 \nu_1 \nu_3 \rho_2 \rho_4)}{4} + \nu_1 \rho_3 \rho_4 \frac{(1-\mu_1)}{2} \frac{(1-\mu_2 \mu_3 \nu_1 \nu_3 \rho_2 \rho_4)}{4} \right] \times \\
& \times (-1)^{n_2} \frac{(1-\mu_1)}{2} \frac{(1-\mu_2)}{2} \frac{(1-\mu_3)}{2} \left(\tilde{c}_1^{\frac{(1-\mu_3)}{2}} \nu_1 \rho_2 \tilde{c}_3^{\frac{(\mu_1-1)}{2}} \nu_1 \rho_4 \right)^{\frac{(1+\mu_1 \mu_2 \nu_1 \nu_3 \rho_2 \rho_4)}{2}} \times \\
& \times \left(\tilde{c}_2^{\frac{(1-\mu_1 \mu_2 \mu_3)}{2}} \nu_1 \rho_1 \tilde{c}_{123}^{\frac{(1-\mu_2)}{2}} \nu_3 \rho_1 \tilde{c}_{12}^{\frac{(\mu_2 \mu_3-1)}{2}} \nu_1 \tilde{c}_{23}^{\frac{(\mu_1 \mu_2-1)}{2}} \nu_3 \right)^{\frac{(1+\mu_3 \nu_1 \nu_3 \rho_1 \rho_3)}{2}} \times \\
& \times \left(\tilde{s}_{12}^{\frac{(1+\mu_1 \mu_2)}{2}} \rho_1 \rho_2 \tilde{s}_{23}^{\frac{(1+\mu_2 \mu_3)}{2}} \rho_2 \rho_3 \tilde{s}_2^{\frac{(1+\mu_2)}{2}} \rho_2 \tilde{s}_{123}^{\frac{(1+\mu_1 \mu_2 \mu_3)}{2}} \rho_4 \right)^{\frac{(1-\mu_1 \mu_2 \mu_3 \rho_1 \rho_2 \rho_3 \rho_4)}{2}} \times \\
& \times \left[1 + \mu_2 \tilde{s}_1^{\frac{(1+\mu_1)}{2}} \rho_1 \tilde{s}_2^{\frac{(1+\mu_2)}{2}} \rho_2 \tilde{s}_3^{\frac{(1+\mu_3)}{2}} \rho_3 \tilde{s}_{123}^{\frac{(1+\mu_1 \mu_2 \mu_3)}{2}} \rho_4 \tilde{c}_{12}^{\frac{(1-\mu_2 \mu_3)}{2}} \nu_1 \tilde{c}_{23}^{\frac{(1-\mu_1 \mu_2)}{2}} \nu_3 \right] \times \\
& \times (-1)^{\frac{(1+n_2)(1-\mu_3 \nu_1 \nu_3 \rho_1 \rho_3)(1-\mu_1 \mu_2 \nu_1 \nu_3 \rho_2 \rho_4)}{4}} k^{\rho_1} \left[\nu_1 \rho_2 \frac{(1+\mu_1 \rho_1 \rho_2 \rho_3 \rho_4)}{4} + \mu_2 \nu_3 \rho_4 \frac{(1+\mu_3 \rho_1 \rho_2 \rho_3 \rho_4)}{4} \right] = \\
& = 1 + \mu_2 \tilde{s}_1^{\frac{(1+\mu_1)}{2}} \rho_1 \tilde{s}_2^{\frac{(1+\mu_2)}{2}} \mu_1 \mu_3 \rho_1 \rho_3 \rho_4 \tilde{s}_3^{\frac{(1+\mu_3)}{2}} \rho_3 \tilde{s}_{123}^{\frac{(1+\mu_1 \mu_2 \mu_3)}{2}} \rho_1 \rho_2 \rho_3 \times \\
& \times \tilde{c}_{12}^{\frac{(1-\mu_2 \mu_3)}{2}} \mu_2 \rho_1 \rho_3 \nu_3 \tilde{c}_{23}^{\frac{(\mu_1 \mu_2-1)}{2}} \mu_3 \nu_1 \rho_1 \rho_3 (-1)^{\frac{(1+n_2)(1-\mu_3 \nu_1 \nu_3 \rho_1 \rho_3)(1-\mu_1 \mu_2 \nu_1 \nu_3 \rho_2 \rho_4)}{4}} \times \\
& \times k^{\rho_4} \left[\nu_1 \rho_3 \frac{(1+\mu_3 \rho_1 \rho_2 \rho_3 \rho_4)}{2} + \mu_2 \mu_3 \nu_3 \rho_1 \frac{(1+\mu_1 \rho_1 \rho_2 \rho_3 \rho_4)}{2} \right]. \quad (39)
\end{aligned}$$

Оказывается, что полученные соотношения зависят только от девяти независимых спин-овых переменных (37). Поэтому мы имеем $2^9 = 512$ отдельных соотношений, соответствующих разным наборам спинов. Разобьем эти соотношения на восемь групп, соответствующих разному выбору значений переменных $\mu_i = \pm 1$, $i = 1, 2, 3$. Некоторые из уравнений имеют вид

$$A + B = A + B, \quad A - A = B - B,$$

где A и B – произведения эллиптических функций. Назовем эти уравнения тривиальными.

Сначала рассмотрим случай

$$\mu_1 = 1, \quad \mu_2 = 1, \quad \mu_3 = 1.$$

Легко видеть из уравнения (39), что при таком выборе μ_i мы имеем лишь восемь нетривиальных соотношений, которые можно записать в виде

$$\tilde{s}_{12}^{\rho_1 \rho_2} \tilde{s}_{23}^{\rho_2 \rho_3} (1 + \tilde{s}_1^{\rho_1} \tilde{s}_2^{\rho_2} \tilde{s}_3^{\rho_3} \tilde{s}_{123}^{\rho_1 \rho_2 \rho_3}) = \tilde{s}_1^{\rho_1} \tilde{s}_3^{\rho_3} + \tilde{s}_2^{\rho_2} \tilde{s}_{123}^{\rho_1 \rho_2 \rho_3}. \quad (40)$$

Подробный анализ показывает, что для всех других выборов спинов μ_i , $i = 1, 2, 3$, уравнения (39) сводятся к соотношению (40). Заметим, что в некоторых случаях нам приходится специализировать аргументы эллиптических функций в (40) (например, $\theta_2 + \theta_3 = \pi$) и использовать квазипериодические свойства функций $\text{sn}(x)$, $\text{cn}(x)$ и $\text{dn}(x)$.

Теперь остается проверить восемь соотношений (40) при произвольном выборе спинов ρ_1 , ρ_2 и ρ_3 , принимающих значения ± 1 . Заметим, что любой набор ρ_i в (40) сводится к случаю $\rho_1 = 1$, $\rho_2 = 1$ и $\rho_3 = 1$ с помощью формулы

$$\text{sn}(iK' + x) = \frac{1}{k \text{sn}(x)},$$

где K' – полный эллиптический интеграл первого рода для дополнительного модуля $k' = (1 - k^2)^{\frac{1}{2}}$.

Осталось доказать соотношение

$$\tilde{s}_{12}\tilde{s}_{23}(1 + \tilde{s}_1\tilde{s}_2\tilde{s}_3\tilde{s}_{123}) = \tilde{s}_1\tilde{s}_3 + \tilde{s}_2\tilde{s}_{123}.$$

Его легко проверить, например, с помощью теорем сложения.

В заключение этой главы отметим, что нам удалось [24], используя ВСС-анзац для W - и $\overline{W}$ -весовых функций, обобщить эту модель на произвольное число цветов N . При этом в решении возникает еще один параметр, который, как и модуль эллиптических функций k , одинаков для всех весов, входящих в уравнение тетраэдра. Таким образом, это более общее решение по-прежнему носит статический характер. При доказательстве мы, как и для случая ББ-модели (см. предыдущую главу), активно используем соотношения ортогональности (24) и соотношения звезда-квадрат (27).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Подведем итоги.

Во-первых, нами дан вывод уравнения тетраэдра как достаточного условия перестановочности матриц перехода трехмерных спиновых моделей на простой кубической решетке. Рассмотрены различные версии уравнения тетраэдра и возможные свойства симметрии его решений.

Во-вторых, дано обобщение уравнения Янга–Бакстера на пространства произвольной размерности – уравнения d -симплексов.

В-третьих, выяснены симметричные свойства весовых функций ББ-модели и даны два доказательства трехмерных соотношений звезда-звезда для этой модели. Построена серия решений уравнения тетраэдра для произвольного N – числа значений, принимаемых спиновой переменной.

В-четвертых, изложена идеология использования модифицированных уравнений тетраэдра и построены решения этих уравнений для случая $N = 2$.

И, наконец, описан математический аппарат, использующий расширение гипергеометрических базисных рядов на особый случай, когда база q является корнем целой степени из единицы.

Обнадёживают самые последние результаты, полученные в этом направлении. При попытках обобщить двухцветные решения Корепанова и Хиетаринты нами были найдены две N -цветные серии решений уравнения тетраэдра вершинного типа, что позволяет надеяться на построение двумерного аналога анзаца Бете, на построение L -операторов и т. д.

В заключение хотелось бы привести таблицу известных (автору) на сегодняшний день нетривиальных решений уравнения тетраэдра. Для этого напомним некоторые определения.

Будем называть полными решениями уравнения тетраэдра решения, параметризующиеся углами произвольного тетраэдра. Так, например, решение, предложенное Замолдчиковым в его второй работе [2], является полным, в то время как в первой своей работе [1] Замолдчиков предложил частичное решение, соответствующее так называемому статическому пределу. На языке факторизованной теории рассеяния прямых струн

этот предел соответствует случаю, когда все относительные скорости струн равны нулю. В терминах параметризации углами тетраэдра (см. ур. (5) и рис. 12) статический предел соответствует случаю, когда сумма трех двугранных углов при каждой вершине равна π . Другим специальным случаем является плоский предел (см. [22]), когда параметризующий решение тетраэдр вырождается в плоский четырехугольник.

Обратимся теперь к схеме, представляющей список решений уравнения тетраэдра:

Начнем рассмотрение со второго бокса верхнего ряда. Это решение является полным решением R -типа со спином, принимающим N значений. Вес модели имеет мультипликативную структуру. Пусть θ_1, θ_2 и θ_3 – плоские углы одной из вершин тетраэдра, а a_1, a_2 и a_3 – противоположащие плоские углы. Определим, как обычно, линейные и сферические эксцессы:

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= \frac{\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 - \pi}{2}, & \alpha_i &= \theta_i - \alpha_0, \\ \beta_0 &= \pi - \frac{a_1 + a_2 + a_3}{2}, & \beta_i &= \pi - a_i - \beta_0, \end{aligned} \quad (41)$$

где $i = 1, 2, 3$. Пусть p_i – четыре точки на кривой Ферма (см. определение w -функций в

первом разделе главы 2),

$$\begin{aligned}
x(p_1) &= \omega^{-1/2} \exp\left(i \frac{a_3}{N}\right) \sqrt[N]{\frac{\sin \beta_1}{\sin \beta_2}}, & y(p_1) &= \exp\left(i \frac{\beta_1}{N}\right) \sqrt[N]{\frac{\sin a_3}{\sin \beta_2}}; \\
x(p_2) &= \omega^{-1/2} \exp\left(i \frac{a_3}{N}\right) \sqrt[N]{\frac{\sin \beta_2}{\sin \beta_1}}, & y(p_2) &= \exp\left(i \frac{\beta_2}{N}\right) \sqrt[N]{\frac{\sin a_3}{\sin \beta_1}}; \\
x(p_3) &= \omega^{-1} \exp\left(i \frac{a_3}{N}\right) \sqrt[N]{\frac{\sin \beta_3}{\sin \beta_0}}, & y(p_3) &= \exp\left(-i \frac{\beta_3}{N}\right) \sqrt[N]{\frac{\sin a_3}{\sin \beta_0}}; \\
x(p_4) &= \omega^{-1} \exp\left(i \frac{a_3}{N}\right) \sqrt[N]{\frac{\sin \beta_0}{\sin \beta_3}}, & y(p_4) &= \exp\left(-i \frac{\beta_0}{N}\right) \sqrt[N]{\frac{\sin a_3}{\sin \beta_3}}; \\
z(p_i) &= 1, & i &= 1, 2, 3, 4.
\end{aligned} \tag{42}$$

Весовую функцию этой полной вершинной модели можно записать в виде

$$R_{i_1, i_2, i_3}^{j_1, j_2, j_3}(\theta_3, \theta_1, \theta_2) = \delta_{j_2+j_3, i_2+i_3} \omega^{j_3(j_1-i_1)} \frac{w(p_1|i_1-i_2)w(p_2|j_1-j_2)}{w(p_3|i_1-j_2)w(p_4|j_1-i_2)}. \tag{43}$$

Рассматривая новую кубическую решетку, сдвинутую на половину периода в одном из главных направлений исходной решетки, мы можем показать, что эта модель эквивалентна ББ-модели, см. [21] (3-й бокс 1-го ряда).

Двинемся вдоль стрелки – второй бокс во втором ряду. Это плоский предел с весовой функцией

$$R_{i_1, i_2, i_3}^{j_1, j_2, j_3} = \delta_{j_2+j_3, i_2+i_3} \omega^{(i_2-j_3)(i_1-j_1)} \frac{\Phi(j_1)}{\Phi(i_1)} \frac{w(Op_4|i_2-j_1)}{w(p_3|i_1-j_2)}, \tag{44}$$

где нами использован автоморфизм O :

$$x(Op) = z(p), \quad y(Op) = \omega^{1/2} y(p), \quad z(Op) = \omega x(p). \tag{45}$$

Отметим, что плоский предел ББ-модели (SW -тип) удовлетворяет условию дуальности Хиетаринты [20], поэтому его можно свести к модели R -типа, калибровочно-эквивалентной уравнению (44).

Слегка модифицируя уравнение (44) (меняя знак спинов в знаменателе), мы получаем новое решение уравнения тетраэдра R -типа с произвольным N [22]:

$$R_{i_1, i_2, i_3}^{j_1, j_2, j_3} = \delta_{j_2+j_3, i_2+i_3} \omega^{(i_2-j_3)(i_1-j_1)} \frac{\Phi(j_1)}{\Phi(i_1)} \frac{w(Op_4|i_2-j_1)}{w(p_3|j_2-i_1)}. \tag{46}$$

На схеме оно соответствует первому боксу второго ряда. Нам не удалось еще построить полное решение, которое бы сводилось к этому (первый бокс в первом ряду).

В случае $N = 2$ формулы сильно упрощаются. Модель Замолотчикова хорошо известна, и мы не приводим точные формулы для больцмановских весов.

Вводя для краткости обозначение

$$\sqrt{\operatorname{tg} \frac{\beta_i}{2}} = t_i, \quad i = 0, 1, 2, 3, \tag{47}$$

представим веса полной модели R -типа (43) при $N = 2$ следующей таблицей:

$R_{0,0,0}^{0,0,0} = R_{0,1,1}^{0,1,1} = R_{1,0,1}^{1,0,1} = R_{1,1,0}^{1,1,0} = 1$
$R_{1,1,1}^{1,1,1} = R_{1,0,0}^{1,0,0} = R_{0,1,0}^{0,1,0} = R_{0,0,1}^{0,0,1} = t_0 t_1 t_2 t_3$
$R_{0,0,1}^{0,1,0} = R_{0,1,0}^{0,0,1} = -R_{1,1,1}^{1,0,0} = -R_{1,0,0}^{1,1,1} = t_0 t_1$
$R_{1,1,0}^{1,0,1} = R_{1,0,1}^{1,1,0} = -R_{0,0,0}^{0,1,1} = -R_{0,1,1}^{0,0,0} = t_2 t_3$
$R_{0,1,0}^{1,1,1} = R_{0,0,1}^{1,0,0} = -R_{1,0,0}^{0,0,1} = -R_{1,1,1}^{0,1,0} = i t_0 t_2$
$R_{1,0,1}^{0,0,0} = R_{1,1,0}^{0,1,1} = -R_{0,1,1}^{1,1,0} = -R_{0,0,0}^{1,0,1} = -i t_1 t_3$
$R_{1,1,1}^{0,0,1} = R_{0,0,1}^{1,1,1} = R_{0,1,0}^{1,0,0} = R_{1,0,0}^{0,1,0} = t_0 t_3$
$R_{0,0,0}^{1,1,0} = R_{1,1,0}^{0,0,0} = R_{1,0,1}^{0,1,1} = R_{0,1,1}^{1,0,1} = t_1 t_2$

Используя известные тождества сферической тригонометрии:

$$\operatorname{tg} \frac{\beta_i}{2} \operatorname{tg} \frac{\beta_j}{2} = \operatorname{tg} \frac{\alpha_k}{2} \operatorname{tg} \frac{\alpha_l}{2}, \quad \{i, j, k, l\} = \{0, 1, 2, 3\}, \quad (48)$$

мы легко воспроизводим статический предел ($\alpha_0 = 0$), который является решением Корепанова [19].

В плоском пределе мы должны положить $\beta_2 = t_2 = 0$. При этом параметризующий полное решение тетраэдр превращается в плоский четырехугольник. Если этот четырехугольник вписывается в окружность, то получается решение Хиетаринты [20].

В заключение автору очень приятно поблагодарить В. Бажанова, Р. Кашаева, В. Мангазеева, С. Сергеева и Г. Бооса – моих соавторов по работам, составившим основу обзора.

Список литературы

- [1] А. Б. Замолодчиков. ЖЭТФ. 1980. Т. 79. С. 641–664.
- [2] А. Б. Zamolodchikov. Commun. Math. Phys. 1981. V. 79. № 4. P. 489–505.
- [3] В. В. Бажанов, Ю. Г. Строганов. ТМФ. 1982. Т. 52. № 1. С. 105–113.
- [4] V. V. Bazhanov, R. J. Baxter. J. Stat. Phys. 1992. V. 69. P. 453–485.
- [5] R. M. Kashaev, V. V. Mangazeev, Yu. G. Stroganov. Int. J. Mod. Phys. 1993. V. A8. № 3. P. 587–601.
- [6] R. M. Kashaev, V. V. Mangazeev, Yu. G. Stroganov. Int. J. Mod. Phys. 1993. V. A8. № 8. P. 1399–1409.
- [7] V. V. Bazhanov, Yu. G. Stroganov. Nucl. Phys. 1984. V. B230. № 4. P. 435–454.
- [8] R. J. Baxter. Commun. Math. Phys. 1983. V. 88. P. 185–205.
- [9] R. J. Baxter. Phys. Rev. Lett. 1984. V. 53. P. 1795.
- [10] R. J. Baxter. Physica. 1986. V. 18D. P. 321–347.
- [11] В. В. Бажанов, Ю. Г. Строганов. ТМФ. 1985. Т. 62. № 3. С. 377–387; Т. 63. № 2. С. 291–302; № 3. С. 417–427.
- [12] H. Au-Yang, B. M. McCoy, J. H. H. Perk, S. Tang, M. Yan. Phys. Lett. 1987. V. A123. P. 219.

- [13] *B. M. McCoy, J. H. H. Perk, S. Tang, C. H. Sah.* Phys. Lett. 1987. V. A125. P. 9.
- [14] *R. J. Baxter, J. H. H. Perk, H. Au-Yang.* Phys. Lett. 1988. V. A128. P. 138.
- [15] *V. V. Bazhanov, Yu. G. Stroganov.* J. Stat. Phys. 1990. V. 59. № 3/4. P. 799–817.
- [16] *V. V. Bazhanov, R. M. Kashaev, V. V. Mangazeev, Yu. G. Stroganov.* Commun. Math. Phys. 1991. V. 138. P. 393.
- [17] *E. Date, M. Jimbo, K. Miki, T. Miwa.* Commun. Math. Phys. 1991. V. 137. P. 133.
- [18] *V. V. Bazhanov, R. J. Baxter.* J. Stat. Phys. 1993. V. 71. P. 839.
- [19] *I. G. Korepanov.* Commun. Math. Phys. 1993. V. 154. P. 85–97.
- [20] *J. Hietarinta.* J. Phys. A: Math. Gen. 1994. V. 27. P. 5727–5748.
- [21] *V. V. Mangazeev, S. M. Sergeev, Yu. G. Stroganov.* The tetrahedron equation and its solutions. In: Proceedings of the conference SMQFT, May 16–21, 1994. Los Angeles.
- [22] *V. V. Mangazeev, S. M. Sergeev, Yu. G. Stroganov.* New solution of vertex type tetrahedron equation: Preprint IHEP 94-106, 1994; Mod. Phys. Lett. 1995. V. A10. № 4. P. 279–287.
- [23] *V. V. Mangazeev, Yu. G. Stroganov.* Mod. Phys. Lett. 1993. V. A8. № 36. P. 3475–3482.
- [24] *V. V. Mangazeev, S. M. Sergeev, Yu. G. Stroganov.* Int. J. Mod. Phys. 1994. V. A9. № 31. P. 5517–5530.
- [25] *H. E. Boos, V. V. Mangazeev, S. M. Sergeev.* Modified tetrahedron equations and related 3D integrable models: Preprint IHEP 94-76, 1994; Int. J. Mod. Phys. 1995. V. A10. № 28. P. 4041–4063.
- [26] *R. J. Baxter.* Phil. Trans. Roy. Soc. 1978. V. A289. № 1459. P. 315–346.
- [27] *H. Au-Yang, J. H. H. Perk.* Adv. Stud. P. Math. 1989. V. 19. P. 57–94.
- [28] *R. J. Baxter.* Exactly Solved Models in Statistical Mechanics. London: Academic Press, 1982.
- [29] *И. С. Градштейн, И. М. Рыжик.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Наука, 1971.

Поступила в редакцию 20.V.1996 г.

Yu. G. Stroganov

TETRAHEDRON EQUATION AND SPIN INTEGRABLE MODELS ON THE CUBIC LATTICE

The paper is a review of results on three-dimensional generalization of Yang–Baxter equation obtained starting from the pioneering works of Zamolodchikov (1979) to our works made in spring 1995. The integrability condition for spin statistical models on the simple cubic lattice (tetrahedron equation) is discussed. Different versions of this equation are considered with their symmetrical properties. The solution of the tetrahedron equation corresponding to Bazhanov–Baxter model is considered in detail. The review contains an update list of solutions for this equation. Generalization for unhomogeneous spin models with two types of Boltzmann's weights forming the checkerboard lattice is considered.