Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. В. Быков, Правила Фейнмана для σ -моделей пространств флагов, *ТМФ*, 2018, том 197, номер 3, 345–355

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf9617>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.219.12

26 апреля 2023 г., 06:00:27

© 2018 г.

Д. В. Быков*

ПРАВИЛА ФЕЙНМАНА ДЛЯ σ -МОДЕЛЕЙ ПРОСТРАНСТВ ФЛАГОВ

Выводятся правила Фейнмана для $1/N$ -разложения простейшей σ -модели из класса моделей, предложенных ранее автором. В рассматриваемом случае таргет-пространством является многообразие флагов $\frac{U(N)}{U(1) \times U(1) \times U(N-2)}$.

Ключевые слова: σ -модель, правила Фейнмана, $1/N$ -разложение.

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf9617>

1. РАССМАТРИВАЕМЫЕ МОДЕЛИ

В настоящей статье мы продолжаем исследование σ -моделей, введенных в работе [1]. Таргет-пространства данных моделей являются однородными *комплексными* многообразиями $\mathcal{M} = \frac{G}{H}$, на которых заданы “киллингова метрика” $\mathbb{G}$ и интегрируемая G -инвариантная комплексная структура $\mathbb{I}$. Действие схематически имеет следующий вид (здесь $X: \Sigma \rightarrow \mathcal{M}$ – отображение с мирового листа Σ в таргет-пространство $\mathcal{M}$):

$$S[\mathbb{G}, \mathbb{I}] := \int_{\Sigma} d^2 z \|\partial X\|_{\mathbb{G}}^2 + \int_{\Sigma} X^* \omega, \quad (1)$$

где ω – фундаментальная 2-форма, отвечающая паре $(\mathbb{G}, \mathbb{I})$ и определенная как $\omega = \mathbb{G} \circ \mathbb{I}$. Особенность таких моделей заключается в том, что их уравнения движения допускают представление нулевой кривизны. Более точно, однопараметрическое семейство $\mathcal{A}_u$, $u \in \mathbb{C}$, плоских связностей строится при помощи нётеровского тока K по формуле Полмайера [2]:

$$\mathcal{A}_u = \frac{1-u}{2} K_z dz + \frac{1-u^{-1}}{2} K_{\bar{z}} d\bar{z}. \quad (2)$$

Для дальнейших рассуждений введем комплексные координаты $z = (x^1 + ix^2)/\sqrt{2}$ и $\bar{z} = (x^1 - ix^2)/\sqrt{2}$, так что элемент длины $ds^2 = 2 dz d\bar{z}$, а метрика $g = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 14-50-00005).

*Математический институт им. В. А. Стеклова Российской академии наук, Москва, Россия. E-mail: bykov@mi-ras.ru

Связность, определенная формулой (2), является плоской, так как нётеровский ток K в рассматриваемых моделях сам плоский. Подобное построение хорошо известно для симметрических пространств [3], [4], которые в случае группы $G = SU(N)$ представляют собой грассманианы $G_k(N)$. Наши модели (1) допускают более богатый класс таргет-пространств, содержащий, в частности, так называемые пространства флагов.

Зависимость от метрики. Хотя в настоящей статье мы будем рассматривать случай плоской мировой поверхности Σ , временно восстановим нетривиальную метрику g , чтобы пояснить, как именно определяется один-форма нётеровского тока K_μ . На самом деле каноническая нётеровская процедура дает векторное поле K^μ , удовлетворяющее уравнению сохранения

$$\frac{1}{\sqrt{g}} \partial_\mu (\sqrt{g} K^\mu) = \nabla_\mu K^\mu = 0.$$

Один-форма получается из этого векторного поля путем понижения индекса стандартным образом: $K = g_{\mu\nu} K^\nu dx^\mu$. Двойственная по Ходжу один-форма имеет вид $*K = \frac{1}{\sqrt{g}} g_{\alpha\beta} \epsilon^{\beta\gamma} K_\gamma dx^\alpha$, при этом

$$d*K = \partial_\lambda \left(\frac{1}{\sqrt{g}} g_{\alpha\beta} \epsilon^{\beta\gamma} K_\gamma \right) dx^\lambda \wedge dx^\alpha = -\frac{1}{\sqrt{g}} \partial_\lambda (\sqrt{g} g^{\lambda\gamma} K_\gamma) \text{vol}_\Sigma. \quad (3)$$

Рассмотрим простой пример свободного комплексного безмассового бозона с действием

$$S = \int dx^1 dx^2 \sqrt{g} g^{\alpha\beta} \partial_\alpha \bar{\psi} \partial_\beta \psi.$$

Соответствующая один-форма имеет вид $K = \bar{\psi} d\psi - d\bar{\psi} \psi \in \mathfrak{u}_1 \simeq i\mathbb{R}$. В частности, она не зависит от метрики g . Введем теперь некоторое инвариантное B -поле или даже топологический член, тогда действие примет вид

$$\tilde{S} = S + \kappa \int i d\bar{\psi} \wedge d\psi.$$

Нётеровский ток также следует заменить на $\tilde{K} = K + i\kappa * d(\bar{\psi}\psi)$, при этом дополнительное слагаемое представляет собой топологический ток. Тем не менее полный ток $\tilde{K}$ теперь зависит от *конформного класса* $[g]$ метрики g , так как от него зависит звездочка Ходжа $*$. В результате приходим к выводу, что в общем случае обе один-формы K и $*K$ зависят от конформного класса $[g]$ метрики на мировой поверхности.

Остановимся на простейшем примере, когда таргет-пространство не является симметрическим (т. е. не является грассманианом), а именно

$$\mathcal{F} := \frac{U(N)}{U(n) \times U(m) \times U(N - m - n)}. \quad (4)$$

Данное многообразие можно рассматривать как пространство взаимно ортогональных (относительно некоторой метрики на $\mathbb{C}^N$) линейных подпространств E_n , E_m и E_{N-m-n} пространства $\mathbb{C}^N$, проходящих через начало координат и имеющих размерности n , m и $N - m - n$. Ясно, что сумма этих подпространств дает все пространство $\mathbb{C}^N$.

Выбор инвариантной комплексной структуры $\mathbb{I}$ на $\mathcal{F}$ эквивалентен выбору тотального упорядочения подпространств E_n, E_m, E_{N-m-n} . Для наших целей подойдет любое из двух упорядочений, в которых подпространство E_{N-m-n} является максимальным элементом, например $E_n < E_m < E_{N-m-n}$. Данное условие связано с тем, что в пределе большого N значения m и n предполагаются фиксированными. Многообразие $\mathcal{F}$ с такой комплексной структурой можно рассматривать как пространство вложенных друг в друга линейных комплексных пространств:

$$\mathcal{F} = \{0 \subset V_1 \subset V_2 \subset V_3 = \mathbb{C}^N\}, \quad (5)$$

где $V_1 \simeq \mathbb{C}^n$ и $V_2 \simeq \mathbb{C}^{m+n}$. Как показано в нашей работе [5], действие (1) можно переписать в “квазилинейной” форме¹⁾ при помощи “поля материи” $\varphi \in \text{Hom}(V_2, \mathbb{C}^N)$ и вспомогательного поля $i\mathcal{A} = i(\mathcal{A}_z dz + \mathcal{A}_{\bar{z}} d\bar{z}) \in \mathfrak{u}_{m+n} \otimes T^*\Sigma$:

$$\mathcal{L} = \text{Tr}((\mathcal{D}_z \varphi)^\dagger (\mathcal{D}_z \varphi)) + i \text{Tr}(\lambda (\varphi^\dagger \varphi - \mathbf{1}_{m+n})). \quad (6)$$

Поле φ удовлетворяет условию нормировки $\varphi^\dagger \varphi = \mathbf{1}_{m+n}$, в связи с чем мы ввели множитель Лагранжа λ . Для того чтобы получающиеся формулы имели наиболее простой вид, перейдем к еще более частному случаю $m = n = 1$, т. е. будем рассматривать пространство

$$\mathcal{M} = \frac{U(N)}{U(1) \times U(1) \times U(N-2)}. \quad (7)$$

В данном случае мы можем записать матрицу φ в виде набора из двух столбцов как $\varphi = (u, v)$. Условие нормировки означает, что $\|u\| = \|v\| = 1$ и $\bar{u} \circ v = 0$. В лагранжиане (6) ковариантные производные определяются стандартным образом:

$$\mathcal{D}_z \varphi = \partial_z \varphi - i\varphi \mathcal{A}_z, \quad (\mathcal{D}_z \varphi)^\dagger = \partial_{\bar{z}} \varphi^\dagger + i\mathcal{A}_{\bar{z}} \varphi^\dagger. \quad (8)$$

Заметим, что “связность” $\mathcal{A}$ предполагается эрмитовой в том смысле, что $\mathcal{A}^\dagger = \mathcal{A}$, следовательно, $(\mathcal{A}_z)^\dagger = \mathcal{A}_{\bar{z}}$. Важный факт состоит в том, что эта “связность” в рассматриваемой нами модели имеет нестандартный треугольный вид:

$$\mathcal{A}_z = \begin{pmatrix} a_z & 0 \\ c_z & b_z \end{pmatrix}, \quad \mathcal{A}_{\bar{z}} = (\mathcal{A}_z)^\dagger = \begin{pmatrix} a_{\bar{z}} & c_{\bar{z}} \\ 0 & b_{\bar{z}} \end{pmatrix}. \quad (9)$$

Именно эта форма $\mathcal{A}$ определяет основное отличие наших моделей от моделей с симметрическими таргет-пространствами. В частности, вследствие такой треугольной формы имеется калибровочная симметрия лишь с группой $U(1)^2$. Калибровочными полями для нее являются a и b , в то время как c – еще одно вспомогательное поле, преобразующееся по бифундаментальному представлению группы $U(1)^2$. Если не налагать на калибровочное поле условий (9), то мы имели бы калибровочную группу $U(2)$, а таргет-пространство модели было бы грассманианом $G_2(N)$. Для грассманианов “квазилинейные представления” эквивалентны математической теории кэлеровых факторов; аналог лагранжиана (6) был впервые найден для $\mathbb{CP}^{N-1}$ - σ -модели в работах [6], [7]. Квазилинейные представления известны также для σ -моделей пространств флагов с кэлеровыми метриками [8].

¹⁾Gauged linear σ -model.

Исключая вспомогательные поля a , b , c , запишем лагранжиан в виде (детали приведены в приложении А)

$$\mathcal{L} = \partial_{\bar{z}} \bar{u} \circ (\mathbf{1}_N - u \otimes \bar{u} - v \otimes \bar{v}) \circ \partial_z u + \partial_{\bar{z}} \bar{v} \circ (\mathbf{1}_N - v \otimes \bar{v}) \circ \partial_z v. \quad (10)$$

Данное выражение можно упростить, если ввести дополнительное матричнозначное поле $w: \mathbb{C}^{N-n-m} \rightarrow \mathbb{C}^N$, которое можно определить при помощи соотношения полноты в $\mathbb{C}^N$:

$$u \otimes u^\dagger + v \otimes v^\dagger + \text{Tr}_{\mathbb{C}^{N-n-m}}(w \otimes w^\dagger) = \mathbf{1}_N. \quad (11)$$

Это соотношение просто означает, что матрица w содержит $N - n - m$ попарно ортонормированных векторов, ортогональных векторам u и v . В результате получим

$$\mathcal{L} = \text{Tr}((w^\dagger \circ \partial_z u)(\partial_{\bar{z}} \bar{u} \circ w)) + \text{Tr}((w^\dagger \circ \partial_z v)(\partial_{\bar{z}} \bar{v} \circ w)) + (\partial_{\bar{z}} \bar{v} \circ u)(\bar{u} \circ \partial_z v). \quad (12)$$

Лагранжиан в точности такого вида рассматривался нами в работах [1], [9], [10] (в последних двух работах рассматривался случай $N = 3$). Таким образом, мы установили эквивалентность моделей, заданных действием (1), и “квазилинейных” моделей (6).

Прежде чем продолжить, сделаем еще одно наблюдение относительно лагранжиана (6). Вычислим разность

$$\begin{aligned} \mathcal{L} - \tilde{\mathcal{L}} &= \text{Tr}((\mathcal{D}_z \varphi)^\dagger (\mathcal{D}_z \varphi)) - \text{Tr}((\mathcal{D}_{\bar{z}} \varphi)^\dagger (\mathcal{D}_{\bar{z}} \varphi)) = \\ &= \text{Tr}(\partial_{\bar{z}} \varphi^\dagger \partial_z \varphi - \partial_z \varphi^\dagger \partial_{\bar{z}} \varphi) \sim \text{ограничение на } \Sigma \text{ формы } i \text{Tr}(d\varphi \wedge d\varphi^\dagger). \end{aligned} \quad (13)$$

Последняя строка представляет собой топологический член, так как это не что иное, как ограничение на мировую поверхность формы Фубини–Штуди на грассманиане $G_2(N)$ (если использовать нормировку $\varphi^\dagger \varphi = \mathbf{1}_2$, форму Фубини–Штуди можно записать в виде $\Omega_{\text{FS}} \sim i \text{Tr}(d\varphi \wedge d\varphi^\dagger)$).

Ранее мы утверждали, что нётеровский ток K , полученный из действия (1), является плоским, т.е. $dK - K \wedge K = 0$. Проверим это явно. Интересующий нас нётеровский ток имеет вид

$$K = 2(\mathcal{D}_z \varphi \varphi^\dagger dz - \varphi(\mathcal{D}_z \varphi)^\dagger d\bar{z}). \quad (14)$$

Заметим, что $K^\dagger = -K$, так как $K \in \mathfrak{u}_N$. Далее,

$$\begin{aligned} dK - K \wedge K &= -2(2\mathcal{D}_z \varphi \mathcal{D}_{\bar{z}} \varphi^\dagger + \varphi \mathcal{D}_z \mathcal{D}_{\bar{z}} \varphi^\dagger + \mathcal{D}_{\bar{z}} \mathcal{D}_z \varphi \varphi^\dagger - \\ &\quad - 2\mathcal{D}_z \varphi(\varphi^\dagger \varphi) \mathcal{D}_{\bar{z}} \varphi^\dagger + 2\varphi(\mathcal{D}_{\bar{z}} \varphi^\dagger \mathcal{D}_z \varphi) \varphi^\dagger) dz \wedge d\bar{z}. \end{aligned} \quad (15)$$

Упростим теперь это выражение, используя условие нормировки $\varphi^\dagger \varphi = \mathbf{1}_2$, а также уравнения движения, вытекающие из лагранжиана (6):

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{\bar{z}} \mathcal{D}_z \varphi &= \varphi(i\lambda), & \mathcal{D}_z \mathcal{D}_{\bar{z}} \varphi^\dagger &= (i\lambda) \varphi^\dagger, \\ \varphi^\dagger \mathcal{D}_z \varphi &= \begin{pmatrix} 0 & \bullet \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, & \mathcal{D}_{\bar{z}} \varphi^\dagger \varphi &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \bullet & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (16)$$

Обратим внимание на важное отличие от обычного случая симметрических таргет-пространств (грассманианов), где имеет место равенство

$$\varphi^\dagger \mathcal{D}_z \varphi = \mathcal{D}_{\bar{z}} \varphi^\dagger \varphi = 0. \quad (17)$$

Из первой пары уравнений в (16) следует, что $i\lambda$ – эрмитова матрица: $(i\lambda)^\dagger = i\lambda$. С другой стороны, умножая первое уравнение на $\varphi^\dagger$ слева, получим

$$i\lambda = \varphi^\dagger \mathcal{D}_{\bar{z}} \mathcal{D}_z \varphi = \mathcal{D}_{\bar{z}}(\varphi^\dagger \mathcal{D}_z \varphi) - \mathcal{D}_{\bar{z}} \varphi^\dagger \mathcal{D}_z \varphi. \quad (18)$$

Второе слагаемое в правой части в явном виде эрмитово, однако первое оказывается верхнетреугольным:

$$\mathcal{D}_{\bar{z}}(\varphi^\dagger \mathcal{D}_z \varphi) = \begin{pmatrix} 0 & \tilde{\bullet} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{\bullet} = (\partial_{\bar{z}} + i(a_{\bar{z}} - b_{\bar{z}}))\bar{u} \circ \partial_z v. \quad (19)$$

Из эрмитовости матрицы $i\lambda$ следует, что $\mathcal{D}_{\bar{z}}(\varphi^\dagger \mathcal{D}_z \varphi) = 0$, отсюда

$$i\lambda = -\mathcal{D}_{\bar{z}} \varphi^\dagger \mathcal{D}_z \varphi. \quad (20)$$

Подставляя полученные выражения в (15), видим, что $dK - K \wedge K = 0$, как и утверждалось выше.

2. ПРАВИЛА ФЕЙНМАНА ДЛЯ $1/N$ -РАЗЛОЖЕНИЯ

В предыдущем разделе мы записали лагранжиан (6) нашей модели. Перейдем теперь к построению $1/N$ -разложения, повторяя основные шаги, описанные в работе [7] для случая $\mathbb{CP}^{N-1}$ -модели (обсуждение $1/N$ -разложения для $\mathbb{CP}^{N-1}$ -модели можно найти также в книге [11]). Оказывается, что форма (6) лагранжиана неудобна для решения нашей задачи, так как в этом случае возникают смешанные пропагаторы $\langle \mathcal{A} \lambda \rangle$. Чтобы избежать этого явления, воспользуемся фактом, на который мы обращали внимание в (13), т. е. тем, что разность $\mathcal{L} - \tilde{\mathcal{L}}$ дает топологический член. Используя данное обстоятельство, можно заменить лагранжиан (6) на более симметричный

$$\mathcal{L} = \text{Tr}(\mathcal{D}_\mu \varphi^\dagger \mathcal{D}_\mu \varphi) + i \text{Tr} \left(\lambda \left(\varphi^\dagger \varphi - \frac{N}{g^2} \mathbb{1}_2 \right) \right). \quad (21)$$

Стоит иметь в виду соотношение, вытекающее из используемой нами нормировки метрики: $D_\mu \otimes D_\mu = D_{\bar{z}} \otimes D_z + D_z \otimes D_{\bar{z}}$. Кроме того, мы теперь также нормировали поля по-другому:

$$\varphi^\dagger \varphi = \frac{1}{\hat{g}^2} \mathbb{1}_2 = \frac{N}{g^2} \mathbb{1}_2. \quad (22)$$

Именно такую нормировку следует использовать при построении $1/N$ -разложения. В σ -моделях константа связи равна $\hat{g} = 1/R$, где R – радиус таргет-пространства. Потребовав, чтобы R имел порядок $\sqrt{N}$, мы добиваемся того, чтобы в пределе большого N константа связи $\hat{g} \sim 1/\sqrt{N}$ обращалась в нуль, что вполне аналогично пределу большого числа цветов в калибровочных теориях. Заметим, что новая константа связи g остается конечной в пределе большого N .

Прямолинейное квантование теории, определенной лагранжианом (21), приводит к однопетлевым расходимостям. Чтобы от них избавиться, следует ввести дополнительные фермионные духовые поля χ – регуляторы Паули–Вилларса: получаем лагранжиан

$$\begin{aligned} \widehat{\mathcal{L}} = & \text{Tr}((\mathcal{D}_\mu \varphi)^\dagger (\mathcal{D}_\mu \varphi)) + \text{Tr}((\mathcal{D}_\mu \chi)^\dagger (\mathcal{D}_\mu \chi)) + M^2 \text{Tr}(\chi^\dagger \chi) + \\ & + i \text{Tr} \left(\lambda \left(\varphi^\dagger \varphi + \chi^\dagger \chi - \frac{N}{g^2} \mathbb{1}_2 \right) \right). \end{aligned} \quad (23)$$

Рис. 1. Пропагаторы (удвоенной) $\mathbb{CP}^{N-1}$ -модели. Рис. 2. Вершины (удвоенной) $\mathbb{CP}^{N-1}$ -модели.

Интегрируя в континуальном интеграле по “полям материи” φ , χ , получим эффективное действие

$$\mathcal{S}^{\text{eff}} = N \text{Tr} \text{Ln}(-\mathcal{D}_\mu \mathcal{D}_\mu + i\lambda) - N \text{Tr} \text{Ln}(-\mathcal{D}_\mu \mathcal{D}_\mu + M^2 + i\lambda) - i \frac{N}{g^2} \int d^2 z \text{Tr} \lambda. \quad (24)$$

Запишем уравнение для стационарной точки по λ в предположении, что в этой седловой точке $\lambda = -im^2 \mathbb{1}_2$ и $\mathcal{A}_z = \mathcal{A}_{\bar{z}} = 0$:

$$\int \frac{d^2 p}{(2\pi)^2} \left(\frac{1}{p^2 + m^2} - \frac{1}{p^2 + M^2 + m^2} \right) = \frac{1}{g^2}. \quad (25)$$

Решение имеет вид

$$m^2 = \frac{M^2 e^{-4\pi/g^2}}{1 - e^{-4\pi/g^2}}. \quad (26)$$

В конце мы хотим избавиться от духовых полей χ , поэтому перейдем к пределу $M \rightarrow \infty$ так, чтобы масса m поля φ была конечной; для этого нам также нужно будет устремить константу связи к нулю: $g \rightarrow 0_+$.

Рис. 3. Пропагаторы и вершины взаимодействия новых полей τ , c_z . В первом ряду вершин p , $\bar{p}$, p' , $\bar{p}'$ обозначают $(z, \bar{z})$ -компоненты импульсов.

Лагранжиан (23) можно рассматривать как лагранжиан двух взаимодействующих $\mathbb{CP}^{N-1}$ -моделей:

$$\begin{aligned} \widehat{\mathcal{L}} = & |D_\mu^{(a)} u|^2 + |D_\mu^{(b)} v|^2 + i\lambda_1 \left(|u|^2 - \frac{N}{g^2} \right) + i\lambda_2 \left(|v|^2 - \frac{N}{g^2} \right) + \\ & + i(c_z \bar{v} \circ \partial_z u - c_z \partial_z \bar{u} \circ v + c_z \bar{u} \circ \partial_{\bar{z}} v - c_z \partial_{\bar{z}} \bar{v} \circ u) + c_z c_{\bar{z}} (|u|^2 + |v|^2) + \\ & + i\tau \bar{u} \circ v + i\bar{\tau} \bar{v} \circ u + \text{слагаемые с духовыми полями.} \end{aligned} \quad (27)$$

Две $\mathbb{CP}^{N-1}$ -модели, параметризованные векторами u и v , взаимодействуют через поле материи c , а также через условие ортогональности $\bar{u} \circ v = 0$, которое учитывается при помощи множителя Лагранжа τ . Первая строка в (27) кодирует пропагаторы и вершины взаимодействия двух $\mathbb{CP}^{N-1}$ -моделей – они показаны на рис. 1 и рис. 2 соответственно. Помимо этого, в нашей модели имеются дополнительные комплексные поля τ и c_z , преобразующиеся по бифундаментальному представлению группы $U(1) \times U(1)$. Их пропагаторы и вершины показаны на рис. 3.

Для использования метода наискорейшего спуска в пределе большого N следует положить

$$\lambda = \lambda_0 + \frac{1}{\sqrt{N}} \tilde{\lambda}, \quad \mathcal{A} = \frac{1}{\sqrt{N}} \tilde{\mathcal{A}}.$$

Разложение эффективного действия $\mathcal{S}^{\text{eff}}$ начинается с квадратичного порядка по полям $\tilde{\lambda}$, $\tilde{\mathcal{A}}$, и все последующие члены разложения подавлены степенями $\sqrt{N}$. Пропагаторы, показанные на рисунках, получаются из членов в эффективном действии,

квадратичных по полям, которые имеют в импульсном представлении такой вид:

$$\mathcal{S}^{\text{eff}} = \int d^2p \left(\Gamma_{\mu\nu}(p) \times [a_\mu(p)a_\nu(-p) + b_\mu(p)b_\nu(-p)] + \right. \\ \left. + \tilde{\Gamma}(p)c_z(p)c_z(-p) + \Gamma_\lambda(p)\text{Tr}(\lambda(p)\lambda(-p)) \right) + \dots \quad (28)$$

Функции $\Gamma_{\mu\nu}(p)$ и $\Gamma_\lambda(p)$ были вычислены в работе [12]. Функцию $\tilde{\Gamma}(p)$ можно найти аналогичным образом. В результате имеем

$$\Gamma_\lambda(p) = \frac{1}{2}A(p) = \frac{1}{2} \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{1}{(k^2 + m^2)((k+p)^2 + m^2)}, \\ \Gamma_{\mu\nu}(p) = \frac{1}{2} \left(\delta_{\mu\nu} - \frac{p_\mu p_\nu}{p^2} \right) \left((p^2 + 4m^2)A(p) - \frac{1}{\pi} \right), \\ \tilde{\Gamma}(p) = 2\Gamma_{z\bar{z}}(p) = \frac{1}{2} \left((p^2 + 4m^2)A(p) - \frac{1}{\pi} \right). \quad (29)$$

Функция $\Gamma_{\mu\nu}$ приводится к “скалярной форме”, т.е. выражается через $A(p)$, при помощи редукции Пассарино–Вельмана (см. приложение Б).

В эффективном действии нет смешанных членов вида $\int d^2p \bar{\Gamma}_\mu(p)a_\mu(p)\lambda(p)$, поскольку соответствующая однопетлевая диаграмма оказывается равной нулю:

$$\bar{\Gamma}_\mu(p) = \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{2k_\mu + p_\mu}{(k^2 + m^2)((k+p)^2 + m^2)} = \{k \mapsto -p - k\} = -\bar{\Gamma}_\mu(p) = 0. \quad (30)$$

В лоренцевой калибровке пропагаторы, фигурирующие на рисунках, имеют следующие выражения:

$$G(p) = \frac{1}{p^2 + m^2}, \quad Q(p) = A^{-1}(p), \\ D_{\mu\nu}(p) = \left(\delta_{\mu\nu} - \frac{p_\mu p_\nu}{p^2} \right) \left[(p^2 + 4m^2)A(p) - \frac{1}{\pi} \right]^{-1}, \\ D_c(p) = \left[\frac{1}{2} \left((p^2 + 4m^2)A(p) - \frac{1}{\pi} \right) \right]^{-1}. \quad (31)$$

3. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В представленной работе мы вывели правила Фейнмана для $1/N$ -разложения σ -моделей пространств флагов, предложенных ранее автором. Основной особенностью данных моделей является возможность записать уравнения движения в виде условия нулевой кривизны однопараметрического семейства связностей. Данное свойство является, как правило, характерной чертой интегрируемых моделей. Однако, как известно, даже в случае симметрических таргет-пространств (например, в случае $\mathbb{CP}^{N-1}$ -модели) сохраняющиеся заряды, которые получаются из представления нулевой кривизны [13], подвержены квантовым аномалиям [14]–[16]. Следует ожидать появления подобных аномалий и в рассматриваемых нами моделях. Интересный вопрос заключается в том, можно ли сократить эти аномалии путем добавления фермионных полей, как это происходит, например, в суперсимметричной $\mathbb{CP}^{N-1}$ -модели [17], [18]. Ответ на этот вопрос естественно искать в рамках $1/N$ -разложения, которое мы сформулировали в настоящей работе.

$$-\Gamma_{\mu\nu}(p) = \frac{1}{2} \text{ (diagram 1) } + \text{ (diagram 2) }$$

Рис. 4. Диаграммы Фейнмана, определяющие квадратичную по калибровочным полям часть эффективного действия в $\mathbb{CP}^{N-1}$ -модели. Коэффициент $1/2$ связан с тем, что соответствующая диаграмма возникает во втором порядке разложения экспоненты в континуальном интеграле. Кроме того, подразумевается, что к данным диаграммам добавляются аналогичные, в которых петли полей материи заменены на петли духовых полей.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Исключение вспомогательных полей

Покажем, каким образом можно явно исключить вспомогательные поля a , b , c из лагранжиана (6). Для этого запишем лагранжиан следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \partial_{\bar{z}} \bar{u} \circ \partial_z u + \partial_{\bar{z}} \bar{v} \circ \partial_z v + a_{\bar{z}} a_z + a_{\bar{z}} (i \bar{u} \circ \partial_z u) - a_z (i \partial_{\bar{z}} \bar{u} \circ u) + \\ & + b_{\bar{z}} b_z + b_{\bar{z}} (i \bar{v} \circ \partial_z v) - b_z (i \partial_{\bar{z}} \bar{v} \circ v) + c_{\bar{z}} c_z + c_{\bar{z}} (i \bar{v} \circ \partial_z u) - c_z (i \partial_{\bar{z}} \bar{u} \circ v). \end{aligned}$$

Мы воспользовались условием ортонормированности $\|u\| = \|v\| = 1$ и $\bar{u} \circ v = 0$. Дополняя до полных квадратов, получим соотношения следующего вида:

$$a_{\bar{z}} a_z + a_{\bar{z}} (i \bar{u} \circ \partial_z u) - a_z (i \partial_{\bar{z}} \bar{u} \circ u) = -(\bar{u} \circ \partial_z u)(\partial_{\bar{z}} \bar{u} \circ u) + \text{полный квадрат}.$$

Полагая поля a , b , c равными своим стационарным значениям, получим лагранжиан в форме (10).

ПРИЛОЖЕНИЕ Б

Пропагаторы калибровочных полей

Опишем для полноты, как вычисляется функция $\Gamma_{\mu\nu}(p)$, входящая в квадратичную часть эффективного действия (28). Она соответствует сумме двух диаграмм Фейнмана, изображенных на рис. 4, и определяется пределом интеграла

$$\begin{aligned} \Gamma_{\mu\nu}^{(M^2)} = & -\frac{1}{2} \int \frac{d^2 k}{(2\pi)^2} \left(\frac{(2k+p)_\mu (2k+p)_\nu}{(k^2+m^2)((k+p)^2+m^2)} - (m^2 \mapsto m^2+M^2) \right) + \\ & + \delta_{\mu\nu} \int \frac{d^2 k}{(2\pi)^2} \left(\frac{1}{k^2+m^2} - (m^2 \mapsto m^2+M^2) \right). \end{aligned}$$

при $M \rightarrow \infty$. Первый интеграл, который мы обозначим как $Q_{\mu\nu}(p)$, можно представить схематично в виде

$$Q_{\mu\nu}(p) = \alpha(p) \left(\delta_{\mu\nu} - \frac{p_\mu p_\nu}{p^2} \right) + \beta(p) \delta_{\mu\nu}.$$

Умножим его на p_ν , тогда получим

$$\begin{aligned} p_\mu \beta(p) &= \int \frac{d^2 k}{(2\pi)^2} \left(\frac{(2k+p)_\mu (p^2 + 2k \cdot p)}{(k^2 + m^2)((k+p)^2 + m^2)} - (m^2 \mapsto m^2 + M^2) \right) = \\ &= \{p^2 + 2k \cdot p = [(p+k)^2 + m^2] - [k^2 + m^2]\} = \\ &= 2p_\mu \int \frac{d^2 k}{(2\pi)^2} \left(\frac{1}{k^2 + m^2} - (m^2 \mapsto m^2 + M^2) \right). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\beta(p) = 2 \int \frac{d^2 k}{(2\pi)^2} \left(\frac{1}{k^2 + m^2} - \frac{1}{k^2 + m^2 + M^2} \right).$$

Отсюда уже ясно, что

$$\Gamma_{\mu\nu}^{(M^2)} = -\frac{\alpha(p)}{2} \left(\delta_{\mu\nu} - \frac{p_\mu p_\nu}{p^2} \right),$$

т. е. $\Gamma_{\mu\nu}$ имеет поперечную форму, как того требует калибровочная инвариантность. Вычислив след матрицы $Q_{\mu\nu}$, получим

$$\alpha(p) + 2\beta(p) = \int \frac{d^2 k}{(2\pi)^2} \left(\frac{(2k+p)^2}{(k^2 + m^2)((k+p)^2 + m^2)} - (m^2 \mapsto m^2 + M^2) \right).$$

Далее учтем, что $(2k+p)^2 = 2[k^2 + m^2] + 2[(p+k)^2 + m^2] - (4m^2 + p^2)$. В результате имеем

$$\alpha(p) = -(4m^2 + p^2) A(p) + (4m^2 + 4M^2 + p^2) (A(p)|_{m^2 \mapsto m^2 + M^2}).$$

Легко видеть, что второй член имеет конечный предел при $M \rightarrow \infty$. В результате перехода к пределу получаем окончательный ответ:

$$\Gamma_{\mu\nu}(p) = \frac{1}{2} \left(\delta_{\mu\nu} - \frac{p_\mu p_\nu}{p^2} \right) \left((4m^2 + p^2) A(p) - \frac{1}{\pi} \right).$$

Благодарности. Я благодарен А. А. Славнову и моим родителям за поддержку.

Список литературы

- [1] D. Bykov, “Complex structures and zero-curvature equations for σ -models”, *Phys. Lett. B*, **760** (2016), 341–344, arXiv:1605.01093.
- [2] K. Pohlmeyer, “Integrable Hamiltonian systems and interactions through quadratic constraints”, *Commun. Math. Phys.*, **46**:3 (1976), 207–221.
- [3] В. Е. Захаров, А. В. Михайлов, “Релятивистски инвариантные двумерные модели теории поля, интегрируемые методом обратной задачи”, *ЖЭТФ*, **74**:6 (1978), 1953–1973.
- [4] H. Eichenherr, M. Forger, “On the dual symmetry of the non-linear sigma models”, *Nucl. Phys. B*, **155**:2 (1979), 381–393.
- [5] Д. В. Быков, “Квазилинейная формулировка σ -модели пространства флагов”, *ТМФ*, **193**:3 (2017), 381–400.
- [6] E. Cremmer, J. Scherk, “The supersymmetric non-linear σ -model in four dimensions and its coupling to supergravity”, *Phys. Lett. B*, **74**:4–5 (1978), 341–434.
- [7] A. D’Adda, M. Lüscher, P. Di Vecchia, “A $1/n$ expandable series of non-linear σ -models with instantons”, *Nucl. Phys. B*, **146**:1 (1978), 63–76.

- [8] R. Donagi, E. Sharpe, “GLSM’s for partial flag manifolds”, *J. Geom. Phys.*, **58**:12 (2008), 1662–1692.
- [9] D. Bykov, “Integrable properties of σ -models with non-symmetric target spaces”, *Nucl. Phys. B*, **894** (2015), 254–267, arXiv: 1412.3746.
- [10] D. Bykov, “Classical solutions of a flag manifold σ -model”, *Nucl. Phys. B*, **902** (2016), 292–301, arXiv: 1506.08156.
- [11] А. М. Поляков, *Калибровочные поля и струны*, РХД, Ижевск, 1999.
- [12] A. D’Adda, P. Di Vecchia, M. Lüscher, “Confinement and chiral symmetry breaking in $\mathbb{CP}^{n-1}$ models with quarks”, *Nucl. Phys. B*, **152**:1 (1979), 125–144.
- [13] M. Lüscher, “Quantum nonlocal charges and absence of particle production in the two-dimensional nonlinear sigma model”, *Nucl. Phys. B*, **135**:1 (1978), 1–19.
- [14] Y. Y. Goldschmidt, E. Witten, “Conservation laws in some two-dimensional models”, *Phys. Lett. B*, **91**:3–4 (1980), 392–396.
- [15] E. Abdalla, M. C. B. Abdalla, M. Gomes, “Anomaly in the nonlocal quantum charge of the $\mathbb{CP}^{(n-1)}$ model”, *Phys. Rev. D*, **23**:8 (1981), 1800–1805.
- [16] E. Abdalla, M. Gomes, M. Forger, “On the origin of anomalies in the quantum non-local charge for the generalized non-linear sigma models”, *Nucl. Phys. B*, **210**:1 (1982), 181–192.
- [17] E. Abdalla, M. C. B. Abdalla, M. Gomes, “Anomaly cancellations in the supersymmetric $\mathbb{CP}^{n-1}$ model”, *Phys. Rev. D*, **25**:2 (1982), 452–460.
- [18] E. Abdalla, M. C. B. Abdalla, M. Gomes, “On the nonlocal charge of the $\mathbb{CP}^{n-1}$ model and its supersymmetric extension to all orders”, *Phys. Rev. D*, **27**:4 (1983), 825–836.

Поступила в редакцию 13.08.2018