Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. А. Вешев, Вырождение решений уравнения Гойна при слиянии особенностей,
ТМФ, 1997, том 110, номер 2, 228–232

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf963>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и
согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.209.158.208

26 апреля 2023 г., 17:05:16

Н. А. Вешев*

ВЫРОЖДЕНИЕ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЯ ГОЙНА ПРИ СЛИЯНИИ ОСОБЕННОСТЕЙ

Рассматриваются предельные переходы в процессе вырождения уравнения Гойна. Показано, что собственные функции уравнения Гойна переходят в собственные функции вырожденного уравнения Гойна.

1. ВВЕДЕНИЕ

Физические приложения уравнения Гойна и его вырожденных случаев [1, 2] объясняют большой интерес к этим уравнениям в последнее время [3, 4, 5]. Уравнение Гойна

$$\frac{d^2 y}{dz^2} + \left(\frac{\gamma}{z} + \frac{\delta}{z-1} + \frac{\varepsilon}{z-a} \right) \frac{dy}{dz} + \frac{\alpha\beta z - q}{z(z-1)(z-a)} y = 0 \quad (1)$$

является уравнением с четырьмя особыми точками 0, 1, a , ∞ . В работе используется понятие s -ранга, введенное в [4]. А именно, s -ранг регулярной особой точки, если она не является элементарной, равен 1. Ранг конечной иррегулярной особой точки есть наибольшее из чисел – кратности полюса коэффициента при производной в уравнении вида (1) и половины кратности полюса коэффициента при y . В уравнении Гойна каждая из особых точек имеет s -ранг равный 1. Формальное слияние особенностей (например, когда $a \rightarrow \infty$) приводит к тому, что число параметров уравнения уменьшается более чем на 1. Подобный процесс называется слабым вырождением. При этом суммарный s -ранг не сохраняется, и в результате получается уравнение гипергеометрического типа. В данной статье рассматривается другой процесс вырождения, сохраняющий сумму s -рангов особых точек.

Для получения вырожденного уравнения Гойна с теми же характеристиками в особых точках

$$\frac{d^2 y}{dz^2} + \left(\frac{\gamma}{z} + \frac{\delta}{z-1} + p \right) \frac{dy}{dz} + \frac{\alpha p z - q}{z(z-1)} y = 0 \quad (2)$$

нужно, чтобы при стремлении a к бесконечности и другие параметры уравнения (1) стремились к бесконечности. Пусть

$$\beta = -p\alpha, \quad q = -aq, \quad \varepsilon = -pa + \alpha + 1 - \delta - \gamma. \quad (3)$$

* Санкт-Петербургская государственная академия аэрокосмического приборостроения

При этом число свободных параметров уменьшается на 1, а получающееся уравнение (2) имеет в особых точках совокупность s -рангов $\{1, 1, 2\}$, т. е. в точках $z = 0$, $z = 1$ характер особенности сохраняется, а при $z = \infty$ особая точка становится иррегулярной.

В работах [3, 4] было показано, что при таком переходе сохраняются интегральные соотношения для специальных функций – решений уравнений (1) и (2). Однако при этом остается открытым вопрос о том, переходят ли при этом собственные функции уравнения (1) в собственные функции уравнения (2) [5].

Решение этого вопроса существенно зависит от области изменения независимой переменной z . Для интервала $(0, 1)$ удаление особенности $a \rightarrow \infty$ происходит “вдали” от него, в то время как переход собственных функций уравнения (1) на интервале $(1, a)$ в собственные функции уравнения (2) на $(1, \infty)$ затрагивает точку слияния особенностей $z = \infty$.

2. ПЕРЕХОД ОТ УРАВНЕНИЯ ГОЙНА К ВЫРОЖДЕННОМУ УРАВНЕНИЮ

Рассмотрим первый случай, когда $z \in (0, 1)$. Вводя операторы

$$\Lambda_1 = z(z-1) \frac{d^2}{dz^2} + (\gamma(z-1) + \delta z) \frac{d}{dz},$$

$$\Lambda_2 = z(z-1) \frac{d}{dz},$$

можно записать уравнения (1) и (2) в виде

$$Ly = (z-a)\Lambda_1 y + \varepsilon \Lambda_2 y + (\alpha\beta z - q)y = 0, \quad (4)$$

$$\widehat{L}y = \Lambda_1 y + p\Lambda_2 y + (\alpha pz - q)y = 0. \quad (5)$$

В обоих случаях, следуя [6, 7], произвольные решения (4) и (5) ищутся в виде

$$y = \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m y_{\nu_0+m}, \quad (6)$$

где y_ν – решение гипергеометрического уравнения

$$\Lambda_1 y_\nu = \nu(\nu + \omega) y_\nu, \quad y_\nu = F(-\nu, \nu + \omega, \gamma, z).$$

Прежде чем подставлять представление (6) в (4) и (5), заметим, что

$$zy_\nu = A_\nu y_{\nu+1} + B_\nu y_\nu + C_\nu y_{\nu-1},$$

$$\Lambda_2 y_\nu = A'_\nu y_{\nu+1} + B'_\nu y_\nu + C'_\nu y_{\nu-1},$$

где

$$A_\nu = -\frac{(\nu + \omega)(\nu + \gamma)}{(2\nu + \omega)(2\nu + \omega + 1)}, \quad A'_\nu = -\frac{\nu(\nu + \omega)(\nu + \gamma)}{(2\nu + \omega)(2\nu + \omega + 1)},$$

$$B_\nu = \frac{2\nu(\nu + \omega) + \gamma(\omega - 1)}{(2\nu + \omega - 1)(2\nu + \omega + 1)}, \quad B'_\nu = \frac{\nu(\nu + \omega)(\nu + \delta - 1)}{(2\nu + \omega)(2\nu + \omega - 1)},$$

$$C_\nu = -\frac{\nu(\nu + \delta - 1)}{(2\nu + \omega)(2\nu + \omega - 1)}, \quad C'_\nu = -\frac{\nu(\nu + \omega)(\nu + \delta - 1)}{(2\nu + \omega)(2\nu + \omega - 1)}.$$

В этих обозначениях операторы L и $\widehat{L}$ можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned} Ly_\nu &= D_\nu y_{\nu-1} + E_\nu y_\nu + F_\nu y_{\nu+1}, \\ \widehat{L}y_\nu &= D'_\nu y_{\nu-1} + E'_\nu y_\nu + F'_\nu y_{\nu+1}, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} D_\nu &= -\frac{\nu(\nu + \omega - \alpha)(\nu + \omega - \beta)(\nu + \delta - 1)}{(2\nu + \omega)(2\nu + \omega - 1)}, \\ E_\nu &= \frac{\varepsilon\nu(\nu + \omega)(\nu - \delta) + (\nu(\nu + \omega) + \alpha\beta)(2\nu(\nu + \omega) + \gamma(\omega - 1))}{(2\nu + \omega + 1)(2\nu + \omega - 1)} - \\ &\quad - a\nu(\nu + \omega) - q, \\ F_\nu &= -\frac{(\nu + \alpha)(\nu + \beta)(\nu + \omega)(\nu + \gamma)}{(2\nu + \omega)(2\nu + \omega - 1)}, \\ D'_\nu &= p(C'_\nu + \alpha C_\nu), \\ E'_\nu &= \nu(\nu + \omega) + p(B'_\nu + \alpha B_\nu) - q, \\ F'_\nu &= p(A'_\nu + \alpha A_\nu). \end{aligned}$$

Подстановка решения y в виде (6) в уравнения (4) и (5) приводит к бесконечной системе уравнений на коэффициенты c_r :

$$P_r c_{r-1} + S_r c_r + R_r c_{r+1} = 0, \quad (7)$$

где

$$P_r = F_{\nu_0+r-1}, \quad S_r = E_{\nu_0+r}, \quad R_r = D_{\nu_0+r+1}$$

для уравнения Гойна (4), и

$$P'_r c_{r-1} + S'_r c_r + R'_r c_{r+1} = 0,$$

где

$$P'_r = F'_{\nu_0+r-1}, \quad S'_r = E'_{\nu_0+r}, \quad R'_r = D'_{\nu_0+r+1}$$

для вырожденного уравнения Гойна (5). Легко установить, что при выполнении условий (3)

$$\lim_{a \rightarrow \infty} P_r = P'_r, \quad \lim_{a \rightarrow \infty} S_r = S'_r, \quad \lim_{a \rightarrow \infty} R_r = R'_r.$$

Таким образом, бесконечные системы для решений уравнений (4) и (5) переходят друг в друга. Однако этого факта мало для доказательства перехода решений уравнений друг в друга.

Если раньше речь шла о произвольных решениях, то теперь перейдем к специальным решениям – собственным функциям.

ТЕОРЕМА. Если $y_1(z, a)$ есть собственная функция уравнения (1) на промежутке $(0, 1)$, отвечающая собственному числу q , а $y_2(z)$ – собственная функция (2), отвечающая собственному числу, получаемому из q в соответствии с (3), то при выполнении (3)

$$\lim_{a \rightarrow \infty} y_1(z, a) = y_2(z).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Известно [6, 7], что если аксессуарный параметр q принимает одно из собственных значений, то в ряду (6) суммирование будет происходить от $m = 0$. В соответствии с (7) условие на обрыв суммирования при $m = 0$ (т. е. дисперсионное уравнение) записывается так:

$$\frac{S_0(q, a)}{R_0} = A(q, a), \quad (8)$$

где $A(q, a)$ можно представить бесконечной непрерывной дробью

$$A(q, a) = -\frac{P_1}{S_1 - R_1 \frac{P_2}{S_2 - \dots}}.$$

Известно [7], что эта дробь сходится, если корни уравнения

$$\rho^2 + 2(2a - 1)\rho + 1 = 0 \quad (9)$$

различаются по модулю. Дисперсионное уравнение является трансцендентным уравнением относительно q . При $a \rightarrow \infty$ и выполнении условий (3) уравнение (8) переходит в дисперсионное уравнение для вырожденных функций Гойна

$$\frac{S'_0(a)}{R'_0} = A'(a),$$

где $A'(a)$ – соответствующая непрерывная дробь для вырожденного уравнения. При этом вследствие равномерной по a сходимости непрерывной дроби [7] величина $A(q, a)$ переходит в $A'(a)$. Из-за непрерывности функций пределы собственных значений уравнения (1) равны собственным значениям уравнения (2).

Область сходимости ряда (6) для уравнения (1) определяется условием

$$\left| \frac{1 + Z}{1 - Z} \right| < \left| \frac{1}{\rho} \right|,$$

где $Z = \sqrt{1 - z^{-1}}$, ρ – наименьший по абсолютной величине корень уравнения (9).

При $a \rightarrow \infty$ область сходимости ряда увеличивается и стремится ко всей комплексной плоскости. Следовательно, в окрестности промежутка $(0, 1)$ имеет место равномерная сходимость ряда (6), и можно утверждать, что собственные функции уравнения Гойна стремятся к собственным функциям вырожденного уравнения Гойна.

Перейдем теперь к рассмотрению собственных функций уравнения Гойна на $(1, \infty)$. При дробно-линейном преобразовании $t = \frac{z-1}{a-1}$ уравнение Гойна перейдет само в себя, только с другими параметрами:

$$\gamma_n = \frac{\gamma}{a-1}, \quad q_n = \frac{q - \alpha\beta}{a-1}, \quad a_n = \frac{1}{1-a},$$

и с особенностями в точках $0, a_n, 1, \infty$. При этом интервал $(1, \infty)$ отобразится в интервал $(0, 1)$, т.е. можно будет воспользоваться результатами предыдущего случая. Однако вопрос о сходимости ряда теперь решается с помощью более тонких оценок, т. к.

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \frac{c_{m+1} y_{\nu_0+m+1}}{c_m y_{\nu_0+m}} = 1.$$

При этом получаем для больших номеров ν и $a \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} D_\nu &= -\nu^2 + \nu(\gamma - \alpha) + O(1), \\ F_\nu &= -\nu^2 + \nu(-\alpha - \delta) + O(1), \\ E_\nu &= 2\nu^2 + \nu(-\gamma + 2\alpha + \delta + p) + O(1), \end{aligned}$$

и, значит, при $r \rightarrow \infty$ имеем $c_r = O(\exp(\pm\sqrt{pr}))$. Знак “—” соответствует меньшему по модулю корню уравнения (8), т. е. случаю, когда q равняется одному из собственных значений. При этом $y_r = O(r^{1/4-\delta/2})$. Таким образом, ряд (6) опять оказывается равномерно (по a) сходящимся при конечных z , и можно утверждать, что собственные функции уравнения Гойна на $(1, a)$ переходят в собственные функции вырожденного уравнения Гойна на $(1, \infty)$.

Автор выражает благодарность С.Ю.Славянову за постановку задачи и ряд ценных замечаний. Статья написана при финансовой поддержке фонда Сороса (грант R5X000).

Список литературы

- [1] И.В. Комаров, Л.И. Пономарев, С.Ю. Славянов. Сфероидальные и кулоновские сфероидальные функции. М.: Наука, 1976.
- [2] S. Chandrasekhar. The Mathematical Theory of Black Holes. Oxford–New-York: Oxford University Press, 1983.
- [3] А.Я. Казаков, С.Ю. Славянов. ТМФ. 1996. Т. 107. С. 388.
- [4] А. Зеегер, В. Лай, С.Ю. Славянов. ТМФ. 1995. Т. 104. С. 233.
- [5] В. Лай. ТМФ. 1994. Т. 101. С. 360.
- [6] A. Ronveaux. Heun's differential equation. Oxford: Oxford University Press, 1995.
- [7] Г. Бейтмен, А. Эрдейи. Высшие трансцендентные функции. М.: Наука, 1967.

Поступила в редакцию 23.I.1996 г.,
после доработки 8.X.1996 г.

N. A. Veshev

DEGENERATION OF SOLUTIONS OF HEUN'S EQUATION UNDER FUSION OF SINGULARITIES

Degenerations of Heun's equation are considered. It is shown that the eigenvalues of Heun's equation get over into the ones of the degenerate equation.