Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Зотов, Модель Калоджеро–Мозера и R -матричные тождества, *ТМФ*, 2018, том 197, номер 3, 417–434

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf9625>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.237.206.68

26 апреля 2023 г., 09:05:13

© 2018 г.

А. В. Зотов*

МОДЕЛЬ КАЛОДЖЕРО–МОЗЕРА И R -МАТРИЧНЫЕ ТОЖДЕСТВА

Обсуждаются свойства R -матричнозначных пар Лакса для эллиптической модели Калоджеро–Мозера. В частности, показано, что семейство гамильтонианов, получающееся из такого представления Лакса, содержит только известные гамильтонианы и никаких других. Обзорно описана связь R -матричнозначных пар Лакса с системами Хитчина в расслоениях над эллиптическими кривыми, имеющих нетривиальные характеристические классы, а также с квантовыми интегрируемыми цепочками с дальнодействием. Доказано общее тождество старшего порядка для решений ассоциативного уравнения Янга–Бакстера.

Ключевые слова: эллиптические интегрируемые системы, спинные цепочки с дальнодействием, ассоциативное уравнение Янга–Бакстера.

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf9625>

1. ВВЕДЕНИЕ

Мы будем рассматривать специальный класс квантовых R -матриц, которые зависят только от разности спектральных параметров, $R_{ab}^h(q_a, q_b) = R_{ab}^h(q_a - q_b)$, и помимо уравнения Янга–Бакстера

$$R_{12}^h(q_1 - q_2)R_{13}^h(q_1 - q_3)R_{23}^h(q_2 - q_3) = R_{23}^h(q_2 - q_3)R_{13}^h(q_1 - q_3)R_{12}^h(q_1 - q_2) \quad (1.1)$$

удовлетворяют квадратичному соотношению (здесь и далее мы для краткости в некоторых формулах используем обозначение $q_{ab} = q_a - q_b$ и аналогичные ему обозначения разностей $x_{ij} = x_i - x_j$ и пр.)

$$R_{12}^h(q_{12})R_{23}^\eta(q_{23}) = R_{13}^\eta(q_{13})R_{12}^{h-\eta}(q_{12}) + R_{23}^{\eta-h}(q_{23})R_{13}^h(q_{13}), \quad (1.2)$$

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 14-50-00005).

*Математический институт им. В. А. Стеклова Российской академии наук, Москва, Россия. E-mail: zotov@mi-ras.ru

известному как ассоциативное уравнение Янга–Бакстера [1]. В частности, этот класс включает в себя [2] эллиптическую квантовую $GL(N, \mathbb{C})$ - R -матрицу Бакстера–Белавина в фундаментальном представлении [3]:

$$R_{12}^h(z) = \sum_{\substack{a \in \mathbb{Z}_N \times \mathbb{Z}_N, \\ a = (a_1, a_2)}} e^{2\pi i z a_2 / N} \phi\left(z, h + \frac{a_1 + a_2 \tau}{N}\right) T_a \otimes T_{-a} \in \text{Mat}(N, \mathbb{C})^{\otimes 2}, \quad (1.3)$$

где ϕ – функция Кронекера на эллиптической кривой с модулем τ [4]. Она определяется через нечетную тета-функцию Римана,

$$\phi(h, z) = \frac{\vartheta'(0)\vartheta(h+z)}{\vartheta(h)\vartheta(z)}, \quad \vartheta(z) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \exp\left(\pi i \tau \left(k + \frac{1}{2}\right)^2 + 2\pi i \left(z + \frac{1}{2}\right) \left(k + \frac{1}{2}\right)\right), \quad (1.4)$$

и имеет полюс первого порядка в нуле по обоим аргументам с вычетом, равным единице. Набор матриц $\{T_a, a = (a_1, a_2) \in \mathbb{Z}_N \times \mathbb{Z}_N\}$ вида

$$T_a = T_{a_1 a_2} = \exp\left(\frac{\pi i}{N} a_1 a_2\right) Q^{a_1} \Lambda^{a_2}, \quad a = (a_1, a_2) \in \mathbb{Z}_N \times \mathbb{Z}_N, \quad (1.5)$$

является базисом в пространстве $\text{Mat}(N, \mathbb{C})$ и определяется через две матрицы Q и Λ ,

$$Q_{kl} = \delta_{kl} \exp\left(\frac{2\pi i}{N} k\right), \quad \Lambda_{kl} = \delta_{k-l+1=0 \bmod N}, \quad Q^N = \Lambda^N = 1_{N \times N}, \quad (1.6)$$

задающие конечномерное представление группы Гейзенберга,

$$\exp\left(\frac{2\pi i}{N} a_1 a_2\right) Q^{a_1} \Lambda^{a_2} = \Lambda^{a_2} Q^{a_1}.$$

Уравнение Янга–Бакстера (1.1) в скалярном случае (при $N = 1$) превращается в тривиальное тождество. В то же время (1.2) уже в скалярном случае представляет собой функциональное уравнение

$$\phi(h, q_{12})\phi(\eta, q_{23}) = \phi(h - \eta, q_{12})\phi(\eta, q_{13}) + \phi(\eta - h, q_{23})\phi(h, q_{13}), \quad (1.7)$$

известное как тождество Фэя для рода один [5], которое имеет своим решением функцию Кронекера (1.4). В этом смысле R -матрицу (1.3) можно интерпретировать как матричное обобщение функции Кронекера. Многие тождества для эллиптических функций, широко применяемые в теории интегрируемых систем, обобщаются на тождества для R -матриц подобно тому, как уравнение (1.7) обобщается на (1.2), хотя и не всегда столь прямолинейно [2], [6]–[9]. При этом $R_{12}^h(z)$ является матричнозначной функцией, имеющей простые полюсы по обоим аргументам с вычетами

$$\text{Res}_{h=0} R_{12}^h(z) = 1_N \otimes 1_N, \quad \text{Res}_{z=0} R_{12}^h(z) = N P_{12}, \quad (1.8)$$

где 1_N – единичная $(N \times N)$ -матрица, а P_{12} – оператор перестановки,

$$P_{12} = \sum_{i,j=1}^N E_{ij} \otimes E_{ji} = \frac{1}{N} \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}_N \times \mathbb{Z}_N} T_\alpha \otimes T_{-\alpha} \in \text{Mat}(N, \mathbb{C})^{\otimes 2}, \quad (E_{ij})_{ab} = \delta_{ia} \delta_{jb}.$$

В дальнейшем мы будем пользоваться общепринятыми тензорными обозначениями квантового метода обратной задачи рассеяния [10]. Как и в (1.1), (1.2), запись R_{ab} (или P_{ab}) означает, что R -матрица (или оператор перестановки) нетривиальны только в a -й и b -й тензорных компонентах, а в оставшихся дополнены матричными единицами.

Уравнения (1.1) и (1.2) имеют отличные друг от друга, но пересекающиеся классы решений. Решение уравнения (1.2) является одновременно решением уравнения (1.1), если выполнены дополнительно два свойства: антисимметричность

$$R_{ab}^{\hbar}(z_a - z_b) = -R_{ba}^{-\hbar}(z_b - z_a) \quad (1.9)$$

и унитарность (см., например, работу [7])

$$\begin{aligned} R_{12}^{\hbar}(q_1 - q_2)R_{21}^{\hbar}(q_2 - q_1) &= N^2\phi(N\hbar, q_1 - q_2)\phi(N\hbar, q_1 - q_2)1_N \otimes 1_N = \\ &= N^2(\wp(N\hbar) - \wp(q_1 - q_2))1_N \otimes 1_N, \end{aligned} \quad (1.10)$$

где $\wp(x)$ – эллиптическая $\wp$ -функция Вейерштрасса. R -матрица (1.3) удовлетворяет обоим свойствам. Обратим также внимание на нормировочный множитель в условии унитарности (1.10). Его появление является следствием ассоциативного уравнения Янга–Бакстера (1.2) (в скалярном случае R -матрица должна переходить в функцию Кронекера).

Наличие свойств (1.2) и (1.10) позволяет строить R -матричнозначные пары Лакса [7] для классической (эллиптической) gl_n -модели Калоджеро–Мозера [11], представляющей собой интегрируемую систему n частиц с гамильтонианом

$$H_2 = \sum_{i=1}^n \frac{p_i^2}{2} - (N\nu)^2 \sum_{i < j}^n \wp(q_i - q_j), \quad (1.11)$$

константой связи $N\nu$ и каноническими скобками Пуассона $\{p_i, q_j\} = \delta_{ij}$. Матрица Лакса имеет блочный вид¹⁾

$$\mathcal{L}(z) = \begin{pmatrix} p_1 1_N^{\otimes n} & \nu R_{12}^z(q_1 - q_2) & \dots & \nu R_{1n}^z(q_1 - q_n) \\ \nu R_{21}^z(q_2 - q_1) & p_2 1_N^{\otimes n} & \dots & \nu R_{2n}^z(q_2 - q_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \nu R_{n1}^z(q_n - q_1) & \nu R_{n2}^z(q_n - q_2) & \dots & p_n 1_N^{\otimes n} \end{pmatrix} \quad (1.12)$$

и в случае $N = 1$ совпадает с хорошо известным результатом Кричевера – $(n \times n)$ -представлением Лакса со спектральным параметром z [15]. В общем случае все R -матрицы из (1.12) являются элементами пространства $\text{Mat}(N, \mathbb{C})^{\otimes n}$, т. е. матрицами размера $N^n \times N^n$, а $\mathcal{L} \in \text{Mat}(nN^n, \mathbb{C})$. Для некоторых других систем корней R -матричные пары Лакса описаны в работах [8], [16].

Пространство $\text{Mat}(n, \mathbb{C})$ мы будем называть вспомогательным и обозначать индексом “aux” (от слова auxiliary), а пространство $\text{Mat}(N^n, \mathbb{C})$, в котором лежит любой из блоков, – квантовым в том смысле, что оно совпадает с $\text{End}(\mathcal{H})$, где $\mathcal{H} \cong (\mathbb{C}^N)^{\otimes n}$ – гильбертово пространство квантовой спиновой $GL(N, \mathbb{C})$ -цепочки, содержащей n узлов (в фундаментальном представлении группы $GL(N, \mathbb{C})$). Приложения R -матричных пар Лакса, включая их связь с квантовыми цепочками с дальновдействием, будут обсуждаться в следующем разделе.

¹⁾ Аналогичная тензорная структура использовалась при описании квантовой модели Калоджеро–Мозера со спином [12], [13] и спиновых цепочек Иноземцева [14].

Цель работы. В разделе 2 дан краткий обзор свойств R -матричнозначной пары Лакса и ее связи с квантовыми спиновыми цепочками Иноземцева, а также с моделями взаимодействующих волчков, которые описываются как системы Хитчина на модулях векторных расслоений (над эллиптической кривой) ранга nN и степени n . В разделе 3 обсуждается проблема вычисления гамильтонианов по матрице Лакса (1.12). Наше основное утверждение состоит в том, что никаких иных гамильтонианов, кроме уже известных из случая $N = 1$, следы степеней оператора $\mathcal{L}$ не порождают. Для этого достаточно показать, что для всех $k \in \mathbb{Z}_+$

$$\mathrm{tr}_{\mathrm{aux}} \mathcal{L}^k(z, \nu) = \mathrm{tr}(L^k(Nz, N\nu) \cdot 1_N^{\otimes n}), \quad L = \mathcal{L}|_{N=1}, \quad (1.13)$$

т.е. сумма диагональных блоков матрицы $\mathcal{L}^k$ пропорциональна единичному оператору в квантовом пространстве, а коэффициент пропорциональности есть след обычной (скалярной) матрицы Лакса (с точностью до замены $z \mapsto Nz$, $\nu \mapsto N\nu$). Нетрудно убедиться, что для $k = 2$ это утверждение следует из условия унитарности (1.10) и воспроизводит гамильтониан (1.11). Для старших степеней мы используем семейство тождеств (доказанных нами ранее в работе [17]), в котором условие унитарности содержится как простейший случай. В действительности будет доказано даже более общее (чем (1.13)) утверждение. А именно, не только сумма, но и каждый диагональный блок $(\mathcal{L}^k(z, \nu))_{aa} \in \mathrm{End} \mathcal{H}$, $a = 1, \dots, n$, также пропорционален $1_N^{\otimes n}$ с коэффициентом, равным $(L^k(Nz, N\nu))_{aa}$ (снова с точностью до замены $z \mapsto Nz$, $\nu \mapsto N\nu$).

В разделе 4 представлена и доказана R -матричная версия общего тождества старшего порядка для функции Кронекера. В k -м порядке оно содержит $2k$ комплексных переменных $x_1, \dots, x_k$ и $y_1, \dots, y_k$ в общем положении:

$$\prod_{i=1}^k \phi(x_i, y_i) = \sum_{i=1}^k \phi\left(x_i, \sum_{l=1}^k y_l\right) \prod_{j \neq i}^k \phi(x_j - x_i, y_j). \quad (1.14)$$

Мы показываем, что соотношение (1.14) есть скалярный частный случай следующего тождества для R -матрицы, являющейся решением уравнения (1.2) (в частности, для матрицы (1.3)):

$$\overrightarrow{\prod}_{i=1}^k R_{i, i+1}^{x_i}(y_i) = \sum_{i=1}^k \prod_{j=k-i+2}^k R_{j, j+1}^{x_j - x_{k-i+1}}(y_j) \cdot R_{1, k+1}^{x_{k-i+1}}\left(\sum_{l=1}^k y_l\right) \cdot \overrightarrow{\prod}_{j=1}^{k-i} R_{j, j+1}^{x_j - x_{k-i+1}}(y_j), \quad (1.15)$$

где стрелка над произведением означает упорядочение сомножителей по индексу произведения от младшего значения к старшему слева направо. Более явный вид тождества (1.15) приведен в (4.1).

2. R -МАТРИЧНАЯ ПАРА ЛАКСА

Пара Лакса. Рассмотрим R -матричную пару Лакса более подробно. Матрица Лакса (1.12) кратко записывается в виде

$$\mathcal{L} = \sum_{a,b=1}^n E_{ab} \otimes \mathcal{L}_{ab}, \quad \mathcal{L}_{ab} = \delta_{ab} p_a 1_a \otimes 1_b + \nu(1 - \delta_{ab}) R_{ab}^z, \quad R_{ab}^z = R_{ab}^z(q_a - q_b). \quad (2.1)$$

Уравнения Лакса $\dot{\mathcal{L}} = [\mathcal{L}, \mathcal{M}]$ эквивалентны уравнениям движения с гамильтонианом H_2 (1.11), т. е. $\dot{\mathcal{L}} = \{H_2, \mathcal{L}\}$. При этом матрица $\mathcal{M}$ задается формулами

$$\mathcal{M}_{ab} = \nu \delta_{ab} d_a + \nu(1 - \delta_{ab}) F_{ab}^z + \nu \delta_{ab} \mathcal{F}^0, \quad F_{ab}^z = \partial_{q_a} R_{ab}^z(q_a - q_b), \quad (2.2)$$

где

$$d_a = - \sum_{c \neq a}^n F_{ac}^0, \quad F_{ac}^0 = F_{ac}^z|_{z=0}, \quad \mathcal{F}^0 = \sum_{b>c}^n F_{bc}^0. \quad (2.3)$$

Напомним, что в обычном (скалярном, $N = 1$) случае проверка эквивалентности уравнений Лакса уравнениям движения основана на следующих тождествах для диагональной и внедиагональной частей:

$$\phi(z, q_{ab}) f(z, q_{ba}) - f(z, q_{ab}) \phi(z, q_{ba}) = \wp'(q_{ab}), \quad (2.4)$$

$$\phi(z, q_{ab}) f(z, q_{bc}) - f(z, q_{ab}) \phi(z, q_{bc}) = \phi(z, q_{ac}) (f(0, q_{bc}) - f(0, q_{ab})), \quad (2.5)$$

где

$$f(z, q) = \partial_q \phi(z, q), \quad f(0, z) = \partial_z^2 \ln \vartheta(z) = -\wp(z) + \text{const}, \quad \text{const} = \frac{1}{3} \frac{\vartheta'''(0)}{\vartheta'(0)}. \quad (2.6)$$

Тождество (2.4) вытекает (если взять производную) из скалярного аналога условия унитарности (1.10)

$$\phi(z, q) \phi(z, -q) = \wp(z) - \wp(q) = f(0, q) - f(0, z), \quad (2.7)$$

а (2.5) получается как вырожденный случай тождества Фэя (1.7).

Аналогичным образом устроена проверка уравнения Лакса в R -матричном случае. Для диагональных блоков нужно воспользоваться производной матрицы (1.10),

$$R_{ab}^z F_{ba}^z - F_{ab}^z R_{ba}^z = N^2 \wp'(q_{ab}), \quad (2.8)$$

и вырожденным уравнением (1.2)

$$R_{ab}^z F_{bc}^z - F_{ab}^z R_{bc}^z = F_{bc}^0 R_{ac}^z - R_{ac}^z F_{ab}^0, \quad (2.9)$$

где

$$F_{ij}^0(q) = F_{ij}^z(q)|_{z=0} = F_{ji}^0(-q). \quad (2.10)$$

Однако в R -матричном случае есть одно важное отличие – наличие в $\mathcal{M}$ слагаемого, содержащего матрицу $\mathcal{F}^0$, которая входит в $\mathcal{M}$ с коэффициентом, равным единичной матрице 1_n во вспомогательном пространстве $\text{Mat}(n, \mathbb{C})$, и является нетривиальной в квантовом пространстве. В случае $N = 1$ данное слагаемое бессмысленно: оно сокращается в правой части уравнений Лакса. В R -матричном случае оно играет важную роль: его добавление меняет порядок F^0 и R^z в правой части (2.9), что в конечном итоге и позволяет установить эквивалентность уравнений Лакса уравнениям движения:

$$[R_{ac}^z, \mathcal{F}^0] + \sum_{b \neq a, c} R_{ab}^z F_{bc}^z - F_{ab}^z R_{bc}^z = \sum_{b \neq c} R_{ac}^z F_{bc}^0 - \sum_{b \neq a} F_{ab}^0 R_{ac}^z. \quad (2.11)$$

Полуквантовая система. Итак, появление $\mathcal{F}^0$ на уровне пары Лакса для классической системы Калоджеро–Мозера вытекает из необходимости правильного упорядочения множителей в R -матричных тождествах. С другой стороны, $\mathcal{F}^0$ можно интерпретировать иначе. Обозначим матрицу M без слагаемого с $\mathcal{F}^0$ символом $\overline{M}$: $M = \overline{M} - \nu 1_n \otimes \mathcal{F}^0$. Уравнение Лакса принимает вид

$$\{H, \mathcal{L}\} + [\nu \mathcal{F}^0, \mathcal{L}(z)] = [\mathcal{L}(z), \overline{M}(z)]. \quad (2.12)$$

Тогда $\nu \mathcal{F}^0$ можно понимать как квантовый гамильтониан, поскольку это выражение скалярно во вспомогательном пространстве и нетривиально в квантовом. В таком случае уравнение (2.12) является “полуквантовым” уравнением Лакса. Это означает, что оно описывает систему, в которой часть переменных $(p_1, \dots, p_n; q_1, \dots, q_n)$ классические, а спинные переменные проквантованы в фундаментальном представлении группы $GL(N, \mathbb{C})$. Канонические переменные для пары Лакса также могут быть проквантованы [16] простейшим образом: $p_i \rightarrow \hbar \partial_{q_i} = \hat{p}_i$. В результате получим уравнение

$$[\hat{H}_2, \hat{\mathcal{L}}(z)] = \hbar [\hat{\mathcal{L}}(z), \overline{M}(z)], \quad (2.13)$$

где

$$\hat{H}_2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \hat{p}_i^2 - \nu(\nu + \hbar) \sum_{i>j}^N \wp(q_i - q_j) \quad (2.14)$$

является гамильтонианом квантовой (бесспиновой) модели Калоджеро–Мозера [18], а $\hat{\mathcal{L}} = \mathcal{L}(p_j \rightarrow \hat{p}_j)$. Перенос $\mathcal{F}^0$ в левую часть (2.13),

$$[\hat{H}_2^{\text{tops}}, \hat{\mathcal{L}}(z)] = \hbar [\hat{\mathcal{L}}(z), \overline{M}(z)], \quad (2.15)$$

$$\hat{H}_2^{\text{tops}} = \hat{H}_2 + \hbar \nu \mathcal{F}^0, \quad (2.16)$$

приобретает тогда дополнительный смысл. В частности, (2.15), (2.16) воспроизводят квантовые уравнения Лакса [13], [14], [19] для спиновой системы Калоджеро–Мозера [20]. Для этого нужно рассмотреть решение ассоциативного уравнения Янга–Бакстера (1.2), пропорциональное оператору перестановки²⁾, например $R_{ab}^z(q_{ab}) = \phi(z, q_{ab}) P_{ab}$. Тогда с точностью до оператора Казимира

$$\mathcal{F}^0 = - \sum_{i<j}^n P_{ij} \wp(q_i - q_j), \quad (2.17)$$

и (2.16) задает гамильтониан спиновой модели. Более того, в рациональном и тригонометрическом случаях уравнение (2.15) можно использовать для вычисления старших гамильтонианов. Это связано с тем, что в этих случаях можно добиться выполнения “условия нулевой суммы” для $\overline{M}$,

$$\sum_{j \neq i} \overline{M}_{ij} = \sum_{j \neq i} \overline{M}_{ji} = 0 \quad \text{для всех } i, \quad (2.18)$$

²⁾Такое решение существует в силу того, что матричные коэффициенты всех трех слагаемых из (1.2) равны друг другу, $P_{12}P_{23} = P_{23}P_{13} = P_{13}P_{12}$, и сокращаются, в результате остается скалярное тождество (1.7).

и гамильтонианы могут быть вычислены в виде $\hat{I}_k = \text{ts } \hat{L}^k = \sum_{i,j} (\hat{L}^k)_{ij}$. В эллиптическом случае этот способ не работает, так как условие (2.18) не выполняется.

В случае эллиптической R -матрицы (1.3) член $\mathcal{F}^0$ более сложный:

$$\mathcal{F}^0 = \frac{1}{2} \sum_{i \neq j}^n F_{ij}^0(q_{ij}), \quad (2.19)$$

где

$$F_{ij}^0(q_{ij}) = f(0, q_{ij}) \overset{i}{T}_0 \overset{j}{T}_0 + \sum_{\substack{\gamma \in \mathbb{Z}_N^{\otimes 2}, \\ \gamma \neq 0}} \varphi_\gamma(q_{ij}, \omega_\gamma) (E_1(q_{ij} + \omega_\gamma) - E_1(q_{ij}) + 2\pi i \partial_\tau \omega_\gamma) \overset{i}{T}_\gamma \overset{j}{T}_{-\gamma};$$

здесь $\overset{i}{T}_\gamma$ – матрица T_γ в i -й тензорной компоненте, а $E_1(z) = \vartheta'(z)/\vartheta(z)$. Иными словами, (2.19) является анизотропным обобщением выражения (2.17). Отметим, что анизотропные обобщения квантовой спиновой модели Калоджеро–Мозера были известны и ранее. В работах [12] рассматривалось квантовое представление Лакса вида (1.12), но с классической r -матрицей

$$r_{12}^{\text{xxz}}(q) = \pi \operatorname{ctg} \pi q \cdot (1 \otimes 1 + \sigma_3 \otimes \sigma_3) + \frac{\pi}{\sin \pi q} (\sigma_1 \otimes \sigma_1 + \sigma_2 \otimes \sigma_2), \quad (2.20)$$

при этом

$$F_{12}^0(q) = -\frac{\pi^2}{\sin^2 \pi q} (1 \otimes 1 + \sigma_3 \otimes \sigma_3 + \cos \pi q \cdot (\sigma_1 \otimes \sigma_1 + \sigma_2 \otimes \sigma_2)). \quad (2.21)$$

В отличие от эллиптического случая с R -матрицей (1.3), в матрице (2.20) нет спектрального параметра z , роль которого в квантовой R -матрице играет постоянная Планка. Это аналогично тому, что для классической тригонометрической модели Калоджеро–Сазерленда представление Лакса может не содержать спектральный параметр, в то время как в эллиптическом случае он неустраним.

Следует особо подчеркнуть, что квантовое уравнение Лакса (2.15) уже напрямую никак не связано с исходной классической системой (1.11), но является квантованием полуквантовых уравнений (2.12). В следующем разделе будет показано, что гамильтонианы, вычисляемые по матрице Лакса (2.1), воспроизводят только классическую бесспиновую модель Калоджеро–Мозера, в то время как уравнение (2.15) уже в простейшем случае (2.17) описывает спиновую систему. Чтобы лучше понять смысл уравнения (2.12), нужно вместо его (до)квантования рассмотреть, наоборот, классический аналог, т. е. определить систему с гамильтонианом $H_2 + \mathcal{F}_{\text{class}}^0$, квантованием которой является (2.15). Такая классическая интегрируемая модель известна как (обобщенная) система взаимодействующих волчков [21].

Взаимодействующие волчки. Как ясно из сказанного выше, нас интересуют анизотропные обобщения спиновой модели Калоджеро–Мозера. Напомним, что в обычном случае спиновая модель задается парой Лакса размера $n \times n$ со спектральным параметром [22]

$$L_{ij}^{\text{spin}}(z) = \delta_{ij}(p_i + S_{ii}E_1(z)) + (1 - \delta_{ij})S_{ij}\phi(z, q_{ij}), \quad (2.22)$$

$$M_{ij}^{\text{spin}}(z) = (1 - \delta_{ij})S_{ij}f(z, q_i - q_j) \quad (2.23)$$

и гамильтонианом

$$H^{\text{spin}} = \sum_{i=1}^n \frac{p_i^2}{2} - \sum_{i>j}^n S_{ij} S_{ji} \wp(q_i - q_j), \quad (2.24)$$

где S_{ij} – классические динамические переменные со скобкой Пуассона–Ли

$$\{S_{ij}, S_{kl}\} = -S_{il}\delta_{kj} + S_{kj}\delta_{il}.$$

Уравнения Лакса для модели (2.22), (2.23) выполняются при условии $S_{ii} = \text{const.}$ Вместе с некоторой фиксацией калибровки эти условия образуют связи второго рода, по которым нужно провести пуассонову редукцию для окончательного определения скобки Пуассона. В случае, когда матрица “классических спинов” $S = \sum S_{ij} E_{ij}$ имеет единичный ранг, такая редукция приводит к бесспиновой модели.

Анизотропия естественным образом возникает в интегрируемых волчках, рассматриваемых как квазиклассический предел “цепочки”, состоящей из одного узла. Например, волчок Эйлера в таком описании (XYZ - GL_2 -цепочка из одного узла) приводит к классической алгебре Складина [23]–[25]. Развитием этого подхода является конструкция из работы [26], основанная на решении ассоциативного уравнения (1.2) с условиями (1.9) и (1.10) (т. е. уравнение (1.1) тоже выполняется) и локальным разложением в окрестности $\hbar = 0$ (классическим пределом) вида

$$R_{12}^{\hbar}(z) = \frac{1}{\hbar} 1 \otimes 1 + r_{12}(z) + \hbar m_{12}(z) + O(\hbar^2), \quad (2.25)$$

где $r_{12}(z)$ – классическая r -матрица. Условия (1.9) и (1.10) приводят к тому, что

$$r_{12}(z) = -r_{21}(-z), \quad m_{12}(z) = m_{21}(-z) = \frac{1}{2}(r_{12}^2(z) - 1 \otimes 1 N^2 \wp(z)). \quad (2.26)$$

Уравнение GL_N -волчка Эйлера–Арнольда для динамической переменной S , принимающей значения в $\text{Mat}(N, \mathbb{C})$,

$$\dot{S} = [S, J(S)], \quad J(S) = \sum J_{ij,kl} S_{kl} E_{ij}, \quad S = \sum S_{ij} E_{ij} \in \text{Mat}(N, \mathbb{C}), \quad (2.27)$$

со специальным тензором инерции $J(S) = \text{tr}_2(m_{12}(0)S_2)$, где $S_2 = 1 \otimes S$, эквивалентно записывается в форме уравнений Лакса со следующей парой Лакса со спектральным параметром:

$$L(z, S) = \text{tr}_2(r_{12}(z)S_2), \quad M(z, S) = \text{tr}_2(m_{12}(z)S_2). \quad (2.28)$$

Эта система описывается линейной скобкой Пуассона–Ли и гамильтонианом

$$H = \frac{1}{2} \text{tr}(SJ(S)) = \frac{1}{2} \text{tr}_{12}(m_{12}(0)S_1S_2). \quad (2.29)$$

Модель взаимодействующих волчков была исходно получена в работах [27] из матричных моделей. Описание ее как системы Хитчина на эллиптической кривой с нетривиальным характеристическим классом можно найти в статьях [28], [29], а в работе [30] эта конструкция была обобщена на случай произвольной комплексной группы Ли. В рассматриваемом нами случае группы GL (или группы SL) пара

Лакса для модели, описывающей n взаимодействующих GL_N -волчков, имеет размер $nN \times nN$ и естественным образом задается в блочном виде как

$$L(z) = \sum_{i,j=1}^n E_{ij} \otimes L^{ij}(z), \quad L^{ij}(z) \in \text{Mat}_N, \quad L(z) \in \text{Mat}_{nN}, \quad (2.30)$$

где

$$\begin{aligned} L^{ij}(z) = & \delta_{ij} \left(p_i + \mathcal{S}_0^{ii} T_0 E_1(z) + \sum_{\alpha \neq 0} \mathcal{S}_\alpha^{ii} T_\alpha \varphi_\alpha(z, \omega_\alpha) \right) + \\ & + (1 - \delta_{ij}) \sum_{\alpha} \mathcal{S}_\alpha^{ij} T_\alpha \varphi_\alpha(z, \omega_\alpha + q_{ij}). \end{aligned} \quad (2.31)$$

В данном случае блоки нумеруются индексами $i, j = 1, \dots, n$, а внутри самих блоков размера $N \times N$ каждый использован базис (1.5). Аналогично определяется матрица M . Ее блоки имеют вид

$$M^{ij}(z) = \delta_{ij} \sum_{\alpha \neq 0} \mathcal{S}_\alpha^{ii} T_\alpha \varphi_\alpha(z, \omega_\alpha) + (1 - \delta_{ij}) \sum_{\alpha} \mathcal{S}_\alpha^{ij} T_\alpha \varphi_\alpha(z, \omega_\alpha + q_{ij}). \quad (2.32)$$

В случае $n = 1$ эта пара Лакса воспроизводит эллиптический волчок, который получается из (2.27) подстановкой R -матрицы (1.3). Тогда $J(S) = -\sum_{\alpha} \wp(\omega_\alpha) S_\alpha T_\alpha$ (см. работы [25], [26]). В случае $N = 1$ мы получаем спиновую модель Калоджеро–Мозера³⁾ (2.22)–(2.24).

Пара Лакса (2.31), (2.32) обобщается также на случай произвольного решения ассоциативного уравнения Янга–Бакстера (1.2) с условиями (1.9), (1.10) и разложением (2.25). Тогда блочная структура сохраняется, а блоки имеют вид [21]

$$L^{ij}(z) = \delta_{ij} \left(p_i + \text{tr}_2(\mathcal{S}_2^{ii} R_{12}^{(0),z} P_{12}) \right) + (1 - \delta_{ij}) \text{tr}_2(\mathcal{S}_2^{ij} R_{12}^z(q_{ij}) P_{12}), \quad (2.33)$$

$$M^{ij}(z) = \delta_{ij} \text{tr}_2(\mathcal{S}_2^{ii} R_{12}^{(1),z} P_{12}) + (1 - \delta_{ij}) \text{tr}_2(\mathcal{S}_2^{ij} F_{12}^z(q_{ij}) P_{12}), \quad (2.34)$$

где $R_{12}^{(0),z}$ и $R_{12}^{(1),z}$ – коэффициенты разложения матрицы $R_{12}^z(q)$ в окрестности $q = 0$:

$$R_{12}^z(q) = \frac{NP_{12}}{q} + R_{12}^{(0),z} + qR_{12}^{(1),z} + O(q^2). \quad (2.35)$$

Для эллиптической R -матрицы (1.3) выполняется еще одно важное свойство: имеет место симметрия относительно конечномерного преобразования Фурье на решетке $\mathbb{Z}_N \times \mathbb{Z}_N$ (подробнее см. [31]),

$$R_{12}^z(Nq) = R_{12}^q(Nz)P_{12}, \quad (2.36)$$

что устанавливает связь между коэффициентами разложения в (2.35) и (2.25). В общем случае данное тождество следует считать еще одним условием.

Если матрица спиновых переменных $\mathcal{S} \in \text{Mat}(nN, \mathbb{C})$ имеет единичный ранг, гамильтонианы модели взаимодействующих волчков можно выразить только через

³⁾Как и в спиновой модели Калоджеро–Мозера, уравнения Лакса для (2.31), (2.32) подразумевают наличие дополнительной связи $\mathcal{S}_0^{ii} = \text{const}$.

диагональные блоки $\mathcal{S}^{ii}$, которые мы обозначим через $\overset{i}{B}$. В эллиптическом случае (2.31), (2.32) гамильтониан, вычисленный по $\text{tr } L^2(z)$, приводится к виду [16]

$$H^{\text{tops}} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n p_i^2 - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{\alpha \neq 0} \overset{i}{B}_\alpha \overset{i}{B}_{-\alpha} \wp(\omega_\alpha) + N \mathcal{F}_{\text{class}}^0, \quad (2.37)$$

где второе слагаемое есть сумма гамильтонианов n волчков (2.29), а $\mathcal{F}_{\text{class}}^0$ – классический аналог выражения (2.19):

$$\mathcal{F}_{\text{class}}^0 = \frac{1}{2} \sum_{i \neq j}^n \left(f(0, q_{ij}) \overset{i}{B}_0 \overset{j}{B}_0 + \sum_{\gamma \neq 0} \varphi_\gamma(q_{ij}, \omega_\gamma) (E_1(q_{ij} + \omega_\gamma) - E_1(q_{ij}) + 2\pi i \partial_\tau \omega_\gamma) \overset{i}{B}_\gamma \overset{j}{B}_{-\gamma} \right). \quad (2.38)$$

В общем случае (2.33), (2.34) аналогичный гамильтониан имеет вид [21]

$$H^{\text{tops}} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n p_i^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \text{tr}_{12}(m_{12}(0) \overset{i}{B}_1 \overset{i}{B}_2) + \frac{N}{2} \sum_{i \neq j}^n \text{tr}_{12}(F_{12}^0(q_{ij}) \overset{j}{B}_1 \overset{i}{B}_2), \quad (2.39)$$

где $\mathcal{F}_{\text{class}}^0$ – классический аналог члена $\mathcal{F}^0$. Нетрудно видеть, что при квантовании (в фундаментальном представлении $\overset{j}{B}_1 \rightarrow P_{1j}$) мы получаем с точностью до некоторых несущественных констант выражение (2.16).

Квантовые цепочки с дальним действием. Одним из приложений вышеописанных результатов является построение анизотропного аналога квантовой цепочки Иноземцева [14], которая задается гамильтонианом

$$H_2^{\text{Inoz}} = \sum_{i < j} P_{ij} \wp(x_i - x_j), \quad (2.40)$$

где подразумевается, что $N = 2$ (тогда базис T_α переходит в базис матриц Паули σ_α),

$$P_{12} = \frac{1}{2} \sum_{\alpha=0}^3 \sigma_\alpha \otimes \sigma_\alpha \equiv \frac{1}{2} \sum_{\alpha=0}^3 \overset{1}{\sigma}_\alpha \overset{2}{\sigma}_\alpha, \quad (2.41)$$

а узлы цепочки расположены эквидистантно на окружности:

$$x_j = \frac{j}{N}, \quad j = 1, \dots, N. \quad (2.42)$$

В тригонометрическом пределе гамильтониан (2.40) переходит в гамильтониан Халдейна–Шастры [32]

$$H_2^{\text{HS}} = \sum_{i < j} \frac{P_{ij}}{\sin^2 \pi(x_i - x_j)}. \quad (2.43)$$

Как известно [33], такие цепочки можно получить замораживанием многочастичных степеней свободы в квантовой спиновой модели Калоджеро–Мозера (так называемый freezing trick). В классической системе Калоджеро–Мозера точки x_j задают положение равновесия.

Оказывается [34], этот аргумент применим и в анизотропном случае, т. е. гамильтониан (2.19) при $N = 2$, если взять $q_j = x_j$ из (2.42), дает

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_2^{\text{chain}} &= \sum_{i < j} \left(\overset{i}{\sigma}_0 \overset{j}{\sigma}_0 E'_1(x_{ij}) - \sum_{\alpha=1}^3 \overset{i}{\sigma}_\alpha \overset{j}{\sigma}_\alpha \varphi_\beta(x_{ij}) \varphi_\gamma(x_{ij}) \right) = \\ &= \sum_{i < j} \left(\overset{i}{\sigma}_0 \overset{j}{\sigma}_0 E'_1(x_{ij}) + \sum_{\alpha=1}^3 \overset{i}{\sigma}_\alpha \overset{j}{\sigma}_\alpha \varphi_\alpha(x_{ij}) (E_1(x_{ij} + \omega_\alpha) - E_1(x_{ij}) - E_1(\omega_\alpha)) \right), \end{aligned} \quad (2.44)$$

и эта система интегрируема. Для доказательства интегрируемости необходимо построить старшие гамильтонианы. Широко известный рецепт, использующий структуру янгiana [35], а также квантовое представление Лакса с условием нулевой суммы (2.18) в эллиптическом случае не работают. В работе [34] была выдвинута гипотеза, что гамильтонианы можно найти, используя матрицы M :

$$H_k^{\text{chain}} \propto \text{tr}_{\text{aux}} \mathcal{M}^{(k)} \Big|_{q_j=x_j}, \quad (2.45)$$

где $\mathcal{M}^{(k)}$ – матрица M k -го гамильтонова потока (отвечающая гамильтониану модели Калоджеро–Мозера, вычисленному из $\text{tr } L^k$). Действительно, для $k = 2$ из (2.2) получим

$$H_2^{\text{chain}} \propto \mathcal{F}^0 \Big|_{q_j=x_j}. \quad (2.46)$$

Вычисление $\mathcal{M}^{(3)}$ и использование (2.45) дает

$$H_3^{\text{chain}} = \sum'_{a,b,c} [F_{ab}^0(x_{ab}), r_{cb}(x_{cb})], \quad (2.47)$$

где штрихом отмечена сумма по попарно различным значениям индексов. Численно было проверено, что $[H_2^{\text{chain}}, H_3^{\text{chain}}] = 0$. Однако вычисление всех старших матриц M является непростой задачей. Здесь могло бы помочь знание классической r -матрицы для R -матричной пары Лакса, но на данный момент она неизвестна.

Более перспективным представляется использование связи между R -матричной парой Лакса и взаимодействующими волчками. Вычисление гамильтонианов в этой (классической) модели достаточно простое. Ограничение на случай (2.42) еще более упрощает вычисление [36]. В результате после квантования спиновых переменных ($\overset{j}{B}_1 \rightarrow P_{1j}$) получим следующие выражения для производящих функций гамильтонианов:

$$H_2(z) = \sum'_{i,j} \text{tr}_0(P_{0i} R_{ij}^z(x_{ij}) R_{j0}^z(x_{ji})), \quad (2.48)$$

$$H_3(z) = \sum'_{i,j,k} \text{tr}_0(P_{0i} R_{ij}^z(x_{ij}) R_{jk}^z(x_{jk}) R_{k0}^z(x_{ki})). \quad (2.49)$$

В общем случае

$$\mathcal{H}_k(z) = \sum'_{i_1, i_2, \dots, i_k} \text{tr}_0(P_{0i_1} R_{i_1 i_2}^z(x_{i_1 i_2}) R_{i_2 i_3}^z(x_{i_2 i_3}) \dots R_{i_{k-1} i_k}^z(x_{i_{k-1} i_k}) R_{i_k 0}^z(x_{i_k i_1})), \quad (2.50)$$

где штрих в сумме означает, что $i_c \neq i_{c+1}$ для $c = 1, \dots, k-1$ и $i_1 \neq i_k$.

Можно убедиться, что $H_2(z)$ и $H_3(z)$ воспроизводят H_2^{chain} и H_3^{chain} соответственно. Однако начиная с $k = 4$ требуется добавление квантовых поправок, так как гамильтонианы (2.48)–(2.50) вычислены с классическими импульсами и координатами частиц. Так, например, для тригонометрической R -матрицы

$$4\sqrt{-1}R_{12}^z(q) = (\text{ctg } \pi z + \text{ctg } \pi q)(\sigma_0 \otimes \sigma_0 + \sigma_3 \otimes \sigma_3) + \frac{1}{\sin \pi z}(\sigma_0 \otimes \sigma_0 - \sigma_3 \otimes \sigma_3) + \frac{\pi}{\sin \pi q}(\sigma_1 \otimes \sigma_1 + \sigma_2 \otimes \sigma_2) \quad (2.51)$$

квантовая поправка к (2.50) с $k = 4$ равна

$$\Delta H_4(z) = \frac{1}{2} \sum'_{i,j} \text{tr}_0(P_{0i} F_{ij}^z(x_{ij}) F_{j0}^z(x_{ji})) + \frac{1}{4} \sum'_{i,j,k} \text{tr}_0(P_{0i} F_{ij}^z(x_{ij}) R_{jk}^z(x_{jk}) R_{k0}^z(x_{ki})).$$

Обсуждению этих вопросов посвящена работа [36].

3. ГАМИЛЬТонианы R -МАТРИЧНОГО ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ЛАКСА

В этом разделе мы покажем, что справедливо следующее утверждение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Гамильтонианы, вычисленные по матрице Лакса (1.12), совпадают с гамильтонианами классической системы Калоджеро–Мозера с константой связи $N\nu$ и только с ними.*

Наша стратегия состоит в том, чтобы доказать, что диагональные блоки $(\mathcal{L}^k)_{aa}$, $a = 1, \dots, n$, пропорциональны единичным матрицам из $\text{End}(\mathcal{H})$. При этом коэффициенты пропорциональности равны функциям, полученным аналогичным образом из стандартного представления Лакса ($\mathcal{L}$ при $N = 1$). Более точно,

$$(\mathcal{L}^k(z, \nu))_{aa} = 1_N^{\otimes n} (L^k(Nz, N\nu))_{aa}, \quad L = \mathcal{L}|_{N=1}. \quad (3.1)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как отмечалось во введении, для $k = 2$ данное утверждение легко проверяется из условия унитарности. Действительно,

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}^2(z, \nu))_{aa} &= \sum_{b=1}^n \mathcal{L}_{ab} \mathcal{L}_{ba} = \\ &= p_a^2 + \nu^2 \sum_{b \neq a}^n R_{ab}^z(q_{ab}) R_{ba}^z(q_{ba}) \stackrel{(1.10)}{=} 1_N^{\otimes n} (L^2(Nz, N\nu))_{aa}. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Аналогичным образом для $k = 3$ утверждение будет следовать из тождества

$$\begin{aligned} R_{12}^z(q_{12}) R_{23}^z(q_{23}) R_{31}^z(q_{31}) + R_{13}^z(q_{13}) R_{32}^z(q_{32}) R_{21}^z(q_{21}) &= \\ &= -N^3 \wp'(Nz) 1_N \otimes 1_N \otimes 1_N = \\ &= N^3 (\phi(Nz, q_{12}) \phi(Nz, q_{23}) \phi(Nz, q_{31}) + \phi(Nz, q_{13}) \phi(Nz, q_{32}) \phi(Nz, q_{21})) 1_N^{\otimes 3}. \end{aligned} \quad (3.3)$$

В общем случае будем пользоваться тождеством, доказанным в работе [17]:

$$\sum_{\substack{1 \leq i_1, \dots, i_{k-1} \leq k, \\ i_c \neq a, i_b \neq i_c}} R_{ai_1}^z R_{i_1 i_2}^z \dots R_{i_{k-2} i_{k-1}}^z R_{i_{k-1} a}^z = 1_N^{\otimes k} (-N)^k \frac{d^{(k-2)}}{d\eta^{(k-2)}} \wp(\eta) \Big|_{\eta=Nz} =$$

$$= 1_N^{\otimes k} N^k \sum_{\substack{1 \leq i_1, \dots, i_{k-1} \leq k, \\ i_c \neq a, i_b \neq i_c}} \phi(Nz, q_a - q_{i_1}) \phi(Nz, q_{i_1} - q_{i_2}) \dots \phi(Nz, q_{i_{k-1}} - q_a), \quad (3.4)$$

где a – фиксированный индекс, $k \geq 3$ и $R_{ab}^z = R_{ab}^z(q_{ab})$.

Проверим сначала утверждение (3.1) для случая, когда все импульсы равны нулю:

$$(\mathcal{L}^k(z, \nu, \{p_i = 0\}))_{aa} = 1_N^{\otimes n} (L^k(Nz, N\nu, \{p_i = 0\}))_{aa}, \quad L = \mathcal{L}|_{N=1}. \quad (3.5)$$

Заметим, во-первых, что если (3.5) верно для $k = n$, то оно верно и для $k < n$. Действительно, сумма, равная левой части (3.5),

$$\sum_{\substack{1 \leq i_1, \dots, i_{k-1} \leq n, \\ i_1, i_{k-1} \neq a, i_{c-1} \neq i_c}} R_{ai_1}^z R_{i_1 i_2}^z \dots R_{i_{k-2} i_{k-1}}^z R_{i_{k-1} a}^z, \quad (3.6)$$

разбивается на части, каждая из которых содержит суммирование только по подмножеству $M_k \subset \{1, \dots, n\}$ из k элементов, $|M_k| = k$. Каждая такая подсумма отличается от выражения (3.6) с $k = n$ только переименованием множества M_k в $\{1, \dots, k\}$ (вместе с переобозначением соответствующих q_i). Тогда утверждение верно для каждой подсуммы, а следовательно, и для всей суммы.

Докажем (3.5) для $k = n$. В этом случае тождество (3.4) отличается от (3.5) только тем, что в (3.4) суммирование идет по всем попарно различным значениям индексов, а в (3.5) значения индексов могут совпадать, за исключением любой пары, входящей в одну и ту же R -матрицу. Используем индукцию по k . Пусть равенство (3.5) верно для всех степеней до $k - 1$ включительно. Левая часть равенства (3.5) содержит наряду с выражением, стоящим в левой части (3.4), только такие слагаемые, в которых либо хотя бы один из индексов равен a , либо хотя бы два индекса, не входящих в одну R -матрицу, равны друг другу. В обоих случаях это приводит к тому, что каждое такое слагаемое записывается как произведение сомножителей, каждый из которых представляет собой выражение в левой части равенства (3.5) степени меньше k . Тогда по предположению индукции все такие множители являются скалярными (с коэффициентами, равными соответствующим выражениям от функций Кронекера). Следовательно, вся левая часть равенства (3.5) удовлетворяет этому свойству. Тем самым для $k = n$ формула (3.5) доказана. При $k > n$ работает тот же аргумент, так как при этом хотя бы одна пара индексов, не входящих в одну R -матрицу, должна совпадать для каждого слагаемого. Случай $k < n$, как мы уже проверили, следует из случая $k = n$. Таким образом, равенство (3.5) доказано для всех k .

Докажем теперь полное утверждение (3.1), отличающееся от (3.5) наличием импульсов. Обозначив через P диагональную матрицу импульсов из (1.12), имеем

$$\mathcal{L}^k = (P + \mathcal{L}_{P=0})^k. \quad (3.7)$$

Для простоты рассмотрим слагаемые из (3.7), линейные по импульсам. В остальных случаях рассуждения аналогичны. Переменные p_j , $j = 1, \dots, n$, независимы. Поэтому утверждение (3.1) подразумевает, что для каждого фиксированного j коэффициент перед p_j в диагональном блоке $(\mathcal{L}^k)_{aa}$ должен быть скалярным и равным соответствующему выражению в функциях Кронекера. Если $j = a$, то нужное утверждение верно, так как в этом случае блок $(\mathcal{L}^k)_{aa}$ состоит из суммы членов вида $(\mathcal{L}_{P=0}^{m-1})_{aa} p_a (\mathcal{L}_{P=0}^{k-m})_{aa}$, $m = 1, \dots, k$, а для каждого из них утверждение верно в силу формулы (3.5).

Пусть теперь $j \neq a$. Тогда линейный по p_j вклад в $(\mathcal{L}^k)_{aa}$ равен

$$\begin{aligned} A_j(k-1) &:= \sum_{m=2}^{k-1} p_j (\mathcal{L}_{P=0}^{m-1})_{aj} (\mathcal{L}_{P=0}^{k-m})_{ja} = \\ &= \sum'_{1 \leq i_2, \dots, i_{k-2} \leq n} p_j R_{aj}^z R_{ji_2}^z \dots R_{i_{k-3}i_{k-2}}^z R_{i_{k-2}a}^z + \\ &\quad + \dots + \sum'_{1 \leq i_1, \dots, i_{k-3} \leq n} p_j R_{ai_1}^z R_{i_1i_2}^z \dots R_{i_{k-3}j}^z R_{ja}^z, \end{aligned} \quad (3.8)$$

где штрихи в суммах подразумевают, что суммирование идет только по значениям индексов, не совпадающих для каждой присутствующей R -матрицы в отдельности. Импульс p_j является общим множителем в сумме (3.8). Рассмотрим выражение $A_j(k-1)/p_j$. Оно имеет степень $k-1$ по R -матрицам. Для завершения доказательства равенства (3.1) нужно показать что A_j опять же является скалярным с коэффициентом, равным этому же выражению с заменой R -матриц на функции Кронекера.

Пусть это утверждение верно для всех $A_j(2)/p_j, \dots, A_j(k-2)/p_j$. Докажем его для $A_j(k-1)/p_j$. Заметим, что

$$(\mathcal{L}_{P=0})_{aa}^{k-1} = \frac{A_j(k-1)}{p_j} + B_j(k-1) + C_j(k-1), \quad (3.9)$$

где $B_j(k-1)$ – та же сумма, что и в (3.6) (с заменой k на $k-1$), в которой ни один из индексов суммирования не равен j , а $C_j(k-1)$ состоит из сумм $A_j(k-1)/p_j$ (3.8), в каждой из которых еще хотя бы один индекс суммирования зафиксирован равным j . Левая часть равенства (3.9) является скалярной (с нужным коэффициентом) в силу (3.5).

Аналогично выражение для $B_j(k-1)$ получается из (3.6) с помощью замены k на $k-1$ и n на $n-1$, так как условие, что все индексы суммирования не равны j , эквивалентно вычислению $((\mathcal{L}'_{P=0})^{k-1})_{aa}$, где $\mathcal{L}'$ получается из $\mathcal{L}$ вычеркиванием j -го столбца и j -й строки.

Тем самым остается показать, что слагаемое $C_j(k-1)$ является скалярным. Оно состоит из сумм вида (3.6) (с заменой k на $k-1$), в которых два, три и более индексов суммирования равны j . Это означает, что в каждой такой сумме будут отделяться скалярные множители. Например, для сумм, содержащих пару индексов j , будут отделяться (скалярные в силу (3.5)) множители $(\mathcal{L}_{P=0}^2)_{jj}, (\mathcal{L}_{P=0}^3)_{jj}, \dots, (\mathcal{L}_{P=0}^{k-3})_{jj}$, а выражения перед ними будут равны $A'_j(k-3)/p_j, \dots, A'_j(2)/p_j$, где штрих означает, что они построены по $\mathcal{L}'$. Значит, по предположению индукции $C_j(k-1)$ также является скалярным. Аналогичное рассуждение проводится для случаев, когда три

и более индекса равны j . Тогда отделяемые скалярные множители будут произведениями вида $(\mathcal{L}_{P=0}^{l_1})_{jj} \dots (\mathcal{L}_{P=0}^{l_s})_{jj}$, где s на единицу меньше количества индексов j . Предложение доказано.

4. R -МАТРИЧНОЕ ТОЖДЕСТВО СТАРШЕГО ПОРЯДКА

В этом разделе мы докажем тождество (1.15).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Для решения $R_{ab}^x(y)$ ассоциативного уравнения Янга–Бакстера (1.2) и набора $2k$ комплексных переменных $x_1, \dots, x_k; y_1, \dots, y_k$ в общем положении выполняется следующее тождество k -го порядка:

$$\begin{aligned} R_{12}^{x_1}(y_1) R_{23}^{x_2}(y_2) \dots R_{k,k+1}^{x_k}(y_k) = \\ = R_{1,k+1}^{x_k}(Y_k) R_{12}^{x_1-x_k}(y_1) R_{23}^{x_2-x_k}(y_2) \dots R_{k-1,k}^{x_{k-1}-x_k}(y_{k-1}) + \\ + R_{k,k+1}^{x_k-x_{k-1}}(y_k) R_{1,k+1}^{x_{k-1}}(Y_k) R_{12}^{x_1-x_{k-1}}(y_1) R_{23}^{x_2-x_{k-1}}(y_2) \dots R_{k-2,k-1}^{x_{k-2}-x_{k-1}}(y_{k-2}) + \\ + R_{k-1,k}^{x_{k-1}-x_{k-2}}(y_{k-1}) R_{k,k+1}^{x_k-x_{k-2}}(y_k) R_{1,k+1}^{x_{k-2}}(Y_k) R_{12}^{x_1-x_{k-2}}(y_1) \dots R_{k-3,k-2}^{x_{k-3}-x_{k-2}}(y_{k-3}) + \\ + \dots + R_{23}^{x_2-x_1}(y_2) R_{34}^{x_3-x_1}(y_3) \dots R_{k,k+1}^{x_k-x_1}(y_k) R_{1,k+1}^{x_1}(Y_k), \end{aligned} \quad (4.1)$$

где правая часть содержит k слагаемых и $Y_k = \sum_{l=1}^k y_l$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО проводится индукцией по k . Для этого нужно доказать аналогичное утверждение для $k+1$, а именно

$$\begin{aligned} R_{12}^{x_1}(y_1) R_{23}^{x_2}(y_2) \dots R_{k,k+1}^{x_k}(y_k) R_{k+1,k+2}^{x_{k+1}}(y_{k+1}) = \\ = R_{1,k+2}^{x_{k+1}}(Y_{k+1}) R_{12}^{x_1-x_{k+1}}(y_1) R_{23}^{x_2-x_{k+1}}(y_2) \dots R_{k,k+1}^{x_k-x_{k+1}}(y_k) + \\ + R_{k+1,k+2}^{x_{k+1}-x_k}(y_{k+1}) R_{1,k+2}^{x_k}(Y_{k+1}) R_{12}^{x_1-x_k}(y_1) R_{23}^{x_2-x_k}(y_2) \dots R_{k-1,k}^{x_{k-1}-x_k}(y_{k-1}) + \\ + \dots + R_{23}^{x_2-x_1}(y_2) \dots R_{k,k+1}^{x_k-x_1}(y_k) R_{k+1,k+2}^{x_{k+1}-x_1}(y_{k+1}) R_{1,k+2}^{x_1}(Y_{k+1}). \end{aligned} \quad (4.2)$$

где правая часть содержит $k+1$ слагаемое, а $Y_{k+1} = \sum_{l=1}^{k+1} y_l = Y_k + y_{k+1}$.

Для вывода формулы (4.2) умножим обе части равенства (4.1) на $R_{k+1,k+2}^{x_{k+1}}(y_{k+1})$ справа и пронесем эту R -матрицу во всех слагаемых полученного равенства на сколько возможно влево. Получим

$$\begin{aligned} R_{12}^{x_1}(y_1) R_{23}^{x_2}(y_2) \dots R_{k,k+1}^{x_k}(y_k) R_{k+1,k+2}^{x_{k+1}}(y_{k+1}) = \\ = \underbrace{R_{1,k+1}^{x_k}(Y_k) R_{k+1,k+2}^{x_{k+1}}(y_{k+1})}_{\text{}} R_{12}^{x_1-x_k}(y_1) R_{23}^{x_2-x_k}(y_2) \dots R_{k-1,k}^{x_{k-1}-x_k}(y_{k-1}) + \\ + R_{k,k+1}^{x_k-x_{k-1}}(y_k) \underbrace{R_{1,k+1}^{x_{k-1}}(Y_k) R_{k+1,k+2}^{x_{k+1}}(y_{k+1})}_{\text{}} R_{12}^{x_1-x_{k-1}}(y_1) \dots R_{k-2,k-1}^{x_{k-2}-x_{k-1}}(y_{k-2}) + \\ + \dots + R_{23}^{x_2-x_1}(y_2) R_{34}^{x_3-x_1}(y_3) \dots R_{k,k+1}^{x_k-x_1}(y_k) \underbrace{R_{1,k+1}^{x_1}(Y_k) R_{k+1,k+2}^{x_{k+1}}(y_{k+1})}_{\text{}}. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Левые части равенств (4.2) и (4.3) совпадают по построению. Докажем равенство правых частей. В отмеченных нижней фигурной скобкой парах R -матриц матрица $R_{k+1,k+2}^{x_{k+1}}(y_{k+1})$ стоит справа. Преобразуем все эти пары, используя (1.2), т. е. подставим в (4.3) правую часть тождества

$$R_{1,k+1}^x(Y_k) R_{k+1,k+2}^{x_{k+1}}(y_{k+1}) = R_{k+1,k+2}^{x_{k+1}-x}(y_{k+1}) R_{1,k+2}^x(Y_{k+1}) + R_{1,k+2}^{x_{k+1}}(Y_{k+1}) R_{1,k+1}^{x-x_{k+1}}(Y_k)$$

с $x = x_k, \dots, x_1$ для каждого слагаемого соответственно. Два слагаемых в правой части данного равенства при подстановке в соотношение (4.3) приведут к выражению из $2k$ членов. Выпишем их так, что первые k слагаемых получаются из $R_{k+1,k+2}^{x_{k+1}-x_k}(y_{k+1})R_{1,k+2}^x(Y_{k+1})$, а вторые k слагаемых – из $R_{1,k+2}^{x_{k+1}}(Y_{k+1})R_{1,k+1}^{x-x_{k+1}}(Y_k)$. Для удобства сохраним подчеркивание преобразованных R -матриц. Правая часть равенства (4.3) принимает вид

$$\begin{aligned} & \left\{ \begin{aligned} & \underbrace{R_{k+1,k+2}^{x_{k+1}-x_k}(y_{k+1})R_{1,k+2}^x(Y_{k+1})}_{\text{}} R_{12}^{x_1-x_k}(y_1)R_{23}^{x_2-x_k}(y_2) \dots R_{k-1,k}^{x_{k-1}-x_k}(y_{k-1}) + \\ & + R_{k,k+1}^{x_k-x_{k-1}}(y_k) \underbrace{R_{k+1,k+2}^{x_{k+1}-x_{k-1}}(y_{k+1})R_{1,k+2}^{x_{k-1}}(Y_{k+1})}_{\text{}} \times \\ & \quad \times R_{12}^{x_1-x_{k-1}}(y_1) \dots R_{k-2,k-1}^{x_{k-2}-x_{k-1}}(y_{k-2}) + \\ & + \dots + R_{23}^{x_2-x_1}(y_2)R_{34}^{x_3-x_1}(y_3) \dots R_{k,k+1}^{x_k-x_1}(y_k) \underbrace{R_{k+1,k+2}^{x_{k+1}-x_1}(y_{k+1})R_{1,k+2}^{x_1}(Y_{k+1})}_{\text{}} + \end{aligned} \right. \\ & \left\{ \begin{aligned} & + \underbrace{R_{1,k+2}^{x_{k+1}}(Y_{k+1})R_{1,k+1}^{x_k-x_{k+1}}(Y_k)}_{\text{}} R_{12}^{x_1-x_k}(y_1)R_{23}^{x_2-x_k}(y_2) \dots R_{k-1,k}^{x_{k-1}-x_k}(y_{k-1}) + \\ & + R_{k,k+1}^{x_k-x_{k-1}}(y_k) \underbrace{R_{1,k+2}^{x_{k+1}}(Y_{k+1})R_{1,k+1}^{x_{k-1}-x_{k+1}}(Y_k)}_{\text{}} \times \\ & \quad \times R_{12}^{x_1-x_{k-1}}(y_1) \dots R_{k-2,k-1}^{x_{k-2}-x_{k-1}}(y_{k-2}) + \\ & + \dots + R_{23}^{x_2-x_1}(y_2)R_{35}^{x_3-x_1}(y_3) \dots R_{k,k+1}^{x_k-x_1}(y_k) \underbrace{R_{1,k+2}^{x_{k+1}}(Y_{k+1})R_{1,k+1}^{x_1-x_{k+1}}(Y_k)}_{\text{}}. \end{aligned} \right. \end{aligned}$$

Это выражение нужно сравнить с правой частью равенства (4.2). Легко видеть, что первые k слагаемых в данном выражении совпадают с последними k слагаемыми из правой части соотношения (4.2). Тем самым нам остается показать, что последние k слагаемых равны первому слагаемому в правой части равенства (4.2), т. е. $R_{1,k+2}^{x_{k+1}}(Y_{k+1})R_{12}^{x_1-x_{k+1}}(y_1)R_{23}^{x_2-x_{k+1}}(y_2) \dots R_{k,k+1}^{x_k-x_{k+1}}(y_k)$. Для этого нужно перенести влево множитель $R_{1,k+2}^{x_{k+1}}(Y_{k+1})$, входящий во все подчеркнутые пары, во всех k слагаемых второго блока. Вынося слева за скобки этот общий множитель, получим исходное предположение индукции (4.1), в котором вместо $x_1, \dots, x_k$ подставлены $x_1 - x_{k+1}, \dots, x_k - x_{k+1}$. Предложение доказано.

Список литературы

- [1] S. Fomin, A. N. Kirillov, “Quadratic algebras, Dunkl elements, and Schubert calculus”, *Advances in Geometry*, Progress in Mathematics, **172**, eds. J.-L. Brylinski, R. Brylinski, V. Nistor, B. Tsygan, P. Xu, Birkhäuser, Boston, MA, 1999, 147–182; M. Aguiar, “Infinitesimal Hopf algebras”, *New Trends in Hopf Algebra Theory*, Contemporary Mathematics, **267**, eds. N. Andruskiewitsch, W. R. F. Santos, AMS, Providence, RI, 2000, 1–29.
- [2] A. Polishchuk, “Classical Yang–Baxter equation and the A^∞ -constraint”, *Adv. Math.*, **168**:1 (2002), 56–95.
- [3] R. J. Baxter, “Partition function of the eight-vertex lattice model”, *Ann. Phys.*, **70**:1 (1972), 193–228; A. A. Belavin, “Dynamical symmetry of integrable quantum systems”, *Nucl. Phys. B*, **180**:2 (1981), 189–200.
- [4] А. Вейль, *Эллиптические функции по Эйзенштейну и Кронекеру*, Мир, М., 1978; Д. Мамфорд, *Лекции о тэта-функциях*, Мир, М., 1988.
- [5] J. D. Fay, *Theta Functions on Riemann Surfaces*, Lecture Notes in Mathematics, **352**, Springer, Berlin, 1973.

- [6] V. V. Bazhanov, Y. G. Stroganov, “On connection between the solutions of the quantum and classical triangle equations”, *Проблемы физики высоких энергий и квантовой теории поля*, т. 1, Труды VI Международного семинара по проблемам физики высоких энергий и квантовой теории поля (Протвино, июль 1983 г.), ИФВЭ, Протвино, 1983, 52–54; Л. А. Тахтаджян, “Решения уравнений треугольников с $\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_n$ -симметрией как матричные аналоги дзета- и сигма-функций Вейерштрасса”, *Зап. научн. сем. ЛОМИ*, **133** (1984), 258–276.
- [7] A. Levin, M. Olshanetsky, A. Zotov, “Planck constant as spectral parameter in integrable systems and KZB equations”, *JHEP*, **10** (2014), 109, 28 pp., arXiv: 1408.6246.
- [8] А. М. Левин, М. А. Олшанецкий, А. В. Зотов, “Квантовые R -матрицы Бакстера–Белавина и многомерные пары Лакса для уравнения Пенлеве VI”, *ТМФ*, **184:1** (2015), 41–56.
- [9] A. Levin, M. Olshanetsky, A. Zotov, “Yang–Baxter equations with two Planck constants”, *J. Phys. A: Math. Theor.*, **49:1** (2016), 014003, 19 pp., arXiv: 1507.02617.
- [10] Е. К. Склянин, Л. А. Тахтаджян, Л. Д. Фаддеев, “Квантовый метод обратной задачи. I”, *ТМФ*, **40:2** (1979), 194–220.
- [11] F. Calogero, “Solution of a three-body problem in one dimension”, *J. Math. Phys.*, **10:12** (1969), 2191–2196; J. Moser, “Three integrable Hamiltonian systems connected with isospectral deformations”, *Adv. Math.*, **16:2** (1975), 197–220; M. A. Olshanetsky, A. M. Perelomov, “Completely integrable Hamiltonian systems connected with semisimple Lie algebras”, *Invent. Math.*, **37:2** (1976), 93–108.
- [12] K. Hikami, M. Wadati, “Integrable spin-1/2 particle systems with long-range interactions”, *Phys. Lett. A*, **173:3** (1993), 263–266; “Integrability of Calogero–Moser spin system”, *J. Phys. Soc. Japan*, **62:2** (1993), 469–472.
- [13] V. I. Inozemtsev, R. Sasaki, “Universal Lax pairs for spin Calogero–Moser models and spin exchange models”, *J. Phys. A: Math. Gen.*, **34:37** (2001), 7621–7632, arXiv: hep-th/0105164.
- [14] V. I. Inozemtsev, “On the connection between the one-dimensional $S = 1/2$ Heisenberg chain and Haldane–Shastry model”, *J. Statist. Phys.*, **59:5–6** (1990), 143–1155.
- [15] И. М. Кричевер, “Эллиптические решения уравнения Кадомцева–Петвиашвили и интегрируемые системы частиц”, *Функц. анализ и его прил.*, **14:4** (1980), 45–54.
- [16] A. Grekov, A. Zotov, “On R -matrix valued Lax pairs for Calogero–Moser models”, *J. Phys. A: Math. Theor.*, **51:31** (2018), 315202, 26 pp., arXiv: 1801.00245.
- [17] А. В. Зотов, “Старшие аналоги условия унитарности для квантовых R -матриц”, *ТМФ*, **189:2** (2016), 176–185, arXiv: 1511.02468.
- [18] B. Sutherland, “Exact results for a quantum many-body problem in one dimension”, *Phys. Rev. A*, **4:5** (1971), 2019–2021; “Exact results for a quantum many-body problem in one dimension. II”, **5:3** (1972), 1372–1376; M. A. Olshanetsky, A. M. Perelomov, “Quantum integrable systems related to Lie algebras”, *Phys. Rep.*, **94:6** (1983), 313–404; I. Cherednik, “Integration of quantum many-body problems by affine Knizhnik–Zamolodchikov equations”, *Adv. Math.*, **106:1** (1994), 65–95.
- [19] K. Hikami, M. Wadati, “Integrability of Calogero–Moser spin system”, *J. Phys. Soc. Japan*, **62:2** (1993), 469–472.
- [20] J. Gibbons, T. Hermesen, “A generalization of the Calogero–Moser systems”, *Phys. D*, **11:3** (1984), 337–348; S. Wojciechowski, “An integrable marriage of the Euler equations with the Calogero–Moser system”, *Phys. Lett. A*, **111:3** (1985), 101–103.
- [21] A. Grekov, I. Sechin, A. Zotov, “Generalized model of interacting tops” (to appear).
- [22] E. Billey, J. Avan, O. Babelon, “The r -matrix structure of the Euler–Calogero–Moser model”, *Phys. Lett. A*, **186:1–2** (1994), 114–118, arXiv: hep-th/9312042; “Exact Yangian symmetry in the classical Euler–Calogero–Moser model”, **188:3** (1994), 263–271, arXiv: hep-th/9401117.

- [23] Е. К. Склянин, “О некоторых алгебраических структурах, связанных с уравнением Янга–Бакстера”, *Функц. анализ и его прил.*, **16**:4 (1982), 27–34.
- [24] Л. А. Тахтаджян, Л. Д. Фаддеев, *Гамильтонов подход в теории солитонов*, Наука, М., 1986.
- [25] A. Levin, M. Olshanetsky, A. Zotov, “Relativistic classical integrable tops and quantum R -matrices”, *JHEP*, **07** (2014), 012, 38 pp., arXiv: 1405.7523.
- [26] A. Levin, M. Olshanetsky, A. Zotov, “Noncommutative extensions of elliptic integrable Euler–Arnold tops and Painlevé VI equation”, *J. Phys. A: Math. Theor.*, **49**:39 (2016), 395202, 24 pp., arXiv: 1603.06101.
- [27] A. P. Polychronakos, “Calogero–Moser models with noncommutative spin interactions”, *Phys. Rev. Lett.*, **89**:12 (2002), 126403, 4 pp., arXiv: hep-th/0112141; “Generalized Calogero models through reductions by discrete symmetries”, *Nucl. Phys. B*, **543**:1–2 (1999), 485–498, arXiv: hep-th/9810211; “The physics and mathematics of Calogero particles”, *J. Phys. A: Math. Gen.*, **39**:41 (2006), 12793–12845, arXiv: hep-th/0607033.
- [28] А. В. Зотов, А. М. Левин, “Интегрируемая система взаимодействующих эллиптических волчков”, *ТМФ*, **146**:1 (2006), 55–64; А. В. Зотов, А. В. Смирнов, “Модификации расщелений, эллиптические интегрируемые системы и связанные задачи”, *ТМФ*, **177**:1 (2013), 3–67.
- [29] A. Levin, M. Olshanetsky, A. Smirnov, A. Zotov, “Characteristic classes of $SL(N, \mathbb{C})$ -bundles and quantum dynamical elliptic R -matrices”, *J. Phys. A: Math. Theor.*, **46**:3 (2013), 035201, 25 pp., arXiv: 1208.5750.
- [30] A. Levin, M. Olshanetsky, A. Smirnov, A. Zotov, “Characteristic classes and Hitchin systems. General construction”, *Commun. Math. Phys.*, **316**:1 (2012), 1–44, arXiv: 1006.0702; A. Levin, M. Olshanetsky, A. Smirnov, A. Zotov, “Calogero–Moser systems for simple Lie groups and characteristic classes of bundles”, *J. Geom. Phys.*, **62**:8 (2012), 1810–1850, arXiv: 1007.4127.
- [31] A. Zotov, “Relativistic elliptic matrix tops and finite Fourier transformations”, *Modern Phys. Lett. A*, **32**:32 (2017), 1750169, 22 pp., arXiv: 1706.05601.
- [32] F. D. M. Haldane, “Exact Jastrow–Gutzwiller resonating-valence-bond ground state of the spin-(1/2 antiferromagnetic Heisenberg chain with $1/r^2$ exchange”, *Phys. Rev. Lett.*, **60**:7 (1988), 635–638; B. S. Shastry, “Exact Solution of an $S = 1/2$ Heisenberg antiferromagnetic chain with long-ranged interactions”, *Phys. Rev. Lett.*, **60**:7 (1988), 639–642.
- [33] A. P. Polychronakos, “Lattice integrable systems of Haldane–Shastry type”, *Phys. Rev. Lett.*, **70**:15 (1993), 2329–2331, arXiv: hep-th/9210109.
- [34] I. Sechin, A. Zotov, “ R -matrix-valued Lax pairs and long-range spin chains”, *Phys. Lett. B*, **781** (2018), 1–7, arXiv: 1801.08908.
- [35] D. Bernard, M. Gaudin, F. D. M. Haldane, V. Pasquier, “Yang–Baxter equation in long-range interacting systems”, *J. Phys. A: Math. Gen.*, **26**:20 (1993), 5219–5236.
- [36] A. Grekov, I. Sechin, A. Zotov, “Interacting integrable tops and long range spin chains” (to appear).

Поступила в редакцию 4.09.2018