Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. И. Зенчук, Некоторые обобщения двумерной цепочки Тоды и уравнения sh-Гордон, *ТМФ*, 1997, том 110, номер 2, 233–241

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf964>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.6.47.48

26 апреля 2023 г., 13:08:41

А. И. Зенчук*

НЕКОТОРЫЕ ОБОБЩЕНИЯ ДВУМЕРНОЙ ЦЕПОЧКИ ТОДЫ И УРАВНЕНИЯ sh-ГОРДОН

Изучаются дискретные преобразования решений и потенциалов скалярного дифференциального уравнения 2-го порядка с двумя независимыми переменными, вводимые оператором $D = V_1 \partial_x + V_2 \partial_y + V_3$. Рассмотрены простейшие замыкания цепочек этих преобразований. Методом обратной задачи рассеяния доказана интегрируемость получаемых нелинейных уравнений.

1. ВВЕДЕНИЕ

Вопрос построения дискретных преобразований решений и потенциалов линейных уравнений второго порядка разбирался ранее в работах [1, 2].

Объектом изучения настоящей работы является дискретное преобразование

$$\Psi^{(n+1)} = V_1^{(n)} \Psi_x^{(n)} + V_2^{(n)} \Psi_y^{(n)} + V_3^{(n)} \Psi^{(n)} \quad (1)$$

решений дифференциального уравнения второго порядка, представленного в виде

$$\Psi_{xy}^{(n)} = A^{(n)} \Psi_y^{(n)} + v^{(n)} \Psi^{(n)}. \quad (2)$$

В частности, формула (1) содержит преобразования Лапласа

$$\Psi^{(n+1)} = L_1^{(n)} \Psi^{(n)}, \quad L_1^{(n)} = \partial_x - A^{(n)}, \quad (3)$$

$$\Psi^{(n+1)} = L_2^{(n)} \Psi^{(n)}, \quad L_2^{(n)} = -\frac{1}{v^{(n)}} \partial_y \quad (4)$$

и Дарбу [1]

$$\Psi^{(n+1)} = L_3^{(n)} \Psi^{(n)}, \quad L_3^{(n)} = \partial_x - \frac{\Psi_{1x}^{(n)}}{\Psi_1^{(n)}}, \quad (5)$$

$$\Psi^{(n+1)} = L_4^{(n)} \Psi^{(n)}, \quad L_4^{(n)} = V^{(n)} \left(\partial_y - \frac{\Psi_{2y}^{(n)}}{\Psi_2^{(n)}} \right), \quad (6)$$

* Институт теоретической физики им. Л. Д. Ландау РАН

где $V^{(n)}$ — множитель, который в следующем пункте будет выражен через потенциал $A^{(n)}$; $\Psi_1^{(n)}$, $\Psi_2^{(n)}$ — частные решения уравнения (2).

Во втором пункте мы исследуем преобразование, заданное общей формулой (1). Из коммутационного соотношения (условия совместности (1), (2)) будет получена соответствующая этому преобразованию система нелинейных уравнений для потенциалов $A^{(n)}$, $v^{(n)}$, частным случаем которой является двумерная цепочка Тоды.

В третьем пункте будут рассмотрены простейшие замыкания построенной цепочки преобразований. Соответствующая система нелинейных уравнений для потенциалов содержит уравнение sh-Гордон.

В четвертом пункте мы кратко остановимся на связанной с рассматриваемой задачей $\bar{\partial}$ -проблеме.

2. ДИСКРЕТНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

Запишем исходные уравнения (1), (2) в операторном виде

$$\Psi^{(n+1)} = L^{(n)} \Psi^{(n)}, \quad (7)$$

$$K^{(n)} \Psi^{(n)} = 0, \quad (8)$$

где

$$L^{(n)} = V_1^{(n)} \partial_x + V_2^{(n)} \partial_y + V_3^{(n)}, \quad K^{(n)} = \partial_x \partial_y - A^{(n)} \partial_y - v^{(n)}. \quad (9)$$

Найдем соотношения между коэффициентами $V_i^{(n)}$ и потенциалами $A^{(n)}$, $v^{(n)}$, при которых совместна выписанная двумерная дифференциально-разностная система.

Условие совместности имеет следующий вид [3]:

$$K^{(n+1)} L^{(n)} = M^{(n)} K^{(n)},$$

где

$$M^{(n)} = \alpha_1^{(n)} \partial_x + \alpha_2^{(n)} \partial_y + \alpha_3^{(n)}.$$

Отсюда непосредственно получаются уравнения для коэффициентов $V_i^{(n)}$:

$$V_{1y}^{(n)} = 0, \quad V_{2x}^{(n)} + V_2^{(n)} (A^{(n)} - A^{(n+1)}) = 0, \quad V_1^{(n)} (v^{(n)} - v^{(n+1)}) + V_{3y}^{(n)} = 0, \quad (10)$$

и уравнения, связывающие потенциалы:

$$\begin{aligned} & (A^{(n)} - A^{(n+1)}) (V_1^{(n)} A^{(n)} + V_3^{(n)}) + \\ & + (V_1^{(n)} A^{(n)})_x + V_{3x}^{(n)} + V_2^{(n)} (A_y^{(n+1)} - v^{(n+1)} + v^{(n)}) = 0, \\ & V_1^{(n)} (v^{(n)} A^{(n)} - v^{(n+1)} A^{(n+1)}) + \\ & + V_3^{(n)} (v^{(n)} - v^{(n+1)}) + (V_2^{(n)} v^{(n)})_y + (V_1^{(n)} v^{(n+1)})_x = 0. \end{aligned} \quad (11)$$

При этом

$$\alpha_1^{(n)} = V_1^{(n)}, \quad \alpha_2^{(n)} = V_2^{(n)}, \quad \alpha_3^{(n)} = V_{2y}^{(n)} + V_1^{(n)} (A^{(n)} - A^{(n+1)}) + V_3^{(n)} + V_{1x}^{(n)}.$$

Формулы (10), (11) – это общая система нелинейных дифференциально-разностных уравнений, интегрируемая с помощью тройки операторов $L^{(n)}$, $K^{(n)}$, $M^{(n)}$.

Интегрируя уравнения (10), будем полагать все появляющиеся произвольные функции константами. Тогда (11) будет системой уравнений с постоянными коэффициентами. Вводя функции $\varphi^{(n)}$ и $\chi^{(n)}$

$$A^{(n)} = \varphi_x^{(n)}, \quad v^{(n)} = \chi_y^{(n)}$$

вместо потенциалов $A^{(n)}$ и $v^{(n)}$, получим окончательно

$$\begin{aligned} & a_1^{(n)} \left(\partial_x (\varphi_x^{(n)} + \chi^{(n+1)} - \chi^{(n)}) + (\varphi_x^{(n)} - \varphi_x^{(n+1)}) (\varphi_x^{(n)} + \chi^{(n+1)} - \chi^{(n)}) \right) + \\ & + a_2^{(n)} (\varphi_{xy}^{(n+1)} - \chi_y^{(n+1)} + \chi_y^{(n)}) e^{\varphi^{(n+1)} - \varphi^{(n)}} + a_3^{(n)} (\varphi_x^{(n)} - \varphi_x^{(n+1)}) = 0, \\ & a_1^{(n)} \left(\chi_y^{(n)} \varphi_x^{(n)} - \chi_y^{(n+1)} \varphi_x^{(n+1)} + \chi_{xy}^{(n+1)} - (\chi^{(n)} - \chi^{(n+1)}) (\chi_y^{(n)} - \chi_y^{(n+1)}) \right) + \\ & + a_2^{(n)} \partial_y (\chi_y^{(n)} e^{\varphi^{(n+1)} - \varphi^{(n)}}) + a_3^{(n)} (\chi_y^{(n)} - \chi_y^{(n+1)}) = 0. \end{aligned} \quad (12)$$

При этом

$$\begin{aligned} V_1^{(n)} &= a_1^{(n)}, \quad V_2^{(n)} = a_2^{(n)} e^{\varphi^{(n+1)} - \varphi^{(n)}}, \quad V_3^{(n)} = a_1^{(n)} (\chi^{(n+1)} - \chi^{(n)}) + a_3^{(n)}, \\ \alpha_1^{(n)} &= a_1^{(n)}, \quad \alpha_2^{(n)} = V_2^{(n)}, \\ \alpha_3^{(n)} &= a_1^{(n)} \left(\varphi_x^{(n)} - \varphi_x^{(n+1)} + \chi^{(n+1)} - \chi^{(n)} \right) + a_2^{(n)} \left(e^{\varphi^{(n+1)} - \varphi^{(n)}} \right)_y + a_1^{(n)} a_3^{(n)}, \end{aligned}$$

где $a_i^{(n)}$ – произвольные комплексные постоянные.

Таким образом, построено дискретное преобразование $(\varphi^{(n)}, \chi^{(n)}) \xrightarrow{L^{(n)}} (\varphi^{(n+1)}, \chi^{(n+1)})$ и, следовательно, цепочка преобразований

$$(\varphi^{(1)}, \chi^{(1)}) \xrightarrow{L^{(1)}} (\varphi^{(2)}, \chi^{(2)}) \xrightarrow{L^{(2)}} \dots \xrightarrow{L^{(n-1)}} (\varphi^{(n)}, \chi^{(n)}) \xrightarrow{L^{(n)}} (\varphi^{(n+1)}, \chi^{(n+1)}) \xrightarrow{L^{(n+1)}} \dots$$

Система уравнений (12) является обобщением двумерной цепочки Тоды. Мы выделим две простейшие ее деформации в качестве частных случаев этой системы.

ПРИМЕР 1. Пусть $a_1^{(n)} = 1$, $a_2^{(n)} = 0$. Тогда

$$L^{(n)} = \partial_x + \chi^{(n+1)} - \chi^{(n)} + a_3^{(n)}, \quad M^{(n)} = \partial_x + \varphi_x^{(n)} - \varphi_x^{(n+1)} + \chi^{(n+1)} - \chi^{(n)} + a_3^{(n)},$$

и из (12) имеем

$$\begin{aligned} \varphi_{xy}^{(n)} - v^{(n)} + v^{(n+1)} &= a^{(n)} \partial_y e^{\varphi^{(n+1)} - \varphi^{(n)}}, \\ -\partial_x \ln(v^{(n+1)}) + \varphi_x^{(n+1)} - \varphi_x^{(n)} &= a^{(n)} \left(\frac{v^{(n)}}{v^{(n+1)}} - 1 \right) e^{\varphi^{(n+1)} - \varphi^{(n)}}, \end{aligned} \quad (13)$$

где $a^{(n)}$ – константа интегрирования.

ПРИМЕР 2. Пусть $a_1^{(n)} = 0$, $a_2^{(n)} = -1$. Тогда

$$L^{(n)} = -e^{\varphi^{(n+1)} - \varphi^{(n)}} \partial_y + a_3, \quad M^{(n)} = -e^{\varphi^{(n+1)} - \varphi^{(n)}} \partial_y - \left(e^{\varphi^{(n+1)} - \varphi^{(n)}} \right)_y,$$

и (12) редуцируется в систему, аналогичную предыдущей с точностью до переобозначений $x \leftrightarrow y$, $(n+1) \leftrightarrow (n)$, $a^{(n)} \rightarrow a_3^{(n)}$.

Отметим, что первый пример при $a^{(n)} \neq 0$ соответствует преобразованию (5), в котором $\frac{\Psi_{1x}^{(n)}}{\Psi^{(n)}} = \chi^{(n)} - \chi^{(n+1)} - a_3^{(n)}$, а второй (при $a_3^{(n)} \neq 0$) – преобразованию (6), где $\frac{\Psi_{2y}^{(n)}}{\Psi^{(n)}} = a_3^{(n)} e^{\varphi^{(n)} - \varphi^{(n+1)}}$, $V^{(n)} = -e^{\varphi^{(n+1)} - \varphi^{(n)}}$.

Если $a^{(n)} = a_3^{(n)} = 0$, то обе системы сводятся к двумерной цепочке Тоды. При этом оператор $L^{(n)}$ совпадает с $L_1^{(n)}$ (см. (3)) в первом примере и с $L_2^{(n)}$ (см. (4)) во втором.

3. ЗАМКНУТЫЕ ЦЕПОЧКИ ДИСКРЕТНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

Рассмотрим замыкание построенной во втором пункте цепочки преобразований

$$\varphi^{(i+k)} = \varphi^{(i)}, \quad \chi^{(i+k)} = \chi^{(i)}, \quad k > 1. \quad (14)$$

Такая цепочка содержит k звеньев, что можно представить следующей схемой:

$$(\varphi^{(1)}, \chi^{(1)}) \xrightarrow{L^{(1)}} (\varphi^{(2)}, \chi^{(2)}) \xrightarrow{L^{(2)}} \dots \xrightarrow{L^{(k-1)}} (\varphi^{(k)}, \chi^{(k)}) \xrightarrow{L^{(k)}} (\varphi^{(1)}, \chi^{(1)}) \xrightarrow{L^{(1)}} \dots$$

В этом случае, записывая для каждой пары $\varphi^{(i)}, \chi^{(i)}$, $i = 1, \dots, k$, систему нелинейных уравнений (12), получим $(1+1)$ -мерную систему дифференциальных уравнений на $2k$ функций

$$\begin{aligned} \Theta_1^{(i)}(\varphi^{(1)}, \chi^{(1)}; \dots; \varphi^{(k)}, \chi^{(k)}) &= 0, \\ \Theta_2^{(i)}(\varphi^{(1)}, \chi^{(1)}; \dots; \varphi^{(k)}, \chi^{(k)}) &= 0, \quad i = 1, \dots, k. \end{aligned} \quad (15)$$

Рассмотрим простейшее нетривиальное замыкание ($k = 2$). В качестве элементарных преобразований выберем следующие:

$$L^{(1)} = \partial_x + \chi^{(2)} - \chi^{(1)}, \quad L^{(2)} = \partial_x - A^{(2)}.$$

Для первого преобразования система (13) примет вид

$$\begin{aligned} \varphi_{xy}^{(1)} - v^{(1)} + v^{(2)} &= a \partial_y e^{\varphi^{(2)} - \varphi^{(1)}}, \\ -\partial_x \ln(v^{(2)}) + \varphi_x^{(2)} - \varphi_x^{(1)} &= a \left(\frac{v^{(1)}}{v^{(2)}} - 1 \right) e^{\varphi^{(2)} - \varphi^{(1)}}, \end{aligned}$$

а для проведенного последовательно второго преобразования (с учетом замыкания $\chi^{(3)} = \chi^{(1)}$, $\varphi^{(3)} = \varphi^{(1)}$) имеем

$$\begin{aligned} \varphi_{xy}^{(2)} - v^{(2)} + v^{(1)} &= 0, \\ -\partial_x \ln(v^{(1)}) + \varphi_x^{(1)} - \varphi_x^{(2)} &= 0. \end{aligned}$$

Выписанная система четырех уравнений легко сводится к уравнению

$$\frac{1}{2}\xi_{xy} - e^\xi - C_1 e^{-\xi} + C_2 e^{-\xi} \partial_x^{-1} (e^{-\xi})_y = 0, \quad (16)$$

где $v^{(1)} = e^\xi$, $C_2 = (aC)^2/2$ и C_1, C – константы интегрирования. Если $C_2 = 0$, $C_1 = -1$, то (16) превращается в уравнение sh-Гордона.

В общем случае, когда оба оператора $L^{(1)}$, $L^{(2)}$ имеют вид (9), исключить из системы (15) “промежуточные потенциалы” $\varphi^{(2)}$, $\chi^{(2)}$ довольно сложно. Однако можно получить систему нелинейных уравнений для замкнутой цепочки, содержащую только “конечные потенциалы” $\varphi^{(1)} = \varphi$, $\chi^{(1)} = \chi$, поступая следующим образом (как и раньше, $k = 2$).

Двухшаговое дискретное преобразование описывается оператором $L_0^{(n+2)} = L^{(n+1)} L^{(n)}$, который представим в виде

$$L^{(n+2)} = W_1^{(n)} \partial_x \partial_x + W_2^{(n)} \partial_y \partial_y + W_3^{(n)} \partial_x + W_4^{(n)} \partial_y + W_5^{(n)},$$

где $W_i^{(n)}$ выражается через $V_i^{(n+1)}$, $V_i^{(n)}$. Теперь вместо (7), (8) имеем

$$\Psi^{(n+2)} = L_0^{(n+2)} \Psi^{(n)}, \quad (17)$$

$$K^{(n)} \Psi^{(n)} = 0. \quad (18)$$

Далее, можно подставить $\Psi^{(n+2)}$ из (17) в (18) (с индексом $n + 2$), провести алгебраические преобразования и замыкание (14). В результате получим интересующую нас нелинейную систему уравнений на потенциалы φ и χ , частным случаем которой является уравнение (16). Мы не будем проводить эти преобразования. Вместо этого выведем ту же систему как условие совместности переопределенной системы линейных уравнений, доказав тем самым ее интегрируемость методом обратной задачи рассеяния.

Чтобы получить искомую линейную систему, перейдем в (17), (18) к функции $\psi^{(n)} = \Psi^{(n)} / \lambda^{n/2}$ и положим $\psi^{(n+2)} = \psi^{(n)} = \Psi$. Тогда, опуская индексы, получим

$$\lambda \Psi = L_0 \Psi, \quad (19)$$

$$K \Psi = 0.$$

Выписанная система представляет самостоятельный интерес и может рассматриваться независимо от дискретных преобразований. Займемся ее исследованием.

Прежде всего введем функции

$$\Psi_1 = \Psi, \quad \Psi_2 = \Psi_x, \quad \Psi_3 = \Psi_y, \quad \Psi_4 = \Psi_{yy} \quad (20)$$

и перепишем (19) в матричной форме

$$\Phi_x = U \Phi, \quad \Phi_y = V \Phi, \quad (21)$$

где

$$\begin{aligned} \Phi &= (\Psi_1, \Psi_2, \Psi_3, \Psi_4)^T, \quad U = U_0 + \lambda U_1, \quad V = V_0 + \lambda V_1, \\ U_0 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{W_5}{W_1} & -\frac{W_3}{W_1} & -\frac{W_4}{W_1} & -\frac{W_2}{W_1} \\ v & 0 & A & 0 \\ v_y & 0 & A_y + v & A \end{pmatrix}, \quad U_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{W_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ V_0 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ v & 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{R_1}{W_1 W_2} & \frac{R_2}{W_1 W_2} & \frac{R_3}{W_1 W_2} & \frac{R_4}{W_1 W_2} \end{pmatrix}, \quad V_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{W_{1y}}{W_1 W_2} & 0 & \frac{1}{W_2} & 0 \end{pmatrix}, \\ R_1 &= -v_x W_1^2 + W_{1y} W_5 - W_{5y} W_1 - A v W_1^2 - v W_1 W_3, \\ R_2 &= W_{1y} W_3 - W_{3y} W_1 - v W_1^2, \\ R_3 &= -A_x W_1^2 + W_{1y} W_4 - W_{4y} W_1 - A^2 W_1^2 - A W_1 W_3 - W_1 W_5, \\ R_4 &= W_{1y} W_2 - W_{2y} W_1 - W_1 W_4. \end{aligned}$$

Запишем представление нулевой кривизны для системы (21)

$$U_y - V_x + [U, V] = 0. \quad (22)$$

Из этого соотношения следуют выражения для коэффициентов W_i

$$W_{1y} = 0, \quad W_{2x} = 0, \quad W_{3y} = 0, \quad W_{4x} = -2A_y W_2, \quad W_{5y} = -2v_x W_1 - W_{1x} v \quad (23)$$

и система уравнений, связывающая потенциалы,

$$\begin{aligned} ((A_x + A^2)W_1 + A W_3 + W_5)_x + ((v - A_y)W_2)_y + v_y W_2 + A_y W_4 &= 0, \\ (2A v W_1 - (v W_1)_x + v W_3)_x + (v_y W_2 + v W_4)_y &= 0. \end{aligned} \quad (24)$$

Формулы (23), (24) представляют общую систему нелинейных дифференциальных уравнений, интегрируемую с помощью линейной задачи (19).

Уравнения (23) легко интегрируются. При этом появляются произвольные функции от x и y . Считая их константами, получим для W_i следующие выражения ($A = \varphi_x$, $v = \chi_y$):

$$W_1 = c_1, \quad W_2 = c_2, \quad W_3 = c_3, \quad W_4 = c_4 - 2c_2 \varphi_y, \quad W_5 = c_5 - 2c_1 \chi_x.$$

Тогда (24) будет системой нелинейных уравнений с постоянными коэффициентами:

$$\begin{aligned} c_1(\varphi_{xxx} + 2\varphi_x \varphi_{xx} - 2\chi_{xx}) + c_2(-\varphi_{xyy} - 2\varphi_y \varphi_{xy} + 2\chi_{yy}) + c_3 \varphi_{xx} + c_4 \varphi_{xy} &= 0, \\ (c_1 \partial_x \chi_y \partial_x - c_2 \partial_y \chi_y \partial_y)(2\varphi - \ln \chi_y) + c_3 \chi_{xy} + c_4 \chi_{yy} &= 0. \end{aligned} \quad (25)$$

При этом

$$\begin{aligned} R_1 &= c_1^2(\chi_{xy} - \varphi_x \chi_y) - c_1 c_3 \chi_y, & R_2 &= -c_1^2 \chi_y, \\ R_3 &= c_1^2(2\chi_x - \varphi_{xx} - \varphi_x^2) + 2c_1 c_2 \varphi_{yy} - c_1 c_3 \varphi_x - c_1 c_5, \\ R_4 &= -c_1(c_4 - 2c_2 \varphi_y). \end{aligned}$$

Тот же результат можно получить, если вместо (20) использовать следующие функции: $\Psi_1 = \Psi$, $\Psi_2 = \Psi_x$, $\Psi_3 = \Psi_y$, $\Psi_4 = \Psi_{xx}$.

Недостаток матричной формулировки (21) в том, что некоторые элементы матриц U , V содержат коэффициенты W_1 , W_2 в знаменателе. Поэтому частные случаи системы (19) с $W_1 = 0$ или $W_2 = 0$ требуют особого рассмотрения.

Разберем один из них. Пусть $W_1 = 1$, $W_2 = W_3 = W_4 = 0$, $W_5 = -2\chi_x$. В этом случае вместо набора функций (20) нужно использовать одну из пар (Ψ_1, Ψ_2) или (Ψ_1, Ψ_3) . Для определенности возьмем первую. Тогда матричная запись уравнений (19) будет иметь вид (21), где

$$\begin{aligned} \Phi &= (\Psi_1, \Psi_2)^T, & U &= U_0 + \lambda U_1, \\ V &= (\varphi_x^2 + \varphi_{xx} - 2\chi_x - \lambda)^{-1} W, & W &= W_0 + \lambda W_1, \\ U_0 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2\chi_x & 0 \end{pmatrix}, & U_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \\ W_0 &= \begin{pmatrix} \chi_{xy} - \varphi_x \chi_y & -\chi_y \\ (\varphi_x \chi_y)_x - 2\chi_x \chi_y & -\varphi_x \chi_y \end{pmatrix}, & W_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -\chi_y & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

В этом случае условие нулевой кривизны (22) сводится к системе (25), где $c_1 = 1$, $c_i = 0$, $i \neq 1$. Из нее легко получить уравнение (16), в котором C_1 и C_2 — произвольные константы интегрирования.

4. ДОПОЛНЕНИЕ

Здесь мы коснемся вопроса о факторизации оператора $L^{(n)}$ вида (9). Для этого удобно привлечь $\bar{\partial}$ -проблему. Мы не будем приводить ее общую формулировку, поскольку она дана в ряде работ [4–7]. Здесь укажем соответствующий нашей задаче способ введения непрерывных и дискретных параметров.

Необходимо использовать решение, нормированное на бесконечности ($\lambda \rightarrow \infty$). Непрерывные параметры x , y введем с помощью операторов

$$D_x = \partial_x + \lambda, \quad D_y = \partial_y + \frac{1}{\lambda},$$

дискретный параметр n — с помощью оператора $\Omega^{(n)}$

$$\Omega^{(n)} = \prod_{i=1}^N (\lambda + a_i^{(n)}) \prod_{j=1}^M \frac{1}{\lambda + b_j^{(n)}}.$$

Все нелинейные уравнения, полученные в статье, можно вывести стандартным способом [4–7] из $\bar{\partial}$ -проблемы. На этом вопросе мы не будем останавливаться, укажем только соответствие между операторами $\Omega^{(n)}$ и $L^{(n)}$:

$$\begin{aligned}\Omega_1^{(n)} &= \lambda \leftrightarrow L_1^{(n)} = \partial_x - A^{(n)}; \\ \Omega_2^{(n)} &= \frac{1}{\lambda} \leftrightarrow L_2^{(n)} = -\frac{1}{v^{(n)}} \partial_y; \\ \Omega_3^{(n)} &= \lambda + a^{(n)} \leftrightarrow L_3^{(n)} = \partial_x + \chi^{(n+1)} - \chi^{(n)} + a^{(n)},\end{aligned}$$

где $a^{(n)}$ совпадает с константой интегрирования в формуле (13);

$$\Omega_4^{(n)} = a_1^{(n)} \lambda + \frac{a_2^{(n)}}{\lambda} + a_3^{(n)} \leftrightarrow L_4^{(n)} = V_1^{(n)} \partial_x + V_2^{(n)} \partial_y + V_3^{(n)},$$

где $a_i^{(n)}$ совпадают с константами в формулах (12).

Поскольку в последнем случае $\Omega_4^{(n)}$ можно представить в виде

$$\Omega_4^{(n)} = \frac{a_1^{(n)}}{\lambda} (\lambda - c_1^{(n)}) (\lambda - c_2^{(n)}), \quad a_1^{(n)} \neq 0,$$

где $c_i^{(n)}$ – корни квадратного уравнения $\lambda^2 + \frac{a_2^{(n)}}{a_1^{(n)}} \lambda + \frac{a_3^{(n)}}{a_1^{(n)}} = 0$, то соответствующий оператор $L_4^{(n)}$ допускает факторизацию

$$L_4^{(n+3)} = a_1^{(n)} L_2^{(n+2)} L_3^{(n+1)} L_3^{(n)}.$$

Вообще любой оператор

$$L^{(n)} = \sum_{i>0} V_{0i}^{(n)} \partial_x^i + \sum_{j>0} V_{j0}^{(n)} \partial_y^j + V_{00}^{(n)}$$

является суперпозицией операторов $L_1^{(n)}$, $L_2^{(n)}$, $L_3^{(n)}$.

Кроме того, поскольку все элементарные преобразования $\Omega^{(i)}$ коммутируют между собой, то для замкнутых цепочек дискретных преобразований можно построить ряд решений, связанных посредством одного или нескольких элементарных преобразований.

Автор выражает благодарность С. В. Манакову за полезные обсуждения.

Работа поддержана грантом РФФИ (94-01-00899), Международной соросовской программой образования в области точных наук (грант а226-ф), а также фондом Л. Д. Ландау Юлиховского исследовательского центра.

Список литературы

- [1] *G. Darboux*. Théorie generale des surfaces. New York: Chelsea, 1972.
- [2] *А. Б. Шабат*. ТМФ. 1995. Т. 103. № 3. С. 170.
- [3] *С. В. Манаков*. УМН. 1976. Т. 31. С. 245.
- [4] *В. Е. Захаров, С. В. Манаков*. Функц. анализ и его прилож. 1985. Т. 19. № 2. С. 11.
- [5] *L. V. Bogdanov, S. V. Manakov*. J. Phys. A: Math. Gen. 1988. V. 21. P. L537.
- [6] *А. И. Зенчук, С. В. Манаков*. ТМФ. 1995. Т. 105. № 3. С. 371.
- [7] *B. G. Konopelchenko*. Solitons in Multidimensions. World Scientific, 1993.

Поступила в редакцию 19.VI.1996 г.

A. I. Zenchuk

**SOME GENERALIZATIONS OF THE 2-DIMENSIONAL
TODA CHAIN AND sh-GORDON EQUATION**

We study the discrete transformations of the solutions and potentials of the second order partial differential equation with two independent variables. These transformations are introduced by the formula $D = V_1 \partial_x + V_2 \partial_y + V_3$. The simplest closed chains of these transformations are considered. The integrability of the derived nonlinear equations by the IST-method is proved.