Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. Н. Иванычев, Г. М. Фрайман, Образование солитонных пар в нелинейных средах с малой диссипацией, *ТМФ*, 1997, том 110, номер 2, 254–271

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf966>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.80.181.102

26 апреля 2023 г., 07:22:56

Д. Н. Иваницhev*, Г. М. Фрайман*

ОБРАЗОВАНИЕ СОЛИТОННЫХ ПАР В НЕЛИНЕЙНЫХ СРЕДАХ С МАЛОЙ ДИССИПАЦИЕЙ

Изучается процесс слабого взаимодействия двух солитонов КдВ при наличии малой вязкости. Предложена модель описания такого взаимодействия в терминах медленного изменения параметров точного двухсолитонного решения уравнения КдВ под действием возмущений. Показано, что и метод обратной задачи рассеяния, и метод Уизема приводят к одинаковой системе укороченных уравнений. Полученные решения хорошо согласуются с результатами численных расчетов. Основной результат заключается в образовании связанной квазистационарной пары солитонов с последующей ее диссипацией. Причем, хотя и процесс слияния, и процесс диссипации обусловлены слабой вязкостью, оказывается, что процесс слияния является существенно более быстрым.

1. ВВЕДЕНИЕ

Один из ключевых вопросов, возникающих при анализе задач, описываемых нелинейными уравнениями в частных производных, близких к интегрируемым, заключается в развитии теории возмущений для исследования взаимодействия солитонов в таких системах. К настоящему времени сравнительно детально развиты методы исследования таких взаимодействий для уединенных солитонов [1], основанные на полученных тем или иным способом “укороченных” уравнениях для их параметров (скорость, координата центра и т.д.). Асимптотические методы теории возмущений многовариантны, но, как правило, базируются на предположении об устойчивости солитонов при рассмотрении “слабых” возмущений. При этом наибольшее распространение из-за своей простоты получил метод, предложенный Уиземом [2] (в литературе часто называется вариационным методом). Суть его состоит в следующем. При исследовании динамики системы со слабо изменяющимися во времени параметрами следует использовать вариационный принцип для невозмущенной задачи, обобщенный на случай слабого возмущения:

$$\delta S = \delta' Q, \quad (1.1)$$

где $S \equiv \int_{-\infty}^t L dt$, L — функция Лагранжа невозмущенной задачи, Q — диссипативная функция, зависящая от параметров невозмущенной системы. Приравняв коэффициенты при независимых вариациях параметров, получаем систему дифференциальных уравнений, определяющую слабую по константе малости возмущения зависимость параметров системы от времени.

* Институт прикладной физики РАН

Основная проблема этого подхода состоит в отсутствии строгих критериев сходимости рядов теории возмущений. Для односолитонных задач законность применения вариационного подхода для задач, близких к интегрируемым, была продемонстрирована доказательством, что уравнения, следующие из него в первом порядке теории возмущений, совпадают с аналогичными уравнениями, полученными более строгим методом обратной задачи рассеяния (ОЗР). Однако, как будет показано в данной работе, уже для задач о парных взаимодействиях солитонов в системах, близких к интегрируемым, применение вариационного подхода сталкивается с определенными трудностями. Мы продемонстрируем это на примере уравнений, связанных с уравнением Кортевега–де Вриза (КдВ).

Хорошо известно, что уравнение КдВ

$$u_t + cu_x + uu_x + \beta u_{xxx} = 0 \quad (1.2)$$

описывает широкий класс нелинейных волновых процессов. Природа этой универсальности обусловлена тем, что уравнение КдВ является обобщением известного линейного волнового уравнения

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 \quad (1.3)$$

для волн, распространяющихся в одном направлении, если учесть наличие в среде слабой дисперсии и нелинейности. В работах [3, 4] показано, что уравнение КдВ имеет место для некоторых видов слабонелинейных дисперсионных систем, а уравнение Бюргерса

$$u_t + cu_x + uu_x = \mu u_{xx} \quad (1.4)$$

возникает при учете диссипации среды. Таким образом, учет эффектов диссипации и нелинейности среды приводит нас к уравнению Бюргерса–Кортевега–де Вриза (БКдВ)

$$u_t + cu_x + uu_x + u_{xxx} = \mu u_{xx}. \quad (1.5)$$

Линейной заменой переменных от уравнения (1.2) мы можем перейти к следующей стандартной записи:

$$u_t - 6uu_x + u_{xxx} = 0. \quad (1.6)$$

Удобство этой записи в том, что численные коэффициенты, возникающие при интегрировании в такой его форме, оказываются наиболее простыми (см. ниже). Процессы, происходящие в рамках данной физической модели, хорошо изучены в ряде работ (см., например, [5, 6]). Возмущение, созданное в начальный момент времени, имеет тенденцию к дроблению на локальные образования – солитоны, сохраняющие свою форму во времени и в результате взаимодействия с другими солитонами. Если наложить на начальное распределение $u(x, 0)$ ограничение $u(x, 0) < 0, \forall x$, то в процессе эволюции всегда возникает хотя бы один солитон. Если же при этом отношение нелинейности среды к ее дисперсии велико, то образуется много солитонов, которые вносят основной вклад во всю бесконечную серию законов сохранения уравнения КдВ, а вкладом в них осциллирующих несолитонных “хвостов” можно пренебречь [5]. В рамках последнего ограничения поле $u(x, t)$ может быть описано на языке квазичастиц. Если удастся для такой системы частиц записать функцию Лагранжа, то, проинтегрировав соответствующие уравнения Эйлера, мы будем знать местоположение солитонов в произвольный момент времени, т.е. опишем динамику поля на языке солитонов. Идея построения

Рис. 1. Связанная солитонная пара.

функции Лагранжа многосолитонной задачи, основанная на представлении решения в виде суперпозиции простых КдВ-солитонов с медленно изменяющимися параметрами и соответствующей теории возмущений, была предложена в [7]. В этой работе рассматриваются парные взаимодействия близкоскоростных солитонов, т.к. известно, что в этом случае центры (максимумы поля) наблюдаемых образований расположены не ближе чем на логарифмически большом по параметру $v_2 - v_1$ расстоянии друг от друга, и их с большой степенью точности можно аппроксимировать точными односолитонными решениями уравнения КдВ (1.6), которые выглядят следующим образом:

$$u_{s_j}(x, t) = \frac{-2\kappa_j^2}{\operatorname{ch}^2 \kappa_j(x - \xi_j(t))}, \quad \xi = -4\kappa_j^2 t. \quad (1.7)$$

В полученной модели авторы обнаружили, что солитоны в результате взаимодействия “расталкиваются” и обмениваются первоначальными импульсами друг с другом. Оказалось, что в рамках такого представления результаты асимптотически хорошо согласуются с точным решением задачи. А именно, относительные смещения солитонов до и после столкновения совпадают со сдвигами, полученными методом обратной задачи рассеяния в главном порядке теории возмущений по малому параметру задачи. Недостатком такого подхода является то, что он учитывает экспоненциально слабые взаимодействия, а это требует особого внимания при определении условий его применимости (подробнее этот вопрос будет рассмотрен ниже при обсуждении результатов).

Мотивом для написания данной работы послужили результаты численных экспериментов по столкновению двух КдВ-солитонов в модели вязкой среды, описываемой уравнением БКдВ

$$u_t - 6uu_x + u_{xxx} = \mu u_{xx}. \quad (1.8)$$

Мы обнаружили, что даже при слабых вязкостях ($\mu \lesssim \kappa_2 - \kappa_1 \ll \kappa_{1,2}$, где $4\kappa_{1,2}^2$ — скорости солитонов) вязкий член будет, увеличиваясь по модулю в области взаимодействия солитонов из-за увеличения градиента скорости, способствовать релаксации их относительного движения. В этом случае должна образовываться связанная пара солитонов. Этот эффект был обнаружен в численном эксперименте: $\kappa_1 = 0.5$, $\kappa_2 = 0.6$, $\mu = 0.05$. При таких же начальных κ_1 и κ_2 , но меньшей вязкости $\mu = 0.001$ слипания уже нет и солитоны, провзаимодействовав, расходятся. При более сильной вязкости слипание наблюдается всегда. Слипающиеся солитоны во всех случаях образуют одинаковое по форме несимметричное двугорбое образование с большим передним горбом (рис. 1, где $H = 12.8818$, $t = 390$), оставляя сзади слабый хвост. Время слипания оказывается много меньше времени затухания пакета в целом, поэтому есть смысл говорить о связанных солитонах в рамках модели уравнения БКдВ.

Анализ системы из двух солитонов (1.7) в рамках вариационного подхода показывает, что связывание отсутствует. Поэтому возникает необходимость рассматривать в качестве затравочного решения в теории возмущений точную форму двухсолитонного решения уравнения КдВ.

В работе [8] развита теория возмущений для солитонов КдВ. В этой же работе в качестве примера получена система укороченных уравнений для двух параметров односолитонного решения уравнения КдВ.

В данной работе проанализирована динамика аналогично введенных параметров точного двухсолитонного решения уравнения КдВ под действием слабого возмущения:

$$u_s = \frac{-2(\kappa_2^2 - \kappa_1^2)}{(\kappa_2 \operatorname{cth} \kappa_2(x - \xi_2) - \kappa_1 \operatorname{th} \kappa_1(x - \xi_1))^2} \times \\ \times \left(\frac{\kappa_1^2}{\operatorname{ch}^2 \kappa_1(x - \xi_1)} + \frac{\kappa_2^2}{\operatorname{sh}^2 \kappa_2(x - \xi_2)} \right), \quad (1.9)$$

где $\xi_{1,2} = 4\kappa_{1,2}^2 t$, $\kappa_2 > \kappa_1$. В результате получена система четырех дифференциальных уравнений первого порядка, определяющая зависимость от времени параметров $\kappa_{1,2}$ (их смысл раскрыт выше) и $\xi_{1,2}$ (обобщенные координаты солитонов). Точно такая же система уравнений была получена нами в рамках вариационного подхода [2], что говорит о законности его применения для солитонов КдВ (тест-функция). Система дифференциальных уравнений после некоторых упрощений, связанных с предположением о близости солитонных скоростей, сводится к системе двух линейных дифференциальных уравнений, описывающих быстрый процесс образования солитонной пары, наблюдаемый и в численном эксперименте.

2. АДИАБАТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ВОЗМУЩЕНИЙ ДЛЯ ДВУХСОЛИТОННОГО РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ КдВ

2.1. Метод ОЗР. В этой части мы, воспользовавшись работой [8], обобщим теорию возмущений, развитую для чистого двухсолитонного решения уравнения КдВ (1.9) на уравнение КдВ со слабым возмущающим членом в правой части:

$$u_t - 6uu_x + u_{xxx} = \varepsilon R[u]. \quad (2.1)$$

Под слабостью возмущения будем понимать то, что член в правой части уравнения остается много меньше остальных членов уравнения для всех значений x . В этом случае оказывается возможным построить теорию возмущений для анализа динамики системы из двух солитонов. В нулевом приближении возмущение можно не учитывать, и мы сразу же получаем решение u_s с фиксированными параметрами κ_1 и κ_2 , а также параметрами ξ_1 и ξ_2 , изменяющимися во времени по закону $\xi_{1,2} = 4\kappa_{1,2}^2 t + x_{1,2}^0$, $x_{1,2}^0 = \text{const}$. В следующем порядке теории возмущений законы, определяющие динамику выбранных четырех параметров, будут уточнены, и если возмущение достаточно слабое (параметры солитона слабо меняются за время прохождения солитоном своей ширины), то этим порядком можно ограничиться.

Как известно, уравнение КдВ (1.6) является условием совместности следующей системы линейных дифференциальных уравнений:

$$\hat{L}\psi = \lambda\psi, \quad \hat{L} = -\frac{\partial^2}{\partial x^2} + u(x, t), \quad (2.2)$$

$$\psi_t = \hat{A}\psi, \quad \hat{A} = -4\frac{\partial^3}{\partial x^3} + 6u\frac{\partial}{\partial x} + 3u_x. \quad (2.3)$$

При этом дискретные собственные значения уравнения Шредингера (2.2) $-\kappa_1^2$ и $-\kappa_2^2$ не зависят от времени.

Возмущенное уравнение (2.1) в терминах операторов $\hat{L}$ и $\hat{A}$ записывается в виде

$$\hat{L}_t + [\hat{L}, \hat{A}] = \varepsilon R[u]. \quad (2.4)$$

В этом случае для оператора $\hat{L}$ также имеем уравнение Шредингера (2.2), но т.к. теперь $u(x, t)$ не удовлетворяет уравнению КдВ (1.6), то $-\kappa_{1,2}^2$ уже будут функциями времени t .

Рассмотрим задачу на собственные значения оператора $\hat{L}^+$, эрмитово сопряженного к оператору $\hat{L}$ по отношению к скалярному произведению $(\psi, \phi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi^* \phi dx$:

$$\hat{L}^+ \tilde{\psi} = \lambda^* \tilde{\psi}. \quad (2.5)$$

Допустим, что существует общее решение задачи (2.5) $\tilde{\psi}(x, k; \lambda)$. Предположим также, что $(\psi, \tilde{\psi}) \neq 0$. Умножим уравнение (2.4) скалярно слева на $\tilde{\psi}$ и воспользуемся определением сопряженного оператора $(\hat{L}\psi, \tilde{\psi}) = (\psi, \hat{L}^+ \tilde{\psi})$, получим

$$\lambda_t = \varepsilon \frac{(\tilde{\psi}, R[u_s]\psi)}{(\tilde{\psi}, \psi)}. \quad (2.6)$$

Заметим, что при $\varepsilon = 0$ уравнение (2.6) дает результат невозмущенного случая $\frac{\partial}{\partial t} \kappa_{1,2}^2 = 0$. Оператор $\hat{L}$, как нетрудно заметить, эрмитов, т.е. $\hat{L} = \hat{L}^+$. В качестве ψ и $\tilde{\psi}$ в (2.6) можно взять функции Йоста задачи рассеяния для уравнения Шредингера (2.2) с $\lambda = k^2$: $f(x, k; t)$ и $g(x, k; t)$.

Подставив функции Йоста в (2.6) и взяв $\lambda = -\kappa_{1,2}^2$, получим

$$\dot{\kappa}_{1,2} = -\frac{\varepsilon}{2\kappa_{1,2}} \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} f(x, i\kappa_{1,2}; t) R[u_s] g(x, i\kappa_{1,2}; t) dx}{\int_{-\infty}^{+\infty} f(x, i\kappa_{1,2}; t) g(x, i\kappa_{1,2}; t) dx}. \quad (2.7)$$

Для того чтобы описывать поведение системы двух солитонов, уравнений (2.7) недостаточно. Нужны еще уравнения на $\xi_{1,2}$.

Приведем соотношения для функций Йоста (подробнее смотри [9, 10, 11]):

$$g(x, k; t) = c_{11}(k; t) f(x, k; t) + c_{12}(k; t) f(x, -k; t), \quad (2.8)$$

$$f(x, k; t) = c_{21}(k; t) g(x, -k; t) + c_{22}(k; t) g(x, k; t). \quad (2.9)$$

Они следуют из линейной независимости функций Йоста при действительных значениях волнового числа k . Коэффициенты $c_{ij}(k)$ определяются из решения задачи рассеяния. При наличии возмущения их временная зависимость изменится. Метод ОЗР как раз и позволяет определить эту зависимость.

Продифференцируем уравнение (2.2) по t . Получим $\hat{L}_t\psi + \hat{L}\psi_t = \lambda_t\psi + \lambda\psi_t$. Подставляя $\hat{L}_t\psi$ из уравнения (2.4), найдем

$$(\hat{L} - \lambda)(\psi_t - \hat{A}\psi) = \lambda_t\psi - \varepsilon R[u_s]\psi. \quad (2.10)$$

Введем функцию $\Phi = \psi_t - \hat{A}\psi$. Для нее имеем линейное неоднородное уравнение

$$(\hat{L} - \lambda)\Phi = (\lambda_t - \varepsilon R[u_s])\psi. \quad (2.11)$$

Соответствующее ему однородное уравнение $(\hat{L} - \lambda)\Phi = 0$ имеет вид уравнения Шредингера $\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + (k^2 - u)\Phi = 0$, где $u(x, t)$ — неизвестный нам теперь потенциал. Про него мы знаем лишь то, что $u(x, t)|_{x \rightarrow \pm\infty} \rightarrow 0$. Вид оператора $\hat{A}$ в таком случае также асимптотически определен: $\hat{A}|_{x \rightarrow \pm\infty} = -4\frac{\partial^3}{\partial x^3}$. Рассмотрим решение неоднородной задачи, связанное с функцией Йоста $g(x, k; t)$, которая по определению обладает свойством $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x, k; t) = e^{-ikx}$. Записывая $\psi = h(t)g(x, k; t)$, получим при $x \rightarrow -\infty$

$$\Phi = \psi_t - \hat{A}\psi = (h_t + 4ik^3h)e^{-ikx}. \quad (2.12)$$

Положив $h(t) = h(0)e^{ik^3t}$, мы видим, что Φ обращается в нуль при $x \rightarrow -\infty$. Тогда, если возмущение обращается в нуль, то, как видно из уравнения (2.11), мы приходим к решению для невозмущенного случая $\lambda_t = 0$.

С другой стороны, при $x \rightarrow +\infty$ из соотношений для функций Йоста (2.8) для Φ получим следующее условие:

$$\Phi \rightarrow h(t)[c_{12t}e^{-ikx} + (c_{11t} - 8ik^3c_{11})e^{ikx}]. \quad (2.13)$$

Для произвольных значений x решение неоднородной задачи можно записать в виде линейной комбинации функций Йоста f и g :

$$\Phi = \alpha(x, k; t)f(x, k; t) + \beta(x, k; t)g(x, k; t). \quad (2.14)$$

Метод вариации произвольных постоянных приводит нас к следующим выражениям для α и β :

$$\alpha = \frac{h(t)}{2ikc_{12}} \int_{-\infty}^x (\lambda_t - \varepsilon R[u_s])[g(x', k; t)]^2 dx', \quad (2.15)$$

$$\beta = -\frac{h(t)}{2ikc_{12}} \int_{-\infty}^x (\lambda_t - \varepsilon R[u_s])f(x', k; t)g(x', k; t) dx'. \quad (2.16)$$

Теперь применим граничное условие (2.13) для функции Φ с найденными коэффициентами α и β . При $x \rightarrow +\infty$ имеем

$$\begin{aligned} \Phi &= \alpha e^{ikx} + \beta(c_{11}e^{ikx} + c_{12}e^{-ikx}) = \\ &= \frac{h(t)}{2ikc_{12}} \left[e^{ikx} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ikx} (\lambda_t - \varepsilon R[u_s])g(g - c_{11}f) dx + \right. \\ &\quad \left. + e^{-ikx} c_{12} \int_{-\infty}^{+\infty} (\lambda_t - \varepsilon R[u_s])fg dx' \right]. \end{aligned}$$

Приравняв коэффициенты при одинаковых экспонентах в последнем уравнении и уравнении (2.13), получим дифференциальные уравнения на c_{11} и c_{12} :

$$\dot{c}_{11} - 8ik^3 c_{11} = -\frac{i}{2k} \int_{-\infty}^{+\infty} (\lambda_t - \varepsilon R[u_s]) f(x, -k; t) g(x, k; t) dx, \quad (2.17)$$

$$\dot{c}_{12} = \frac{i}{2k} \int_{-\infty}^{+\infty} (\lambda_t - \varepsilon R[u_s]) f(x, k; t) g(x, k; t) dx. \quad (2.18)$$

В уравнении (2.17) функция $f(x, -k; t)$ сингулярна в точках $k = i\kappa_{1,2}$ [10, 9]. Это непосредственно будет видно, когда мы запишем ее явный вид. Воспользовавшись соотношением (2.8) для функции $f(x, k; t)$, находим, что

$$f(x, -k; t) = \frac{g(x, k; t) - c_{11}(k; t) f(x, k; t)}{c_{12}(k; t)}. \quad (2.19)$$

При этом возникает неопределенность типа $\frac{0}{0}$. Разрешив ее по правилу Лопиталя и переходя к пределу $k \rightarrow i\kappa_{1,2}$, получим уравнение для c_{11} :

$$\begin{aligned} \dot{c}_{11} - 8ik^3 c_{11} = & -\frac{\varepsilon}{2\kappa_{1,2} \frac{d}{dk} c_{12}(i\kappa_{1,2})} \times \\ & \times \int_{-\infty}^{+\infty} R[u_s] g(i\kappa_{1,2}) \frac{d}{dk} [g(k) - c_{11}(i\kappa_{1,2}) f(k)]_{k=i\kappa_{1,2}} dx. \end{aligned} \quad (2.20)$$

В точках $k = i\kappa_{1,2}$ функции Йоста линейно зависимы:

$$g(x, i\kappa_{1,2}; t) = c_{11} f(x, i\kappa_{1,2}; t), \quad (2.21)$$

тогда, найдя функции Йоста невозмущенной двухсолитонной задачи f и g и вычислив их значения в полюсах, мы получим коэффициент $c_{11}(i\kappa_{1,2}; \xi_{1,2}(t))$. Для него мы имеем уравнение (2.20), из которого и будут найдены уравнения движения на $\xi_{1,2}$. Таким образом, в рамках метода ОЗР необходимо:

1) выбрать “затравочный” потенциал и параметры солитонов, которые хотим “возмущать” $(\vec{\kappa}, \vec{\xi})$;

2) решить прямую задачу рассеяния для уравнения Шредингера и найти функции Йоста $f(x, k, \vec{\kappa}, \vec{\xi})$, $g(x, k, \vec{\kappa}, \vec{\xi})$;

3) по найденным функциям Йоста определить коэффициенты $c_{11}(i\kappa_l) = \frac{g(x, i\kappa_l, \vec{\kappa}, \vec{\xi})}{f(x, i\kappa_l, \vec{\kappa}, \vec{\xi})}$, дифференцируя которые по t и учитывая соотношение, найденное нами ранее для $\vec{\kappa}_t$ (2.7), получим уравнения на параметры $\vec{\xi}$.

Проделав эти три действия, будем иметь замкнутую систему уравнений адиабатической теории возмущений для солитонов КдВ.

Найдем функции Йоста двухсолитонного решения уравнения КдВ. Для этого сделаем преобразование Крама второго порядка для линейно независимых решений уравнения Шредингера с тривиальным потенциалом $u(x, t) \equiv 0$: $\tilde{f}_0(x, k; t) = C_+ e^{ikx}$ и $\tilde{g}_0(x, k; t) = C_- e^{-ikx}$. Тогда имеем

$$\begin{Bmatrix} \tilde{f}_2(x, k; t) \\ \tilde{g}_2(x, k; t) \end{Bmatrix} = C_{\pm} e^{\pm ikx} \frac{\begin{vmatrix} \text{ch } \kappa_1(x - \xi_1) & \text{sh } \kappa_2(x - \xi_2) & 1 \\ \kappa_1 \text{sh } \kappa_1(x - \xi_1) & \kappa_2 \text{ch } \kappa_2(x - \xi_2) & \pm ik \\ \kappa_1^2 \text{ch } \kappa_1(x - \xi_1) & \kappa_2^2 \text{sh } \kappa_2(x - \xi_2) & -k^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \text{ch } \kappa_1(x - \xi_1) & \text{sh } \kappa_2(x - \xi_2) \\ \kappa_1 \text{sh } \kappa_1(x - \xi_1) & \kappa_2 \text{ch } \kappa_2(x - \xi_2) \end{vmatrix}}. \quad (2.22)$$

Согласно свойству преобразования Крама функции $\tilde{f}_2$ и $\tilde{g}_2$ будут линейно независимыми решениями уравнения с двухсолитонным потенциалом (1.9). Если теперь их нормировать так, что

$$\mathcal{A}\tilde{f}_2|_{x \rightarrow +\infty} = e^{ikx}, \quad \mathcal{B}\tilde{g}_2|_{x \rightarrow -\infty} = e^{-ikx},$$

где $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ – нормировочные константы, то получим искомые функции Йоста f и g задачи рассеяния с двухсолитонным потенциалом $u_s(x, t)$. Вычисленные при $k = i\kappa_{1,2}$, они записываются следующим образом:

$$f(x, i\kappa_1; t) = \frac{\kappa_2 - \kappa_1}{2} e^{-i\kappa_1 \xi_1} \frac{\text{sh } z_2}{\kappa_2 \text{ ch } z_1 \text{ ch } z_2 - \kappa_1 \text{ sh } z_1 \text{ sh } z_2}, \quad (2.23)$$

$$g(x, i\kappa_1; t) = -\frac{\kappa_2 - \kappa_1}{2} e^{i\kappa_1 \xi_1} \frac{\text{sh } z_2}{\kappa_2 \text{ ch } z_1 \text{ ch } z_2 - \kappa_1 \text{ sh } z_1 \text{ sh } z_2}, \quad (2.24)$$

$$f(x, i\kappa_2; t) = \frac{\kappa_2 - \kappa_1}{2} e^{-i\kappa_2 \xi_2} \frac{\text{ch } z_1}{\kappa_2 \text{ ch } z_1 \text{ ch } z_2 - \kappa_1 \text{ sh } z_1 \text{ sh } z_2}, \quad (2.25)$$

$$f(x, i\kappa_2; t) = \frac{\kappa_2 - \kappa_1}{2} e^{i\kappa_2 \xi_2} \frac{\text{ch } z_1}{\kappa_2 \text{ ch } z_1 \text{ ch } z_2 - \kappa_1 \text{ sh } z_1 \text{ sh } z_2}. \quad (2.26)$$

Теперь можно вычислить согласно вышеприведенной методике коэффициенты $c_{11}(i\kappa_1)$ и $c_{11}(i\kappa_2)$:

$$c_{11}(i\kappa_1) = \frac{g(x, i\kappa_1; t)}{f(x, i\kappa_1; t)} = -e^{2\kappa_1 \xi_1}, \quad (2.27)$$

$$c_{11}(i\kappa_2) = \frac{g(x, i\kappa_2; t)}{f(x, i\kappa_2; t)} = e^{2\kappa_2 \xi_2}. \quad (2.28)$$

Значение выражения $\frac{1}{c_{12}(k)}$ есть коэффициент прохождения волны с волновым числом k через двухсолитонный потенциал u_s , который является безотражательным. Значение $\frac{1}{c_{12}}$ известно для N-солитонного потенциала [10]:

$$T = \frac{1}{c_{12}(k)} = \frac{(k + i\kappa_1)(k + i\kappa_2) \dots (k + i\kappa_N)}{(k - i\kappa_1)(k - i\kappa_2) \dots (k - i\kappa_N)}. \quad (2.29)$$

В нашем случае значение $\frac{d}{dk} c_{12}$ при $k = i\kappa_{1,2}$ есть

$$\left. \frac{dc_{12}(k)}{dk} \right|_{k=i\kappa_1} = -\frac{\kappa_2 - \kappa_1}{\kappa_2 + \kappa_1} \frac{1}{2i\kappa_1}, \quad (2.30)$$

$$\left. \frac{dc_{12}(k)}{dk} \right|_{k=i\kappa_2} = \frac{\kappa_2 - \kappa_1}{\kappa_2 + \kappa_1} \frac{1}{2i\kappa_2}. \quad (2.31)$$

Опуская громоздкие выкладки по вычислению выражений

$$\frac{d}{dk} [g(k) - c_{11}(i\kappa_{1,2})f(k)]_{k=i\kappa_{1,2}},$$

сразу же запишем, во что преобразуется уравнение (2.20):

$$\begin{aligned} \xi_{1t} = 4\kappa_1^2 + \frac{\varepsilon}{8\kappa_1^4} \int_{-\infty}^{+\infty} R[u_s] u_1(x, t) \times \\ \times \left\{ z_1 + \frac{1}{2} \frac{\kappa_2^2 + \kappa_1^2}{\kappa_2^2 - \kappa_1^2} \operatorname{sh} 2z_1 - \frac{2\kappa_1\kappa_2}{\kappa_2^2 - \kappa_1^2} \operatorname{cth} z_2 \operatorname{ch}^2 z_1 \right\} dx, \end{aligned} \quad (2.32)$$

$$\begin{aligned} \xi_{2t} = 4\kappa_2^2 + \frac{\varepsilon}{8\kappa_2^4} \int_{-\infty}^{+\infty} R[u_s] u_2(x, t) \times \\ \times \left\{ z_2 + \frac{1}{2} \frac{\kappa_2^2 + \kappa_1^2}{\kappa_2^2 - \kappa_1^2} \operatorname{sh} 2z_2 - \frac{2\kappa_1\kappa_2}{\kappa_2^2 - \kappa_1^2} \operatorname{th} z_1 \operatorname{sh}^2 z_2 \right\} dx, \end{aligned} \quad (2.33)$$

$$u_s = u_1 + u_2, \quad (2.34)$$

где функции $u_{1,2}(x, t)$ определены соотношениями

$$u_1(x, t) = -8\kappa_1^2 \frac{\kappa_1 + \kappa_2}{\kappa_1 - \kappa_2} f(x, i\kappa_1; t) g(x, i\kappa_1; t), \quad (2.35)$$

$$u_2(x, t) = -8\kappa_2^2 \frac{\kappa_2 + \kappa_1}{\kappa_2 - \kappa_1} f(x, i\kappa_2; t) g(x, i\kappa_2; t). \quad (2.36)$$

Уравнения же на $\kappa_{1,2}$ (2.7) в новых обозначениях принимают вид

$$\kappa_{1t} = \frac{\varepsilon}{8\kappa_1^2} \int_{-\infty}^{+\infty} R[u_s] u_1(x, t) dx, \quad (2.37)$$

$$\kappa_{2t} = \frac{\varepsilon}{8\kappa_2^2} \int_{-\infty}^{+\infty} R[u_s] u_2(x, t) dx. \quad (2.38)$$

Уравнения (2.37), (2.38), (2.32) и (2.33) образуют замкнутую систему уравнений, описывающую эволюцию параметров двухсолитонного решения. Отметим основные свойства функций $u_{1,2}(x, t)$ [11]:

1) двухсолитонное решение $u_s(x, t)$ представлено в виде точной суммы $u_1(x, t)$ и $u_2(x, t)$;

2) асимптотически при $t \rightarrow \pm\infty$ функции $u_{1,2}(x, t)$ имеют вид чисто односолитонных решений уравнения КдВ:

$$u_1(x, t) \Big|_{t \rightarrow \pm\infty} = \frac{-2\kappa_1^2}{\operatorname{ch}^2 \left(\kappa_1 x - 4\kappa_1^3 t \mp \ln \frac{1}{2} \frac{\kappa_2 + \kappa_1}{\kappa_2 - \kappa_1} \right)}, \quad (2.39)$$

$$u_2(x, t) \Big|_{t \rightarrow \pm\infty} = \frac{-2\kappa_2^2}{\operatorname{ch}^2 \left(\kappa_2 x - 4\kappa_2^3 t \pm \ln \frac{1}{2} \frac{\kappa_2 + \kappa_1}{\kappa_2 - \kappa_1} \right)}; \quad (2.40)$$

3) “сгустки поля” $u_{1,2}$ сохраняют импульс во времени:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} u_{1,2}(x, t) dx = -4\kappa_{1,2}; \quad (2.41)$$

4) координаты $\langle x_{1,2} \rangle$, введенные как средние значения x с функциями распределения $u_{1,2}(x, t)$ соответственно, ведут себя следующим образом:

$$\langle x_1 \rangle = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} x u_1(x, t) dx}{\int_{-\infty}^{+\infty} u_1(x, t) dx} = 4\kappa_1^2 t - \frac{1}{2\kappa_1} \ln \frac{\kappa_2 + \kappa_1}{\kappa_2 - \kappa_1} \operatorname{th}[c_2(\kappa_1, \kappa_2)(\kappa_2 - \kappa_1)t], \quad (2.42)$$

$$\langle x_2 \rangle = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} x u_2(x, t) dx}{\int_{-\infty}^{+\infty} u_2(x, t) dx} = 4\kappa_2^2 t + \frac{1}{2\kappa_2} \ln \frac{\kappa_2 + \kappa_1}{\kappa_2 - \kappa_1} \operatorname{th}[c_2(\kappa_1, \kappa_2)(\kappa_2 - \kappa_1)t], \quad (2.43)$$

где $c_2(\kappa_1, \kappa_2)$ – некоторая функция, симметричная по перестановке своих аргументов местами. Если называть образования $u_{1,2}(x, t)$ солитонами, то получается, что центры масс солитонов проходят друг сквозь друга, притягиваясь, т.е. их траектории пересекаются раньше, чем в случае, если бы они были независимыми. В такой системе солитонов возможен захват.

Вышеприведенные свойства верны и для обобщенного набора функций N -солитонного решения уравнения КдВ $\{u_1, u_2, \dots, u_N\}$, введенных способом, аналогичным способу введения функций $u_{1,2}$:

$$u_j = -8\kappa_j^2 \left(\prod_{\substack{s=1 \\ s \neq j}}^N \frac{\kappa_j + \kappa_s}{\kappa_j - \kappa_s} \right) f(x, i\kappa_j; t) g(x, i\kappa_j; t), \quad j = 1, \dots, N, \quad (2.44)$$

где f и g – функции Ёоста N -солитонного решения уравнения КдВ. На языке одномерного уравнения Шредингера (2.2) вышеуказанное свойство можно сформулировать в виде следующего утверждения:

произвольный безотражательный потенциал $u(x, t)$ уравнения Шредингера $\psi'' + (-\kappa^2 - u(x, t))\psi = 0$, где t – параметр, спадающий до нуля на бесконечности, представим в виде следующей комбинации квадратов собственных функций дискретного спектра:

$$u(x; t) \equiv -4 \sum_{s=1}^N \kappa_s \psi_s^2(x, t), \quad (2.45)$$

где N – число дискретных уровней, а $-\kappa_s^2$ – дискретные уровни в яме $u(x, t)$.

Это свойство было отмечено в 1979 г. Дейфтом и Трубовицем [12]. Обобщением формулы (2.45) на непрерывный спектр является следующая запись:

$$u(x; t) = -4 \sum_{j=1}^N \kappa_j \psi_j^2(x; t) + \frac{2}{i\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} R_R(k; t) f^2(x, k; t) k dk,$$

где $R_R(k; t)$ – коэффициент отражения для волны, падающей справа на рассеивающий потенциал, $f(x, k; t)$ – функция Ёоста задачи рассеяния.

Свойство 4 для случая N ($N > 2$) солитонов нуждается в некотором уточнении. Здесь оно формулируется в качестве гипотезы. Нам кажется (это наблюдалось в численном эксперименте), что аналогично введенные N координат солитонов $\langle x_j \rangle$,

$j = 1, \dots, N$, при условии $\kappa_1 < \kappa_2 < \dots < \kappa_N$ эволюционируют следующим образом:

$$\langle x_j \rangle = 4\kappa_j^2 t + \frac{1}{2} \sum_{\substack{s=1 \\ s \neq j}}^N \ln \left| \frac{\kappa_j + \kappa_s}{\kappa_j - \kappa_s} \right| \operatorname{th} [c_N(\kappa_j, \kappa_s)(\kappa_j - \kappa_s)t], \quad j = 1, \dots, N, \quad (2.46)$$

т.е. в терминах траекторий центров масс задача о столкновениях N солитонов КдВ сводится к их попарным столкновениям, описываемым формулой (2.42). Ранее этот результат был известен в терминах сдвигов фаз солитонов (см., например, [6]).

2.2. Метод Уизэма. Найдем функцию Лагранжа, приводящую к уравнению КдВ (1.6). Для этого введем потенциал $\Phi(x, t)$ такой, что $u(x, t) = \frac{\partial \Phi(x, t)}{\partial x}$. В этих обозначениях уравнение КдВ запишется в виде

$$\Phi_{xt} - 6\Phi_x \Phi_{xx} + \Phi_{xxx} = 0. \quad (2.47)$$

Ясно, что функция Лагранжа должна зависеть от переменных Φ_x , Φ_t и Φ_{xx} . Тогда из принципа наименьшего действия $\delta \int_0^t \int_{-\infty}^{+\infty} L(\Phi_t, \Phi_x, \Phi_{xx}) dx dt = 0$ следует уравнение Эйлера

$$-\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \Phi_t} - \frac{d}{dx} \frac{\partial L}{\partial \Phi_x} + \frac{d^2}{dx^2} \frac{\partial L}{\partial \Phi_{xx}} = 0. \quad (2.48)$$

Сравнив уравнения (2.47) и (2.48), сразу же записываем функцию Лагранжа

$$L = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(-\frac{1}{2} \Phi_x \Phi_t + \Phi_x^3 + \frac{1}{2} \Phi_{xx}^2 \right) dx. \quad (2.49)$$

Теперь, чтобы найти уравнения движения солитонов, нужно подставить в найденную функцию Лагранжа N -солитонное решение уравнения КдВ. В нашем случае это двух-солитонное решение $u_s(x, t)$. Взяв интегралы, получим

$$L = \frac{8}{3} \kappa_1^3 \dot{\xi}_1 - \frac{32}{5} \kappa_1^3 + \frac{8}{3} \kappa_2^3 \dot{\xi}_2 - \frac{32}{5} \kappa_2^3 = L_1 + L_2, \quad (2.50)$$

где L_1 и L_2 — функции Лагранжа односолитонных решений. Таким образом, в данных обобщенных координатах солитоны в двухсолитонном решении уравнения КдВ являются независимыми. Соответствующие уравнения движения получаются при варьировании L по независимым обобщенным координатам:

$$\begin{aligned} \delta \int_0^t L dt = \int_0^t & \left[8\kappa_1^2 (\dot{\xi}_1 - 4\kappa_1^2) \delta \kappa_1 - \frac{d}{dt} \left(\frac{8}{3} \kappa_1^3 \right) \delta \xi_1 + \right. \\ & \left. + 8\kappa_2^2 (\dot{\xi}_2 - 4\kappa_2^2) \delta \kappa_2 - \frac{d}{dt} \left(\frac{8}{3} \kappa_2^3 \right) \delta \xi_2 \right] dt = 0. \end{aligned} \quad (2.51)$$

Приравняв нулю коэффициенты при независимых вариациях, получим уравнения движения

$$\dot{\kappa}_{1,2} = 0, \quad (2.52)$$

$$\dot{\xi}_{1,2} = 4\kappa_{1,2}^2. \quad (2.53)$$

Наличие возмущения в правой части уравнения КдВ (2.1) изменяет вид уравнений движения (2.52) и (2.53). Если правая часть уравнения (2.1) может быть записана в виде вариации некоторой функции L_{int} , то задача о движении солитонов решается до конца с помощью описанной ранее схемы. Надо лишь вместо функции Лагранжа L в уравнении (2.51) подставить $\tilde{L} = L - L_{\text{int}}$.

В большинстве же случаев оказывается, что правая часть (2.1) не представима в виде полной вариации от некоторой функции. Такая задача решается методом возмущений. Если правая часть мала, то в нулевом порядке двухсолитонное решение останется двухсолитонным решением уравнения КдВ. В следующем же порядке параметры солитонов начнут слабо изменяться. Найдем поправки к уравнениям (2.52) и (2.53), записав неполную вариацию от диссипативной функции Q :

$$\begin{aligned} \delta' Q &= \int_{-\infty}^{+\infty} \varepsilon R[u_s] \delta \Phi dx = \\ &= \varepsilon \int_{-\infty}^{+\infty} R[\Phi_s] \left(\frac{\partial \Phi_s}{\partial \kappa_1} \delta \kappa_1 + \frac{\partial \Phi_s}{\partial \kappa_2} \delta \kappa_2 + \frac{\partial \Phi_s}{\partial \xi_1} \delta \xi_1 + \frac{\partial \Phi_s}{\partial \xi_2} \delta \xi_2 \right) dx, \end{aligned} \quad (2.54)$$

где потенциал $\Phi_s = \frac{2(\kappa_2^2 - \kappa_1^2)}{\kappa_1 \text{th } z_1 - \kappa_1 \text{cth } z_2}$ вычисляется непосредственным интегрированием u_s . Частные производные в уравнении (2.54) легко вычисляются:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi_s}{\partial \kappa_1} &= \frac{(-2)(\kappa_2^2 - \kappa_1^2)}{\text{ch}^2 z_1 (\kappa_1 \text{th } z_1 - \kappa_2 \text{cth } z_2)^2} \times \\ &\times \left[\frac{1}{2} \frac{\kappa_2^2 + \kappa_1^2}{\kappa_2^2 - \kappa_1^2} \text{sh } 2z_1 - \frac{2\kappa_1 \kappa_2}{\kappa_2^2 - \kappa_1^2} \text{cth } z_2 \text{ch}^2 z_1 + z_1 \right], \end{aligned} \quad (2.55)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi_s}{\partial \kappa_2} &= \frac{(-2)(\kappa_2^2 - \kappa_1^2)}{\text{sh}^2 z_2 (\kappa_1 \text{th } z_1 - \kappa_2 \text{cth } z_2)^2} \times \\ &\times \left[\frac{1}{2} \frac{\kappa_2^2 + \kappa_1^2}{\kappa_2^2 - \kappa_1^2} \text{sh } 2z_2 - \frac{2\kappa_1 \kappa_2}{\kappa_2^2 - \kappa_1^2} \text{th } z_1 \text{sh}^2 z_2 + z_2 \right], \end{aligned} \quad (2.56)$$

$$\frac{\partial \Phi_s}{\partial \xi_1} = -u_1(x, t), \quad (2.57)$$

$$\frac{\partial \Phi_s}{\partial \xi_2} = -u_2(x, t). \quad (2.58)$$

Теперь, записав обобщенный принцип наименьшего действия (1.1), получаем окончательные уравнения движения

$$\begin{aligned} \dot{\kappa}_1 &= \frac{\varepsilon}{8\kappa_1^2} \int_{-\infty}^{+\infty} R[u_s] u_1(x, t) dx, \\ \dot{\kappa}_2 &= \frac{\varepsilon}{8\kappa_2^2} \int_{-\infty}^{+\infty} R[u_s] u_2(x, t) dx, \\ \dot{\xi}_1 &= 4\kappa_1^2 + \frac{\varepsilon}{8\kappa_1^4} \int_{-\infty}^{+\infty} R[u_s] u_1(x, t) \left\{ z_1 + \frac{1}{2} \frac{\kappa_2^2 + \kappa_1^2}{\kappa_2^2 - \kappa_1^2} \text{sh } 2z_1 - \frac{2\kappa_1 \kappa_2}{\kappa_2^2 - \kappa_1^2} \text{cth } z_2 \text{ch}^2 z_1 \right\} dx, \\ \dot{\xi}_2 &= 4\kappa_2^2 + \frac{\varepsilon}{8\kappa_2^4} \int_{-\infty}^{+\infty} R[u_s] u_2(x, t) \left\{ z_2 + \frac{1}{2} \frac{\kappa_2^2 + \kappa_1^2}{\kappa_2^2 - \kappa_1^2} \text{sh } 2z_2 - \frac{2\kappa_1 \kappa_2}{\kappa_2^2 - \kappa_1^2} \text{th } z_1 \text{sh}^2 z_2 \right\} dx, \end{aligned} \quad (2.59)$$

которые полностью аналогичны уравнениям (2.37), (2.38), (2.32), (2.33), полученным выше методом ОЗР.

Таким образом, метод Уизэма и метод ОЗР приводят в случае солитонов КдВ к одинаковым уравнениям движения. Однако теория Уизэма дает их гораздо быстрее. Метод ОЗР уже для двухсолитонного случая достаточно громоздок. С ростом же N сложность вычислений очень быстро возрастает.

3. ЭФФЕКТ ОБРАЗОВАНИЯ СОЛИТОННОЙ ПАРЫ В РАМКАХ МОДЕЛИ БКдВ

Применим полученные нами в общем случае уравнения движения для описания эффекта слипания КдВ-солитонов в среде со слабой вязкостью, когда возмущение $R[u_s]$ в уравнениях (2.32), (2.33), (2.37), (2.38) имеет вид μu_{sxx} .

Сначала проведем анализ дифференциальных уравнений на параметры солитонов, если в качестве затравочного потенциала в методе ОЗР брать сумму двух точных солитонов КдВ:

$$u_s(x, t) = -\frac{2\kappa_1^2}{\text{ch}^2 \kappa_1(x - s_1)} - \frac{2\kappa_2^2}{\text{ch}^2 \kappa_2(x - s_2)}. \quad (3.1)$$

Лагранжиан такой задачи в приближении близких скоростей был получен в работе [7]. Вычислив его по формуле (2.49), получим

$$L = \frac{8}{3}\kappa_1^3\dot{s}_1 + \frac{8}{3}\kappa_2^3\dot{s}_2 - \frac{32}{5}\kappa_1^5 - \frac{32}{5}\kappa_2^5 + 256\bar{\kappa}^5 e^{-2\bar{\kappa}|s_2-s_1|}. \quad (3.2)$$

Здесь $\bar{\kappa} = (\kappa_1 + \kappa_2)/2$ и считается константой, $s = s_2 - s_1$ — расстояние между солитонами, отрицательное все время, т.к. мы считаем медленный солитон первым. Член с экспонентой является потенциальной энергией взаимодействия солитонов с координатами, выбранными в максимумах поля $u_s(x, t)$. Она отвечает за их “расталкивание” в отсутствие вязкости среды, т.е. фазы солитонов при взаимодействии сдвигаются, что хорошо известно из точной теории уравнения КдВ. Вычислив неполную вариацию диссипативной функции по формуле (2.54) и применив метод Уизэма, сразу же находим систему уравнений на параметры:

$$\dot{\kappa}_\delta = -\frac{8}{5}\mu\bar{\kappa}^2\kappa_\delta + 128\bar{\kappa}^3\kappa_\delta e^{-2\bar{\kappa}|s|}, \quad (3.3)$$

$$\dot{s} = 8\bar{\kappa}\kappa_\delta, \quad (3.4)$$

из которых видно, что состояние равновесия отсутствует. По всей видимости, данное приближение двухсолитонного решения в адиабатической теории возмущений не учитывает влияния солитонных хвостов на динамику солитонов.

Далее мы будем рассматривать случай точного двухсолитонного потенциала. В предельном случае близких скоростей $\ln \frac{\kappa_2 + \kappa_1}{\kappa_2 - \kappa_1} \gg 1$ правые части уравнений движения упрощаются. Вычтем уравнение (2.38) из уравнения (2.37), получим

$$\dot{\kappa}_\delta = \frac{\mu}{8\bar{\kappa}^2} \int_{-\infty}^{+\infty} (u_2 - u_1) u_{sxx} dx = -\frac{\mu}{8\bar{\kappa}^2} \int_{-\infty}^{+\infty} (u_{2x}^2 - u_{1x}^2) dx. \quad (3.5)$$

Когда солитонные центры $\xi_{1,2}$ разнесены на расстояние много больше их характерных ширин, солитоны можно считать независимыми. Функции $u_{1,2}$ в этом случае имеют

Рис. 2. Функции $-u_{1,2}$ в области взаимодействия.

вид односолитонных решений уравнения КдВ, а координаты, относящиеся к разным солитонам, меняются следующим образом:

$$\dot{\kappa}_{1,2} = -\frac{8}{15}\mu\kappa_{1,2}^3, \quad (3.6)$$

$$\dot{\xi}_{1,2} = 4\kappa_{1,2}^2, \quad (3.7)$$

поэтому интеграл в правой части уравнения (3.5) положителен. Однако, если солитонные скорости близки, интеграл может при малых расстояниях между ξ_1 и ξ_2 ($\delta \equiv \xi_2 - \xi_1 \lesssim \frac{2}{\kappa_1 + \kappa_2}$) оказаться отрицательным несмотря на то, что $\kappa_2 > \kappa_1$ во все моменты времени. Это можно пояснить следующим образом. Воспользуемся представлением двухсолитонного решения в виде линейной комбинации квадратов собственных функций, которое мы выписали ранее. Тогда из осцилляторной теоремы квантовой механики для ψ -функций дискретного спектра уравнения Шредингера [13] следует, что функция ψ_2 не обращается в нуль ни в какой точке вещественной оси как функция, отвечающая наименьшей энергии $-4\kappa_2^2$. Функция же ψ_1 обязана обращаться в нуль в некоторой точке. При $\delta \lesssim \frac{2}{\kappa_1 + \kappa_2}$ профили функций $u_{1,2}$ близки (рис. 2, где $\kappa_1 = 0.3$, $\kappa_2 = 0.305$, $t = 0$). Ясно, что квадрат функции $\psi_2(x; t)$ ведет себя в окрестности перешейка между горбами более плавно, чем квадрат ψ_1 , т.е. обладает меньшей по модулю производной по координате на этом интервале. На других же интервалах функции примерно совпадают.

Аналитически вычислить интеграл в правой части (3.5) не удастся. Оценим лишь его значение при $\delta = 0$. В нашем приближении получим при $\delta = 0$

$$\dot{\kappa}_\delta|_{\delta=0} = \frac{8}{5}\mu\bar{\kappa}^2\kappa_\delta \ln \frac{4\bar{\kappa}}{\kappa_\delta}. \quad (3.8)$$

В общем случае уравнение (3.5) записывается в виде

$$\dot{\kappa}_\delta = -\frac{8}{5}\mu\bar{\kappa}^2\kappa_\delta F(\bar{\kappa}, \delta), \quad (3.9)$$

где функция F имеет колоколообразную форму. Она изображена на рис. 3, где $\kappa_1 = 0.3$, $\kappa_2 = 0.301$. При $\bar{\kappa}_\delta \gg 1$ имеем $F = -1$ и $F \approx \frac{1}{3} \ln \frac{2\bar{\kappa}}{\kappa_\delta}$ при $\delta = 0$. Характерным масштабом F при $\kappa_1 \rightarrow \kappa_2$ является $\bar{\kappa}^{-1}$, не зависящий от κ_δ . Такое заключение было сделано

Рис. 3. Функция F .

нами на основании специальных численных экспериментов. Приравнявая правую часть уравнения (3.9) нулю, получаем точку равновесия δ^* : $F(\bar{\kappa}, \delta^*) = 0$.

Теперь вычтем уравнение (2.32) из (2.33):

$$\dot{\delta} = 8\bar{\kappa}\kappa_\delta + \mu G(\kappa_\delta). \quad (3.10)$$

Интеграл в правой части уравнения (3.10) также не вычисляется аналитически. Функция G , как и функция F , имеет характерный масштаб порядка средней ширины солитонов (рис. 4) в приближении близких скоростей. Оценим линейный член в разложении функции G вблизи точки $\delta = 0$. Заметим, что в приближении близких скоростей функции $u_{1,2}$ при малых отклонениях от точки $\delta = 0$ ($|\delta| \ll \bar{\kappa} \ln \frac{4\bar{\kappa}}{\kappa_\delta}$) практически не отличаются по форме, зато гораздо сильнее меняются выражения под интегралами в скобках. Они и будут определять зависимость от δ :

$$\dot{\delta} = 8\bar{\kappa}\kappa_\delta - \frac{8\mu}{15} \left(\frac{\bar{\kappa}}{\kappa_\delta} \right)^2 \bar{\kappa}(\bar{\kappa}\delta). \quad (3.11)$$

Из этого уравнения, приравняв правую часть нулю, находим значение

$$\kappa^* = \left(\frac{\mu\bar{\kappa}^3\delta^*}{15} \right)^{1/3}. \quad (3.12)$$

Линеаризуя уравнения (3.9) и (3.11) вблизи точки равновесия $(\kappa_\delta^*, \delta^*)$, получим

$$\frac{d}{dt}\tilde{\kappa}_\delta = -\frac{8}{15}\mu\bar{\kappa}^2\kappa_\delta^* \left(\frac{\partial F}{\partial \delta} \Big|_{\delta=\delta^*} \right) \tilde{\delta}, \quad (3.13)$$

$$\frac{d}{dt}\tilde{\delta} = 24\bar{\kappa}\tilde{\kappa}_\delta - \frac{8}{15}\mu \frac{\bar{\kappa}^4}{\kappa_\delta^{*2}} \tilde{\delta}. \quad (3.14)$$

Рис. 4. Функция G .

Обозначим для краткости $(\frac{\partial F}{\partial \delta} \frac{1}{\bar{\kappa}})_{\delta=\delta_{1,2}^*} = \alpha_{1,2}$. Ясно, что $\alpha_1 \alpha_2 < 0$ и $|\alpha_1| = |\alpha_2|$. Пусть $\alpha_1 > 0$. Исследуем типы состояний равновесия на устойчивость. Для этого запишем характеристическое уравнение линейной системы (3.13), (3.14)

$$\lambda^2 + \frac{8}{15} \mu \frac{\bar{\kappa}^4}{\kappa_{\delta}^{*2}} \lambda + \frac{64}{5} \mu \bar{\kappa}^4 \kappa_{\delta}^* \alpha_{1,2} = 0. \quad (3.15)$$

Для наших оценок примем, что $\bar{\kappa} \delta^* = 1$, тогда из уравнения (3.12) находим, что $\kappa_{\delta}^* = \left(\frac{\mu \bar{\kappa}^2}{15}\right)^{1/3}$. Характеристическое уравнение переписывается в виде

$$\lambda^2 + 3.2 \mu^{1/3} \bar{\kappa}^{8/3} \lambda + 5.2 \mu^{4/3} \bar{\kappa}^{14/3} \alpha = 0. \quad (3.16)$$

Разрешив его, найдем

$$\lambda_{1,2} = -1.6 \mu^{1/3} \bar{\kappa}^{8/3} \pm 1.6 \mu^{1/3} \bar{\kappa}^{8/3} \sqrt{1 - 2.1 \left(\frac{\mu}{\bar{\kappa}}\right)^{2/3} \frac{\alpha_{1,2}}{\bar{\kappa}}}. \quad (3.17)$$

В рассматриваемом нами случае малых вязкостей $(\frac{\mu}{\bar{\kappa}} \ll 1)$ имеются две особые точки на фазовой плоскости $(\tilde{\kappa}_{\delta}, \tilde{\delta})$ – это устойчивый узел при $\delta^* > 0$ и седло при $\delta^* < 0$. Узел и соответствует слиянию солитонов. При этом образуется связанная пара солитонов с расстоянием между центрами масс солитонов порядка их средней ширины в случае, если скорости солитонов близки. В дальнейшем это расстояние медленно изменяется только в силу медленного торможения центра масс системы. Процесс связывания солитонной пары, как видно из (3.17), оказывается очень быстрым по сравнению с характерным временем затухания центра масс солитонов, т.к. $\mu^{-1/3} \bar{\kappa}^{-8/3} \ll \mu^{-1} \bar{\kappa}^{-2}$.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Нами были проведены численные эксперименты для исследования слияния солитонов как на основе уравнения БКдВ (1.8), так и на основе системы укороченных уравнений (2.59). Результаты экспериментов хорошо согласуются (рис. 5). Солитоны в обоих

случаях слипаются примерно за одно и то же время. Детальное сравнение показывает, что относительное движение солитонов описывается укороченными уравнениями (2.59) очень точно даже на временах, в несколько раз превышающих время глобального торможения солитонов. Разница между результатами – лишь в небольшом сдвиге связавшихся пар относительно друг друга. Это объясняется наличием слабого хвоста в точном решении БКдВ.

Рис. 5. Результаты численного моделирования: точное решение (слева), модельное решение (справа).

Анализ данной модели неупругих процессов в системе со слабой дисперсией и нелинейностью показал, что введение слабой диссипации способно полностью изменить структуру решений. Процессы захвата квазичастиц являются более быстрыми, чем затухание решения в целом. Мы уверены, что данное свойство не является специфическим свойством этой системы. Введенные в задачу обобщенные координаты солитонов по аналогии с работой Маслова и Карпмана не являются координатами максимумов, наблюдаемых в эксперименте, а расположены от них на расстоянии порядка $\frac{1}{\kappa} \ln \frac{2\kappa}{\kappa\delta}$. Это можно увидеть из свойства 4 функций $u_{1,2}$, обсуждаемого нами выше. Следовательно, если δ фиксируется, то расстояние между центрами масс пакетов также фиксируется.

Интегралы, вычисляемые в последней части данной статьи аналитически, носят оценочный характер. При их оценке использовались грубые приближения, числовые коэффициенты могут отличаться от наблюдаемых в численном эксперименте.

Как было показано выше, при рассмотрении упругих взаимодействий солитонов задача всегда сводится к нахождению того или иного потенциала взаимодействия. Причем в нашем описании в терминах центров масс пакетов, асимптотически соответствующих свободным солитонам, взаимодействие имеет характер притяжения. В работе [7] фигурирует взаимодействие типа отталкивания. В обоих случаях сдвиги фаз одни и те же. Это, по-видимому, означает, что сама по себе проверка только асимптотических характеристик приближенных решений является слишком грубой и нечувствительной к истинному характеру взаимодействия. Можно показать, что при любом симметричном по отношению к перестановке солитонов потенциале взаимодействия, спадающем при больших расстояниях между ними, сдвиг фаз будет асимптотически правильным. Поэтому вопрос о том, как описывать взаимодействия в модели почти независимых солитонов, остается открытым и требует дополнительного анализа. В частности, в нашем примере мы показали, что хорошее согласие вариационного подхода с точным реализуется,

только если в качестве затравочного решения используется точное двухсолитонное решение, а не суперпозиция двух свободных солитонов. Следует подчеркнуть, что сам по себе этот вопрос является несомненно важным прежде всего для неинтегрируемых задач, в которых отыскание точных двухсолитонных решений – задача весьма трудная, а решения типа солитонов, как правило, легко отыскиваются. Возможно, исправить ситуацию удастся, если соответствующим образом модифицировать теорию возмущений, включив в нее слабые несолитонные хвосты.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 95-02-04997-а) и Международного научного фонда (грант NON300, s96-3094).

Список литературы

- [1] *Y. S. Kishvar, B. A. Malomed.* Rev. Mod. Phys. 1989. V. 61. № 4. P. 763–916.
- [2] *Дж. Уизэм.* Линейные и нелинейные волны. М.: Мир, 1977.
- [3] *C. S. Su, C. S. Gardner.* J. Math. Phys. 1969. V. 10. P. 536–539.
- [4] *T. Taniuti, C.-C. Wei.* J. Phys. Soc. Japan. 1968. V. 24. P. 941.
- [5] *В. И. Карпман.* Нелинейные волны в диспергирующих средах. М.: Наука, 1973.
- [6] *А. Ньюэлл.* Солитоны в математике и физике. М.: Мир, 1989.
- [7] *K. A. Gorshkov, L. A. Ostrovsky.* Physica. 1981. V. 3D. № 1, 2. P. 428–438.
- [8] *В. И. Карпман, Е. М. Маслов.* ЖЭТФ. 1977. Т. 73. С. 537.
- [9] *Р. Додд, Дж. Эйлбек, Дж. Гиббон, Х. Моррис.* Солитоны и нелинейные волновые уравнения. М.: Мир, 1988.
- [10] *G. R. Lamb, Jr.* Elements of Soliton Theory. New York: John Wiley, 1980.
- [11] *Д. Н. Иваницhev, Г. М. Фрайман.* Препринт № 388. Н. Новгород: ИПФ РАН, 1996.
- [12] *P. Deift, E. Trubowitz.* Commun. Pure Appl. Math. 1979. V. 32. P. 121–251.
- [13] *Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц.* Квантовая механика. Нерелятивистская теория. М.: Наука, 1974.

Поступила в редакцию 26.VII.1996 г.

D. N. Ivanychev, G. M. Friman CREATION OF SOLITON PAIRS IN NONLINEAR MEDIA WITH LOW DISSIPATION

Two weakly interacting KdV solitons in the presence of low viscosity are considered. A model describing their interaction in terms of a slow change of parameters of the two-soliton solution of the KdV equation under perturbation is proposed. It is shown that the inverse scattering method as well as Whitham's method lead to the same system of reduced equations. The found solutions are in good correspondence with the results of numerical calculations. The main result is a creation of a bound quasistationary pair of solitons with their successive dissipation. Although both creation and dissipation processes are due to the low viscosity, the former one is essentially faster.