Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Т. И. Копалейшвили, Е. З. Липартия, А. Г. Русецкий, Об эффекте запаздывания в формфакторе связанной системы двух частиц, *ТМФ*, 1997, том 110, номер 2, 272–290

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf967>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.80.73.141

26 апреля 2023 г., 14:26:35

Т. И. Копалейшвили*, Е. З. Липартия*, А. Г. Русецкий†

ОБ ЭФФЕКТЕ ЗАПАЗДЫВАНИЯ В ФОРМФАКТОРЕ СВЯЗАННОЙ СИСТЕМЫ ДВУХ ЧАСТИЦ

В квазипотенциальном подходе Логунова–Тавхелидзе исследована сходимость метода последовательных приближений для учета динамического эффекта запаздывания в электромагнитном формфакторе связанной системы двух скалярных частиц, взаимодействующих посредством сепарабельного ядра уравнения Бете–Солпитера. Обсужден статус релятивистского импульсного приближения в рамках этого подхода. В статическом приближении с учетом тока взаимодействия построен вершинный оператор электромагнитного тока, удовлетворяющий условиям поперечности и нормировки. Проведен сравнительный анализ формфактора в различных приближениях.

ВВЕДЕНИЕ

Описание релятивистских связанных состояний в рамках квантово-полевого подхода уже в течение нескольких десятилетий является одной из наиболее актуальных проблем физики элементарных частиц. В настоящее время общепринятым является точка зрения, согласно которой адроны (как мезоны, так и барионы) представляют собой связанные системы (не наблюдаемых в свободном состоянии) кварков и глюонов, взаимодействие между которыми описывается лагранжианом квантовой хромодинамики (КХД), причем эффективная константа связи на расстояниях порядка “размера” адрона немала, что приводит к необходимости последовательного учета непертурбативных эффектов. Для описания релятивистских связанных состояний в разное время использовались трехмерный подход Тамма–Данхоффа при квантовании на плоскости $t = 0$ [1] и на световом конусе (см., например, обзор [2] и цитируемую в нем литературу), дисперсионный подход [3], различные формы релятивистской гамильтоновой динамики [4]. Следует отметить популярные в последнее время теоретико-полевые подходы, основанные на бозонизации КХД, которые приводят к моделям типа Намбу–Йона–Лазинио [5, 6, 7]. Условием связности составляющих элементов в них служит условие $Z = 0$ (Z – константа перенормировки волновой функции составного адрона (см., например, [8])).

По нашему мнению, одно из наиболее последовательных подходов к описанию связанных систем в рамках квантовой теории поля является ковариантный подход, осно-

* Институт физики высоких энергий Тбилисского государственного университета

† Лаборатория теоретической физики им. Н.Н.Боголюбова Объединенного института ядерных исследований

ванный на использовании уравнений Бете–Солпитера (БС) [9]. В рамках этого подхода с использованием исходного лагранжиана, содержащего поля только элементарных составляющих, (в принципе) возможно вычислить не только спектр связанных систем, но и все наблюдаемые матричные элементы перехода между состояниями, описывающими произвольное число связанных систем [10].

Несмотря на очевидные преимущества вышеупомянутого подхода следует отметить, что в практических приложениях мы наталкиваемся на большие трудности из-за отсутствия хорошо разработанного математического аппарата для решения четырехмерных сингулярных интегральных уравнений типа БС. Это обстоятельство наряду с отсутствием вероятностной интерпретации для четырехмерной волновой функции БС приводит к тому, что на практике широко используются различные трехмерные (квазипотенциальные) редукции исходного четырехмерного уравнения БС, отличающиеся друг от друга выбором трехмерной аппроксимации для свободной двухфермионной функции Грина [11, 12], или трехмерные ковариантные уравнения, получающиеся суммированием “времениупорядоченных” диаграмм при помощи шпурионной техники [13]. Квазипотенциал, получающийся при помощи трехмерной редукции уравнения БС, представляет собой (бесконечный) ряд по степеням константы взаимодействия, соответствующий учету эффекта динамического запаздывания (т.е. эффекта, обусловленного зависимостью ядра уравнения БС от относительных времен) методом последовательных приближений.

При описании адронов в рамках составной кварковой модели в большинстве случаев используется так называемое одновременное (статическое) приближение, в котором пренебрегается зависимостью ядра уравнения БС от переменных относительных энергий. Уравнение БС в этом случае сводится к трехмерному уравнению Солпитера [14], потенциал которого обычно выбирается в виде суммы потенциалов одноглюонного обмена и “запирающего” потенциала, обеспечивающего конфайнмент кварков внутри адронов. Исследования динамического эффекта запаздывания в этой модели обычно ограничиваются оценкой поправки к массе мезонов в первом приближении [15, 16]. При этом оказывается, что из-за инфракрасно-сингулярного характера запирающего потенциала величина поправки зависит от способа “ковариантизации” потенциала и необходимой при этом регуляризации и, более того, в ряде случаев эти поправки достаточно большие, для того чтобы считать их поправками. Естественно возникает проблема учета следующих приближений. В более общем контексте ставится задача исследования сходимости итерационной процедуры учета динамического эффекта запаздывания не только для массы мезонов, но и для других характеристик связанной $q\bar{q}$ -системы. Имея в виду, что решение этой задачи в полном объеме для класса $q\bar{q}$ -потенциалов, упомянутых выше, практически невозможно в первую очередь из-за сингулярного характера запирающего потенциала, имеет смысл на первом этапе рассмотреть модельную задачу – связанную систему двух скалярных частиц (“скалярный дейтрон”) с сепарабельным ядром уравнения БС. Следует отметить, что хотя сепарабельный потенциал и не относится к типу ядер, приводящих к удержанию кварков, он часто используется для описания тех свойств связанных $q\bar{q}$ -систем, которые прямо не зависят от наличия или отсутствия конфайнмента (см., например, [6]). При этом имеется возможность рассмот-

рения итерационной процедуры расчета не только массы связанной системы, но и такой важной характеристики, как электромагнитный формфактор.

В данной работе будет рассмотрен вопрос сходимости итерационной процедуры в квазипотенциальном подходе Логанова–Тавхелидзе [11] при расчете вышеупомянутых характеристик для “скалярного дейтрона”.

1. МАССА “СКАЛЯРНОГО ДЕЙТРОНА”

Определение энергии связи связанной системы с сепарабельным ядром взаимодействия рассматривалось, например, в работе [17]. Ниже мы приводим основные формулы, записанные в форме, удобной при дальнейшем использовании для вычисления формфактора связанной системы, и, кроме того, рассмотрим вопрос сходимости вышеупомянутой процедуры для массы связанного состояния. Ради простоты массы частиц, образующих связанное состояние, будем считать одинаковыми ($m_1 = m_2 = m$). Уравнение БС для такой системы, как известно, имеет вид

$$\varphi_P(p) = G_0(P, p) \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} K(P; p, k) \varphi_P(k), \quad (1.1)$$

где P – полный импульс связанной системы, p и k – относительные импульсы, а функция Грина для невзаимодействующих частиц G_0 дается выражением

$$G_0(P, p) = i \left[\left(\frac{P}{2} + p \right)^2 - m^2 + i0 \right]^{-1} i \left[\left(\frac{P}{2} - p \right)^2 - m^2 + i0 \right]^{-1}. \quad (1.2)$$

Ядро K уравнения (1.1), которое в рассматриваемой модели считается не зависящим от полного импульса P , берем в виде

$$\begin{aligned} K(P; p, k) &= igv(p)v(k), \\ v(x) &= v(x^2) = \frac{\Lambda^2}{x^2 - \Lambda^2} = \frac{\Lambda^2}{x_0^2 - \beta^2(\vec{x})}, \\ \beta(\vec{x}) &= \sqrt{\Lambda^2 + \vec{x}^2}. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Решение $\varphi_P(p)$ уравнения (1.1) представляется так:

$$\varphi_P(p) = cG_0(P, p)v(p) \equiv cu(P, p). \quad (1.4)$$

Тогда масса связанного состояния M определяется из уравнения

$$1 + gI(P^2 = M^2) = 0, \quad I(P^2) = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} G_0(P, p)v^2(p). \quad (1.5)$$

Ниже мы используем уравнение (1.5) для определения константы связи g через заданную энергию связи системы. Что же касается другого параметра модели – массы

обрезания Λ , то его можно определить при помощи среднеквадратичного радиуса системы (см. ниже).

Принимая во внимание то обстоятельство, что функция K , определяемая уравнением (1.3), не зависит от полного 4-импульса P , из условия нормировки функции $\varphi_P(p)$ можно найти нормировочный множитель c в (1.4):

$$|c|^2 = [-I'(M^2)]^{-1}, \quad I'(M^2) = \frac{dI(M^2)}{dM^2}. \quad (1.6)$$

Решая уравнение для полной функции Грина с заданным K , можно легко получить

$$\begin{aligned} G(P; p, k) &= (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p - k) G_0(P, p) + id(P^2) u(P, p) u(P, k), \\ d(P^2) &= \frac{g}{1 + gI(P^2)}. \end{aligned} \quad (1.7)$$

Применяя квазипотенциальную процедуру Логанова–Тавхелидзе (в произвольной системе отсчета), можно найти аналоги приведенных выше уравнений и соотношений (см., например, [16]). В частности, для волновой функции связанной системы и квазипотенциальной полной функции Грина имеем

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}_P(\chi) &= c [\tilde{u}(P, \chi) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{da}{2\pi} u(P, \chi + an) = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{da}{2\pi} G_0(P, \chi + an) v(P, \chi + an)], \end{aligned} \quad (1.8)$$

$$\begin{aligned} \tilde{G}(P, \chi, \chi') &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{da}{2\pi} G(P, \chi + an, \chi' + a'n) \frac{da'}{2\pi} = \\ &= i(2\pi)^3 \delta^{(3)}(\chi - \chi') \tilde{G}_0(P, \chi) + id(P^2) \tilde{u}(P, \chi) \tilde{u}(P, \chi'), \end{aligned} \quad (1.9)$$

где

$$\tilde{G}_0(P, \chi) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{da}{2\pi i} G_0(P, \chi + an) = \frac{1}{w(M^2 - 4w^2 + i0)} \quad (1.10)$$

и $n_\mu = \frac{P_\mu}{\sqrt{P^2}}$, $(n \cdot \chi) = (n \cdot \chi') = 0$, $w = \sqrt{m^2 - \chi^2}$. Воспользовавшись определением $\tilde{G}\tilde{G}^{-1} = 1$ и выражением (1.9), можно найти функцию $\tilde{G}^{-1}(P, \chi, \chi')$, и, следовательно, $\tilde{K} = \tilde{G}_0^{-1} - \tilde{G}^{-1}$. В системе покоя связанной частицы, в которой $n_\mu = (1, \vec{0})$, $\chi_\mu = (0, \vec{\chi})$ и $\chi'_\mu = (0, \vec{\chi}')$, получаем

$$\tilde{K}(P, \vec{\chi}, \vec{\chi}') = -i\lambda(P^2) \tilde{G}_0^{-1}(P, \vec{\chi}) \tilde{u}(P, \vec{\chi}) \tilde{u}(P, \vec{\chi}') \tilde{G}_0^{-1}(P, \vec{\chi}'), \quad (1.11)$$

где

$$\lambda(P^2) = g \left(1 + g(I(P^2) - \tilde{I}(P^2)) \right)^{-1}, \quad \tilde{I}(P^2) = - \int \frac{d^3 \vec{p}}{(2\pi)^3} (\tilde{u}(P, \vec{p}))^2 \tilde{G}_0^{-1}(P, \vec{p}). \quad (1.12)$$

В этой системе отсчета квазипотенциальное уравнение для волновой функции $\tilde{\varphi}_P(\vec{p})$ имеет вид

$$\tilde{\varphi}_P(\vec{p}) = \tilde{G}_0(P, \vec{p}) \int \frac{d^3 \vec{k}}{(2\pi)^3} [i\tilde{K}(P; \vec{p}, \vec{k})] \tilde{\varphi}_P(\vec{k}), \quad (1.13)$$

соответствующее уравнение для определения массы M следует из (1.5):

$$1 + \lambda(M^2)\tilde{I}(M^2) = 0, \quad (1.14)$$

а его корни, разумеется, совпадают с корнями уравнения (1.5).

Решение задачи о связанном состоянии в квазипотенциальном подходе представим в виде ряда, соответствующего учету эффекта запаздывания методом последовательных приближений. Для этого запишем $\lambda(P^2)$ как (формальный) итерационный ряд по константе связи g :

$$\lambda(P^2) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \lambda_n(P^2) = g \sum_{m=0}^n (-g)^m (I(P^2) - \tilde{I}(P^2))^m \right\}. \quad (1.15)$$

Тогда для получения соответствующего выражения для $\tilde{K}_n(P; \vec{p}, \vec{k})$ в (1.11) следует сделать замену $\lambda(P^2) \rightarrow \lambda_n(P^2)$. В этом случае масса M_n вместо (1.14) определяется из уравнения $1 + \lambda_n(M_n^2)\tilde{I}(M_n^2) = 0$, а соответствующая волновая функция имеет вид $\tilde{\varphi}_n(\vec{p}) = \tilde{c}_n \tilde{u}(\sqrt{M_n^2}, \vec{p})$, где нормировочный коэффициент $\tilde{c}_n$ можно определить, используя поведение полной функции Грина, заданной уравнением $\tilde{G}_{n+1} = \tilde{G}_0 + \tilde{G}_0 \tilde{K}_n \tilde{G}_{n+1}$ ($n = 0, 1, 2, \dots$), вблизи полюса $P^2 = M_n^2$. В результате получаем

$$|\tilde{c}_n|^2 = \left[-\tilde{I}(M_n^2) \frac{\lambda'_n(M_n^2)}{\lambda_n(M_n^2)} - \tilde{I}'(M_n^2) \right]^{-1}. \quad (1.16)$$

Одновременному (статическому) приближению (1.3) для $K(P; p, k)$ ($p_0 = k_0 = 0$ в системе покоя связанной системы) соответствует $n = 0$, т.к. в этом случае $I_{\text{st}}(P^2)$ определяется второй формулой из (1.5) с заменой $v(p) \rightarrow v$ ($p_0 = 0, \vec{p}$) (заметим, что в статическом приближении $I_{\text{st}}(P^2) = \tilde{I}_{\text{st}}(P^2)$). Уравнения на массу связанного состояния M_0 и нормировочную константу волновой функций c_{st} даются соответственно первыми формулами из (1.5) и (1.6) с заменами $I(M^2) \rightarrow I_{\text{st}}(M_0^2)$, $c \rightarrow c_{\text{st}}$.

Можно легко убедиться, что функции $I(M^2)$, $\tilde{I}(M^2)$, $I_{\text{st}}(M^2)$ принимают вещественные значения только при $M < 2m$. Это означает, что решения уравнения БС с вещественными собственными значениями (стабильное связанное состояние) существуют только в этой области энергий.

Рассмотрим теперь вопрос о сходимости решения уравнения для массы M_n , когда $n \rightarrow \infty$, т.е. при $M_n \rightarrow M$, где M – решение уравнения (1.5). Геометрическая прогрессия (1.15) сходится для всех P^2 , если $|g(I(P^2) - \tilde{I}(P^2))| < 1$. Эту величину возможно интерпретировать в качестве естественной величины, характеризующей эффект запаздывания, имея в виду, что он обращается в нуль в статическом пределе.

2. ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЙ ФОРМФАКТОР

2.1. Четырехмерный формализм. Воспользовавшись известным определением электромагнитного формфактора в рассматриваемой модели, с учетом (1.4) имеем

$$T_\mu(P, Q) = \langle P | J_\mu(0) | Q \rangle = |c|^2 \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} v(p) G_0(P, p) \Gamma_\mu(P, p; Q, q) G_0(Q, q) v(q) \frac{d^4 q}{(2\pi)^4}, \quad (2.1)$$

где мы использовали выражение для вершинного оператора $\Gamma_\mu(P, p; Q, q)$, полученное в работе [19] при помощи метода минимальной подстановки $p_i^\mu \rightarrow p_i^\mu + i e_i A^\mu$:

$$\begin{aligned} \Gamma_\mu(P, p; Q, q) = & \left[(2\pi)^4 e_1 \left(p + q + \frac{P+Q}{2} \right)_\mu \delta^{(4)} \left(-\frac{\Delta}{2} - p + q \right) \left(\left(\frac{P}{2} - p \right)^2 - m^2 \right) + \right. \\ & + i g e_1 \left(\left(p + \frac{\Delta}{4} \right)_\mu \frac{(v(p + \frac{\Delta}{2}) - v(p)) v(q)}{p \cdot \Delta + \frac{\Delta^2}{4}} - \right. \\ & \left. \left. - \left(-q + \frac{\Delta}{4} \right)_\mu \frac{v(p) (v(q - \frac{\Delta}{2}) - v(q))}{-q \cdot \Delta + \frac{\Delta^2}{4}} \right) \right] + \\ & + [e_1 \leftrightarrow e_2, p \leftrightarrow -p, q \leftrightarrow -q], \end{aligned} \quad (2.2)$$

здесь $\Delta \equiv Q - P$. Слагаемые в выражении (2.2), пропорциональные g , соответствуют так называемому току взаимодействия. Как хорошо известно, присутствие именно этих слагаемых обеспечивает выполнение тождества Уорда для вершинного оператора Γ_μ , что, в свою очередь, ведет к сохранению тока в вершине $\Delta^\mu T_\mu(P, Q) = 0$ (на массовой поверхности $P^2 = Q^2 = M^2$).

После подстановки выражения (2.2) в (2.1) и последующих длинных, но простых преобразований получаем

$$\begin{aligned} T_\mu(P, Q) = & \frac{1}{2} (e_1 + e_2) |c|^2 \int \frac{d^4 z}{(2\pi)^4} \frac{(P + Q + 2z)_\mu}{\left[\left(\frac{P+Q}{4} - z \right)^2 - m^2 + i0 \right]} \times \\ & \times \frac{v(z + \frac{\Delta}{4}) v(z - \frac{\Delta}{4})}{\left[\left(\frac{P+Q}{4} - \frac{\Delta}{2} + z \right)^2 - m^2 + i0 \right] \left[\left(\frac{P+Q}{4} + \frac{\Delta}{2} + z \right)^2 - m^2 + i0 \right]} + \\ & + g (e_1 + e_2) |c|^2 \int \frac{d^4 z}{(2\pi)^4} \frac{z_\mu}{z \cdot \Delta} v \left(z - \frac{\Delta}{4} \right) \left[v \left(z - \frac{\Delta}{4} \right) - v \left(z + \frac{\Delta}{4} \right) \right] \times \\ & \times \left\{ I(P^2) G_0 \left(Q, z - \frac{\Delta}{4} \right) - I(Q^2) G_0 \left(P, z - \frac{\Delta}{4} \right) \right\}. \end{aligned} \quad (2.3)$$

На массовой поверхности, где $gI(P^2) = gI(Q^2) = -1$, часть слагаемых в (2.3), пропорциональных $z_\mu v(z + \frac{\Delta}{4}) v(z - \frac{\Delta}{4})$, взаимно сокращается. В результате получаем

$$T_\mu(P, Q) = -i(P + Q)_\mu (e_1 + e_2) [F(\Delta^2) = F_1(\Delta^2) + F_2(\Delta^2) + F_3(\Delta^2)]. \quad (2.4)$$

В системе Брейта $P = \left(E, -\frac{\vec{\Delta}}{2}\right)$, $Q = \left(E, \frac{\vec{\Delta}}{2}\right)$, $\Delta = (0, \vec{\Delta})$, $E = \sqrt{M^2 + \frac{1}{4}\vec{\Delta}^2}$ имеем

$$\begin{pmatrix} F_1(-\vec{\Delta}^2) \\ F_2(-\vec{\Delta}^2) \\ F_3(-\vec{\Delta}^2) \end{pmatrix} = -\frac{|c|^2}{2Ei} \int \frac{d^4 z}{(2\pi)^4} \frac{1}{A(E, z)B(E, \vec{\Delta}, z)} \times \\ \times \begin{pmatrix} Ef(z_+)f(z_-) \\ z_0(f^2(z_+) + f^2(z_-))/2 \\ z_0/(\vec{z} \cdot \vec{\Delta})b(E, |\vec{\Delta}|, z)(f^2(z_+) - f^2(z_-)) \end{pmatrix}, \quad (2.5)$$

$$\begin{aligned} b(E, |\vec{\Delta}|, z) &= \left(\frac{E}{2} + z_0\right)^2 - w^2(\vec{z}) - \frac{\vec{\Delta}^2}{4}, \\ B(E, \vec{\Delta}, z) &= (b(E, |\vec{\Delta}|, z) + i0)^2 - (\vec{z} \cdot \vec{\Delta})^2, \\ A(E, z) &= \left(\frac{E}{2} - z_0\right)^2 - w^2(\vec{z}) + i0, \\ f(z_{\pm}) &= \Lambda^2 \left[z_0^2 - \beta^2 \left(\vec{z} \pm \frac{\vec{\Delta}}{4} \right) + i0 \right]^{-1}. \end{aligned} \quad (2.6)$$

При этом $F_1(0) + F_2(0) = 1$, $F_3(0) = 0$. Как видно из (2.6), подынтегральные выражения в (2.5) имеют полюсы в точках $z_0 = \frac{E}{2} \pm w(\vec{z}) \mp i0$, $z_0 = \beta \left(\vec{z} \pm \frac{\vec{\Delta}}{4} \right) - i0$, $z_0 = -\beta \left(\vec{z} \pm \frac{\vec{\Delta}}{4} \right) + i0$, $z_0 = \frac{E}{2} - w \left(\vec{z} \pm \frac{\vec{\Delta}}{2} \right) + i0$, $z_0 = \frac{E}{2} + w \left(\vec{z} \pm \frac{\vec{\Delta}}{2} \right) - i0$. Используя теорию вычетов и выполняя интегрирование по переменной z_0 , нетрудно убедиться, что остающиеся знаменатели в подынтегральном выражении несингулярны при условии $M \leq 2m$. Это означает, что, как и следовало ожидать, формфактор является вещественной функцией переменной $|\vec{\Delta}|$ в области $(Q - P)^2 \leq 0$.

Интересно также рассмотреть поведение формфактора вблизи начала координат и, в частности, величину $\langle r^2 \rangle = -6 \frac{dF(-\vec{\Delta}^2)}{d\vec{\Delta}^2}$ — среднеквадратичный радиус связанной системы. В предельном случае $\Lambda \rightarrow \infty$, $\varepsilon_B = |M - 2m| \ll M$ эта величина может быть вычислена точно. Действительно, в пределе $\Lambda \rightarrow \infty$, используя (2.5), (2.6), получаем

$$\begin{aligned} \frac{dF(-\vec{\Delta}^2)}{d\vec{\Delta}^2} &= -\frac{1}{8\pi^2} |c|^2 \int_0^\infty z^2 dz \left(-\frac{2}{w} \frac{1}{(M^2 - 4w^2)^3} + \frac{1}{4w^3} \frac{1}{(M^2 - 4w^2)^2} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{16}{3w} z^2 \frac{1}{(M^2 - 4w^2)^4} + \frac{2}{3w^3} z^2 \frac{1}{(M^2 - 4w^2)^3} - \frac{1}{12w^5} z^2 \frac{1}{(M^2 - 4w^2)^2} \right). \end{aligned} \quad (2.7)$$

Записывая выражение $(M^2 - 4w^2)$ в виде

$$(2m - \varepsilon_B)^2 - 2m^2 - 4z^2 \approx -4m\varepsilon_B (1 + (z/(m\varepsilon_B))^2)$$

и вводя новую переменную интегрирования $z' = z/(m\varepsilon_B)$, мы видим, что наиболее сингулярными при $\varepsilon_B \rightarrow 0$ являются первое и третье слагаемые. Переход к пределу $\varepsilon_B \rightarrow 0$ в подынтегральном выражении обоснован, поскольку все интегралы, получающиеся в

результате этого перехода, сходящиеся, а подынтегральная функция не имеет сингулярности в области интегрирования. Выделяя наиболее сингулярные члены и вычисляя оставшийся интеграл, получаем

$$\frac{dF(-\vec{\Delta}^2)}{d\vec{\Delta}^2} = -\frac{|c|^2}{6144\pi} \frac{1}{m^{5/2}\varepsilon_B^{3/2}} + O\left(\left(\frac{\varepsilon_B}{m}\right)^{-1/2}\right). \quad (2.8)$$

Аналогичным образом можно разложить и величину $\frac{dI(M^2)}{dM^2}$ в пределе $\Lambda \rightarrow \infty$. В результате находим

$$I'(M^2) = -\frac{1}{2\pi^2} \int_0^\infty \frac{z^2 dz}{w} \frac{1}{(M^2 - 4w^2)^2} = -\frac{1}{128\pi} \frac{1}{m^{3/2}\varepsilon_B^{1/2}} + O\left(\left(\frac{\varepsilon_B}{m}\right)^{1/2}\right). \quad (2.9)$$

Используя формулы (1.6), для среднеквадратичного радиуса “скалярного дейтрона” получаем хорошо известное выражение $\langle r^2 \rangle = \frac{1}{8m\varepsilon_B}$. Следует отметить, что наличие конечного предела у величины $\langle r^2 \rangle$ при $\Lambda \rightarrow \infty$ не зависит от того, насколько именно мала энергия связи. Поэтому среднеквадратичный радиус можно использовать для определения величины Λ , но лишь при достаточно малых Λ , вдали от асимптотической области. Тем самым оба параметра g и Λ , входящие в определение ядра уравнения БС (1.3), выражаются через известные характеристики связанной системы – массу и среднеквадратичный радиус.

2.2. Квазипотенциальный подход. Основная задача, поставленная в данной работе, – построение итерационной процедуры для расчета электромагнитного формфактора в квазипотенциальном подходе с квазипотенциалом заданного порядка. Для сепарабельного ядра уравнения БС итерационный ряд для формфактора является геометрической прогрессией с тем же знаменателем, что и при расчете массы связанного состояния (1.15). Именно это обстоятельство позволяет решить до конца поставленную выше задачу.

В квазипотенциальном подходе Логунова–Тавхелидзе аналог формулы (2.1) записывается в виде [18]

$$\tilde{T}_\mu(P, Q) = \int (d\chi)_P \bar{\varphi}_P(\chi) \tilde{\Gamma}_\mu(P, \chi; Q, \chi') \tilde{\varphi}_Q(\chi') (d\chi')_Q, \quad (2.10)$$

где

$$\begin{aligned} (d\chi)_P &= \frac{d^4\chi}{(2\pi)^4} \delta(n \cdot \chi), & (d\chi')_Q &= \frac{d^4\chi'}{(2\pi)^4} \delta(n' \cdot \chi'), \\ n_\mu &= \frac{P_\mu}{\sqrt{P^2}}, & n'_\mu &= \frac{Q_\mu}{\sqrt{Q^2}}, \end{aligned} \quad (2.11)$$

$$\tilde{\Gamma}_\mu(P, \chi; Q, \chi') = \int (d\sigma)_P \tilde{G}^{-1}(P; \chi, \sigma) \widetilde{G\Gamma_\mu G}(P, \sigma; Q, \sigma') \tilde{G}^{-1}(Q; \sigma', \chi') (d\sigma')_Q. \quad (2.12)$$

Подставляя в (2.10)–(2.12) приведенные выше выражения для $\tilde{\varphi}$, $\tilde{G}^{-1}$, G , Γ_μ , после несложных преобразований приходим к окончательному результату:

$$\begin{aligned} \tilde{T}_\mu(P, Q) = & -|\tilde{c}|^2 \int (d\chi)_P (d\chi')_Q \tilde{G}_0^{-1}(P, \chi) \tilde{u}(P, \chi) \tilde{G}_0^{-1}(Q, \chi') \tilde{u}(Q, \chi') \times \\ & \times d^{-1}(P^2) \lambda(P^2) d^{-1}(Q^2) \lambda(Q^2) \left(\widetilde{G_0 \Gamma_\mu G_0}(P, \chi; Q, \chi') + \right. \\ & + d(P^2) \tilde{u}(P, \chi) \tilde{R}_\mu(P, Q, \chi') + d(Q^2) \tilde{L}_\mu(P, Q, \chi) \tilde{u}(Q, \chi') - \\ & \left. - d(P^2) d(Q^2) \tilde{u}(P, \chi) \tilde{u}(Q, \chi') |c|^{-2} T_\mu(P, Q) \right), \end{aligned} \quad (2.13)$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{R}_\mu(P, Q, \chi') = & i \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{da}{2\pi} \int \frac{d^4 p'}{(2\pi)^4} v(p') G_0(P, p') \times \\ & \times \Gamma_\mu(P, p'; Q, \chi' + an') G_0(Q, \chi' + an'), \\ \tilde{L}_\mu(P, Q, \chi) = & i \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{da}{2\pi} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} G_0(P, \chi + an) \times \\ & \times \Gamma_\mu(P, \chi + an; Q, p) G_0(Q, p) v(p), \end{aligned} \quad (2.14)$$

а волновая функция связанного состояния $\tilde{u}$ в произвольной системе отсчета имеет вид

$$\begin{aligned} \tilde{u}(P, x) = & \frac{-i\Lambda^2}{w\beta^2} \left(\frac{1}{P^2 - 4w^2} - \frac{1}{P^2 - 4(w + \beta)^2} \right), \\ w = & \sqrt{m^2 - x^2}, \quad \beta = \sqrt{\Lambda^2 - x^2}. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Уравнение (2.13) является основным при построении итерационного ряда для формфактора. Заметим, что на массовой поверхности $P^2 = Q^2 = M^2$ первые три слагаемых в (2.13) обращаются в нуль из-за фактора $d^{-1}(P^2) d^{-1}(Q^2)$ и лишь последнее слагаемое, соответствующее двойному полюсу в формфакторе, дает вклад. В результате, как и ожидалось, имеем (напомним, что $|\tilde{c}|^2 = |c|^2$) $\tilde{T}_\mu(P, Q) = T_\mu(P, Q) = -i(P + Q)_\mu \times (e_1 + e_2) F(\Delta^2)$, т.е. точный формфактор в квазипотенциальном подходе (формфактор, вычисленный с учетом поправок всех порядков к квазипотенциалу) совпадает с формфактором, построенным с помощью волновой функции БС.

Приближение для формфактора, соответствующее квазипотенциалу заданного порядка, как легко проверить, получается из (2.13):

1) разложением множителей $\lambda(P^2)$ и $\lambda(Q^2)$ в ряд по степеням константы связи g (см. (1.15)) с сохранением в подынтегральном выражении всех слагаемых заданного порядка по g (заметим, что $gd^{-1}(P^2)$ и $gd^{-1}(Q^2)$ являются полиномами первой степени по g , а дополнительный множитель g^{-1} сокращается с множителем g , входящим в выражение для λ);

2) переходом на массовую поверхность $P^2 = Q^2 \rightarrow M_n^2$, где M_n^2 – решение уравнения для массы связанного состояния с квазипотенциалом заданного порядка;

3) заменой $|\tilde{c}|^2$ на $|\tilde{c}_n|^2$, где $|\tilde{c}_n|^2$ дается формулой (1.16).

При этом подчеркнем, что, хотя сомножители $\widetilde{G_0\Gamma_\mu G_0}$, $\widetilde{R}_\mu$, $\widetilde{L}_\mu$ и T_μ также явным образом зависят от g через ток взаимодействия (см. (2.2)), при построении формфакторов в заданном порядке по квазипотенциалу вершинный оператор Γ_μ следует рассматривать как заданную величину, не разлагая его по степеням константы связи.

Вычисление входящих в (2.13) интегралов является достаточно трудоемкой задачей. Однако независимо от явного вида этих интегралов мы видим, что итерационный ряд для формфактора сходится при том же предположении $|g(I - \widetilde{I})| < 1$, что и итерационный ряд для массы связанного состояния. Отметим также важное свойство ряда, получающегося разложением (2.13): разложение последнего слагаемого, которое в отличие от остальных в точном решении не обращается в нуль на массовой поверхности, начинается с члена, пропорционального g^2 . Что же касается членов порядка g^0 и g^1 , и в том числе формфактора в так называемом релятивистском импульсном приближении, который наиболее часто используется при описании адронов и который дается слагаемым $\widetilde{G_0\Gamma_\mu G_0}$, они *получаются разложением тех членов (2.13), которые обращаются в нуль в точном формфакторе на массовой поверхности*. В связи с этим обстоятельством, на наш взгляд, естественно возникает вопрос: дает ли импульсное приближение ведущий вклад в точный формфактор связанной системы в квазипотенциальном подходе?

Ниже мы вкратце рассмотрим расчет интегралов, входящих в выражение (2.13), начиная именно со слагаемого, содержащего $\widetilde{G_0\Gamma_\mu G_0}$. Поскольку, как отмечалось выше, тождество Уорда выполняется в целом для вершинного оператора Γ_μ (и $\widetilde{\Gamma}_\mu$), отдельные слагаемые в этом выражении и, очевидно, формфактор в заданном приближении не удовлетворяют условию сохранения тока. Сохраняющаяся (пропорциональная $(P + Q)_\mu$) часть первого слагаемого в (2.13) при $P^2 = Q^2 = M_n^2$ равна

$$-|\widetilde{c}|^2 (d^{-1}(M_n^2)\lambda_n(M_n^2))^2 i(P + Q)_\mu (e_1 + e_2) \left(2\widetilde{T}'_1(\Delta^2) - g\widetilde{I}(M_n^2)\widetilde{T}''_1(\Delta^2) \right), \quad (2.16)$$

где $\widetilde{T}'_1$ соответствует собственно импульсному приближению, а величина $\widetilde{T}''_1$ возникает из тока взаимодействия и определена следующим образом:

$$\begin{aligned} (4M_n^2 - \Delta^2)\widetilde{T}''_1(\Delta^2) = \\ = -\frac{1}{2}(P + Q)^\mu \int \left((d\chi)_P \widetilde{G}_0^{-1}(P, \chi) \widetilde{u} \left(\sqrt{M_n^2}, \chi \right) \widetilde{N}_\mu(P, Q, \chi) + [P \leftrightarrow Q] \right), \end{aligned} \quad (2.17)$$

где

$$\begin{aligned} N_\mu(P, Q, \chi) = \\ = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{da}{2\pi} G_0(P, p) \left(\frac{p_\mu + \frac{\Delta_\mu}{4}}{p \cdot \Delta + \frac{\Delta^2}{4}} \left(v \left(p + \frac{\Delta}{2} \right) - v(p) \right) - [\Delta_\mu \leftrightarrow -\Delta_\mu] \right) \end{aligned} \quad (2.18)$$

и $p_\mu = \chi_\mu + an_\mu$. Нетрудно убедиться, что оба слагаемых в (2.16) и (2.17) вносят одинаковый вклад. Следовательно, можно рассматривать только первые слагаемые, которые

можно вычислить в системе отсчета $P_\mu = (M_n, \vec{0})$, $Q_\mu = (\sqrt{M_n^2 + \vec{\Delta}^2}, \vec{\Delta})$. В результате получаем

$$\begin{aligned} \tilde{T}_1''(\Delta^2) = & -i \int \frac{d^3 \vec{z}}{(2\pi)^3} \int \frac{dz_0}{2\pi i} \Lambda^2 \tilde{G}_0^{-1}(\sqrt{M_n^2}, \vec{z}) \tilde{u}(\sqrt{M_n^2}, \vec{z}) G_0(\sqrt{M_n^2}, z) \times \\ & \times \frac{\frac{z_0}{M} + \frac{2}{4M_n^2 - \Delta^2}(\vec{z} \cdot \vec{\Delta})}{\left[\left(z_0 - \frac{\Delta^2}{4} \right)^2 - \left(\vec{z} - \frac{\vec{\Delta}}{2} \right)^2 - \Lambda^2 + i0 \right] [z_0^2 - \vec{z}^2 - \Lambda^2 + i0]}. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Выражение для $\tilde{T}_1'(\Delta^2)$ нетрудно привести к следующему виду:

$$\begin{aligned} \tilde{T}_1'(\Delta^2) = & \frac{i}{4} (2\pi)^4 \int \frac{d^4 \chi}{(2\pi)^4} \frac{d^4 \omega}{(2\pi)^4} \int \frac{d\sigma}{2\pi i} \frac{d\rho}{2\pi i} \times \\ & \times \tilde{G}_0^{-1}(\sqrt{M_n^2}, \chi) \tilde{u}(\sqrt{M_n^2}, \chi) \tilde{G}_0^{-1}(\sqrt{M_n^2}, \omega) \tilde{u}(\sqrt{M_n^2}, \omega) \delta(n \cdot \chi) \delta(n' \cdot \omega) \times \\ & \times \left\{ \frac{\delta(n\sigma + \chi - n'\rho - \omega + \frac{\Delta}{2}) \left(\frac{1}{2} + \frac{\sigma}{M_n} + \left(1 - \frac{(PQ)}{M_n^2} \right) \frac{M_n}{N^2} (n' \cdot \chi) \right)}{\left[\left(\frac{M_n}{2} + \sigma \right)^2 + \chi^2 - m^2 + i0 \right] \left[\left(\frac{M_n}{2} + \rho \right)^2 + \omega^2 - m^2 + i0 \right]} \times \right. \\ & \left. \times \frac{1}{\left[\left(\frac{M_n}{2} - \rho \right)^2 + \omega^2 - m^2 + i0 \right]} + [\sigma \leftrightarrow -\rho, \chi \leftrightarrow -\omega, n' \leftrightarrow n] \right\}, \\ & N^2 = M_n^2 - \frac{(PQ)^2}{M_n^2}. \end{aligned} \quad (2.20)$$

Оба слагаемых в (2.20) вносят одинаковый вклад, поэтому мы можем ограничиться рассмотрением только первого из них. Проведя интегрирование по переменным χ, σ с помощью δ -функции, переходя в систему Брейта и преобразуя переменные интегрирования согласно формулам [18]

$$\begin{aligned} \omega_0 = & \frac{1}{M_n} \left(E_n z_0 + \frac{1}{2} (\vec{\Delta} \cdot \vec{z}) \right), \quad \vec{\omega} = \frac{z_0}{2M_n} \vec{\Delta} + \vec{z} + \frac{1}{4M_n(E_n + M_n)} \vec{\Delta} (\vec{\Delta} \cdot \vec{z}), \\ & E_n = \sqrt{M_n^2 + \frac{\vec{\Delta}^2}{4}}, \end{aligned} \quad (2.21)$$

мы получаем

$$\begin{aligned} \tilde{T}'_1(\Delta^2) = & -\frac{i}{2M_n} \int \frac{d^3 \vec{z}}{(2\pi)^3} \tilde{G}_0^{-1}(\sqrt{M_n^2}, \vec{z}) \tilde{u}(\sqrt{M_n^2}, \vec{z}) \times \\ & \times \left\{ \left[\frac{M_n}{2} \left(1 - \frac{\vec{\Delta}^2}{2M_n^2} \right) + \frac{E_n}{M_n^2} (\vec{\Delta} \cdot \vec{z}) + \right. \right. \\ & + \frac{1}{2} \frac{M_n^2}{M_n^2 - \frac{\vec{\Delta}^2}{4}} \left(- \left(1 + \frac{\vec{\Delta}^2}{2M_n^2} \right) \frac{E_n}{M_n^2} (\vec{\Delta} \cdot \vec{z}) + \frac{\vec{\Delta}^2}{2M_n^3} E_n^2 \right) \Big] U_0 + \\ & \left. + \left[\left(1 + \frac{\vec{\Delta}^2}{2M_n^2} \right) - \frac{\vec{\Delta}^2}{2M_n^2} \frac{E_n^2}{M_n^2 - \frac{\vec{\Delta}^2}{4}} \right] U_1 \right\}, \end{aligned} \quad (2.22)$$

где

$$\begin{aligned} U_{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}} = & -i \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\rho}{2\pi i} \frac{\tilde{G}_0^{-1}(\sqrt{M_n^2}, \vec{z}_\Delta) \tilde{u}(\sqrt{M_n^2}, \vec{z}_\Delta) G_0(\sqrt{M_n^2}, \rho, \vec{z})}{\left[\left(\frac{M_n}{2} + \rho + \frac{\vec{\Delta}^2}{2M_n} \right)^2 - \left(\vec{z} - \frac{E_n}{M_n} \vec{\Delta} \right)^2 - m^2 + i0 \right]} \begin{pmatrix} 1 \\ \rho \end{pmatrix}, \\ \vec{z}_\Delta = & \vec{z} + \vec{\Delta} \left[\frac{(\vec{\Delta} \cdot \vec{z})}{2M_n^2} - \frac{E_n}{M_n^2} \left(\frac{M_n}{2} - \rho \right) \right]. \end{aligned} \quad (2.23)$$

Следует отметить, что, вообще говоря, величины U_0 , U_1 являются комплексными, т.к. величина $\vec{z}_\Delta^2$ зависит от переменной интегрирования ρ , и, замыкая контур интегрирования в верхней или нижней полуплоскости, мы наталкиваемся на разрывы подынтегральной функции.

Член, пропорциональный $(P + Q)_\mu$ в выражении для $\tilde{L}_\mu + \tilde{R}_\mu$, приводится к виду

$$|\tilde{c}|^2 i \tilde{I}(M_n^2) d^{-1}(M_n^2) (\lambda(M_n^2))^2 i(P + Q)_\mu (e_1 + e_2) \left(\tilde{T}'_2(\Delta^2) - g \tilde{I}(M_n^2) \tilde{T}''_2(\Delta^2) \right), \quad (2.24)$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{T}'_1(\Delta^2) = & \tilde{T}''_1(\Delta^2) - i \int \frac{d^3 \vec{z}}{(2\pi)^3} \int \frac{dz_0}{2\pi i} \Lambda^2 \tilde{G}_0^{-1}(\sqrt{M_n^2}, \vec{z}) \tilde{u}(\sqrt{M_n^2}, \vec{z}) G_0(\sqrt{M_n^2}, z) \times \\ & \times \frac{1 + \frac{2z_0}{M} + \frac{4}{4M_n^2 - \Delta^2} (\vec{z} \cdot \vec{\Delta})}{\left[\left(z_0 - \frac{\Delta^2}{4M_n} \right)^2 - \left(\vec{z} - \frac{\vec{\Delta}}{2} \right)^2 - \Lambda^2 + i0 \right]} \times \\ & \times \frac{1}{\left[\left(\frac{M_n}{2} - \frac{\Delta^2}{2M_n} + z_0 \right)^2 - w^2 (\vec{z} - \vec{\Delta})^2 + i0 \right]}, \end{aligned} \quad (2.25)$$

и в системе Брейта

$$\begin{aligned}
 2E\tilde{T}_2''(\Delta^2) = & \\
 = -i \int \frac{d^4 z}{(2\pi)^4} & \frac{2z_0 v \left(z + \frac{\Delta}{4}\right) v \left(z - \frac{\Delta}{4}\right)}{\left[\left(\frac{P+Q}{4} - z\right)^2 - m^2 + i0\right]} \times \\
 & \times \frac{1}{\left[\left(\frac{P+Q}{4} + z - \frac{\Delta}{2}\right)^2 - m^2 + i0\right] \left[\left(\frac{P+Q}{4} + z + \frac{\Delta}{2}\right)^2 - m^2 + i0\right]} + \\
 & + i \int \frac{d^4 z}{(2\pi)^4} \frac{z_0}{-\vec{z} \cdot \vec{\Delta}} \left[v^2 \left(z - \frac{\Delta}{4}\right) G_0 \left(P, z - \frac{\Delta}{4}\right) - \right. \\
 & \left. - v^2 \left(z + \frac{\Delta}{4}\right) G_0 \left(Q, z + \frac{\Delta}{4}\right) \right]. \quad (2.26)
 \end{aligned}$$

Собирая вместе все слагаемые в формуле (2.13), пропорциональные $(P + Q)_\mu$, окончательно получаем

$$\begin{aligned}
 \tilde{T}_\mu^{(n)}(P, Q) = & -i(P + Q)_\mu (e_1 + e_2) |\tilde{c}_n|^2 \left[1 - \lambda_n(M_n^2) \tilde{I}(M_n^2) \right]^2 \times \\
 & \times \left\{ 2\tilde{T}'_1(\Delta^2, M_n^2) - g\tilde{I}(M_n^2)\tilde{T}''_1(\Delta^2, M_n^2) - \right. \\
 & - \tilde{I}(M_n^2)d(M_n^2)\tilde{T}'_2(\Delta^2, M_n^2) + g\tilde{I}^2(M_n^2)d(M_n^2)\tilde{T}''_2(\Delta^2, M_n^2) + \\
 & \left. + |c(M_n^2)|^{-2}d^2(M_n^2)\tilde{I}^2(M_n^2)F(\Delta^2, M_n^2) \right\}_{\text{до членов } g^n} + \dots = \\
 = & -i(P + Q)_\mu \tilde{T}^{(n)}(\Delta^2), \quad (2.27)
 \end{aligned}$$

где многоточием обозначены члены, пропорциональные Δ_μ .

Для иллюстрации выпишем несколько первых членов итерационного ряда для электромагнитного формфактора, раскладывая (2.27) в ряд по степеням g и учитывая (1.15). В результате имеем:

1) импульсное приближение: волновая функция строится при помощи квазипотенциала первого порядка, а в вершинном операторе $\tilde{\Gamma}_\mu$ учтены члены порядка g^0 :

$$\tilde{T}^{\text{imp}}(\Delta^2) = -\frac{1}{\tilde{I}'(M_1^2)} \left(2\tilde{T}'_1(\Delta^2, M_1^2) + \tilde{T}''_1(\Delta^2, M_1^2) \right); \quad (2.28a)$$

2) первое приближение: волновая функция строится при помощи квазипотенциала первого порядка, а в вершинном операторе $\tilde{\Gamma}_\mu$ учтены члены порядка g^1 :

$$\begin{aligned}
 \tilde{T}^{(1)}(\Delta^2) = & -\frac{1}{\tilde{I}'(M_1^2)} \left(-2\tilde{T}'_1(\Delta^2, M_1^2) - \tilde{T}''_1(\Delta^2, M_1^2) + \right. \\
 & \left. + \tilde{T}'_2(\Delta^2, M_1^2) + \tilde{T}''_2(\Delta^2, M_1^2) \right); \quad (2.28b)
 \end{aligned}$$

3) второе приближение: волновая функция и вершинный оператор вычисляются во втором приближении по квазипотенциалу:

$$\begin{aligned} \tilde{T}^{(2)}(\Delta^2) = & -\frac{1}{\tilde{I}'(M_2^2) + g^2 \tilde{I}^2(M_2^2) \left(I'(M_2^2) - \tilde{I}'(M_2^2) \right)} \times \\ & \times \left(-I'(M_2^2) F(\Delta^2, M_2^2) - g^2 \tilde{I}(M_2^2) \right) \left(I(M_2^2) - \tilde{I}(M_2^2) \right) \left(1 - g \tilde{I}(M_2^2) \right) \times \\ & \times \left(-I'(M_2^2) F(\Delta^2, M_2^2) + 2\tilde{T}'_1(\Delta^2, M_2^2) - g \tilde{I}(M_2^2) \tilde{T}''_1(\Delta^2, M_2^2) - \right. \\ & \left. - \tilde{T}'_2(\Delta^2, M_2^2) + g \tilde{I}(M_2^2) \tilde{T}''_2(\Delta^2, M_2^2) \right). \end{aligned} \quad (2.28\text{в})$$

Как видно из формул (2.28а)–(2.28в), формфактор во втором приближении состоит из суммы $F(\Delta^2, M_2^2)$ и произведения некоего выражения на фактор $g(I - \tilde{I})$, который интерпретируется как мера величины эффекта запаздывания. Как очевидно из формулы (2.27), подобная структура сохранится и в последующих приближениях с заменой $g(I - \tilde{I})$ на $(g(I - \tilde{I}))^n$ и M_2^2 на M_n^2 , где n – порядок приближения. Учитывая, что $F(\Delta^2, M_n^2)$ при $M_n^2 \rightarrow M^2$ стремится к точному формфактору связанной системы, построенному в четырехмерном формализме БС, можно заключить, что квазипотенциальное приближение порядка выше первого для формфактора связанной системы является хорошим приближением при условии малости эффекта запаздывания в спектре масс связанной системы.

2.3. Статическое приближение. Сложность расчета формфактора связанной системы в статическом приближении состоит в незнании явного вида вершинного оператора Γ_μ в этом приближении. Непосредственный вывод выражения для Γ_μ из ядра уравнения БС, подразумевающий введение взаимодействия с электромагнитным полем методом минимальной связи [19], в статическом пределе наталкивается на трудность, связанную со сложной нелинейной зависимостью потенциала от 4-импульсов входящих и выходящих частиц. Поэтому в данной работе мы выбираем следующее выражение для вершинного оператора в формфакторе связанной системы:

$$T_\mu^{\text{st}} = |c_{\text{st}}|^2 \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} v(p_2) G_0(P, p) \Gamma_\mu^{\text{st}}(P, p; Q, q) G_0(Q, q) v(q_1) \frac{d^4 q}{(2\pi)^4}, \quad (2.29)$$

где Γ_μ^{st} получается из Γ_μ (2.2) при помощи замен $p \rightarrow p_1$, $q \rightarrow q_1$, $\Delta \rightarrow \Delta_1$ и $p \rightarrow p_2$, $q \rightarrow q_2$, $\Delta \rightarrow \Delta_2$ соответственно в первом и втором слагаемых, описывающих ток взаимодействия, здесь

$$\begin{aligned} p_1 &= p - n'(n'p), & q_1 &= q - n'(n'q), & \Delta_1 &= \Delta - n'(n'\Delta), \\ p_2 &= p - n(np), & q_2 &= q - n(nq), & \Delta_2 &= \Delta - n(n\Delta). \end{aligned} \quad (2.30)$$

Легко проверить, что на массовой поверхности $P^2 = Q^2 = M_0^2$ вершинная функция (2.29)–(2.30) удовлетворяет условиям сохранения тока и нормировки при $\Delta^2 = 0$:

$$\begin{aligned} \Delta^\mu T_\mu^{\text{st}}(P, Q) = 0 & \Rightarrow T_\mu^{\text{st}}(P, Q) = -i(P + Q)_\mu (e_1 + e_2) F^{\text{st}}(\Delta^2), \\ [F^{\text{st}}(\Delta^2) = F_1^{\text{st}}(\Delta^2) + F_2^{\text{st}}(\Delta^2) + F_3^{\text{st}}(\Delta^2)] \Big|_{\Delta^2=0} &= 1. \end{aligned} \quad (2.31)$$

После несложных преобразований получаем

$$F_{\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \end{smallmatrix}\right)}^{\text{st}}(\Delta^2) = \frac{i}{2}|c_{\text{st}}|^2 \int \frac{d^4 z}{(2\pi)^4} v\left(z_2 - \frac{\Delta_2}{4}\right) G_0\left(P, z - \frac{\Delta}{4}\right) \times \\ \times G_0\left(Q, z + \frac{\Delta}{4}\right) v\left(z_1 + \frac{\Delta_1}{4}\right) \times \\ \times \left[\left(\frac{P+Q}{4} - z\right)^2 - m^2 \right] \left(((P+Q)z)/(M_0^2 - \Delta^2/4) \right), \quad (2.32)$$

$$(4M_0^2 - \Delta^2)F_2^{\text{st}}(\Delta^2) = -\frac{i|c_{\text{st}}|^2}{2} \int \frac{d^4 z}{(2\pi)^4} \times \\ \times \left\{ v(z_2)G_0(P, z) \left(v\left(z_1 + \frac{\Delta_1}{2}\right) + v\left(z_1 - \frac{\Delta_1}{2}\right) - 2v(z_1) \right) + \right. \\ \left. + \left(v\left(z_2 - \frac{\Delta_2}{2}\right) + v\left(z_2 + \frac{\Delta_2}{2}\right) - 2v(z_2) \right) G_0(Q, z)v(z_1) \right\}. \quad (2.33)$$

Первые два слагаемых легко вычисляются в системе Брейта:

$$F_{\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \end{smallmatrix}\right)}^{\text{st}}(\Delta^2) = -\frac{\Lambda^4}{2}|c_{\text{st}}|^2 \int \frac{d^3 \vec{z}}{(2\pi)^3} \int \frac{dz_0}{2\pi i} \frac{1}{A(E, z)B(E, \vec{\Delta}, z)} \times \\ \times \frac{\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 2z_0/E_0 \end{smallmatrix}\right)}{\left[\left(\alpha(z_0) + \frac{E_0}{M_0}(\vec{z} \cdot \vec{n}_\Delta) \right)^2 + \beta_\Delta^2 - i0 \right] \left[\left(\alpha(z_0) - \frac{E_0}{M_0}(\vec{z} \cdot \vec{n}_\Delta) \right)^2 + \beta_\Delta^2 + i0 \right]}, \quad (2.34) \\ \alpha(z_0) = \frac{|\vec{\Delta}|}{2M_0}z_0 + \frac{|\vec{\Delta}|E_0}{4M_0}, \quad \beta_\Delta^2 = \Lambda^2 + \vec{z}^2 - (\vec{z} \cdot \vec{n}_\Delta)^2, \\ \vec{n}_\Delta = \frac{\vec{\Delta}}{|\vec{\Delta}|}, \quad E_0 = \sqrt{M_0^2 + \frac{\vec{\Delta}^2}{4}},$$

а функции A и B определены в (2.6).

Величину $F_3^{\text{st}}(\Delta^2)$ легче всего вычислить в системе покоя связанной системы. Поскольку, как легко проверить, оба слагаемых в (2.33) дают одинаковый вклад, мы ограничимся вычислением лишь первого из них. Выбирая систему отсчета $P_\mu = (M_0, \vec{0})$ и определив

$$k = \frac{\sqrt{\Delta^2(\Delta^2 - 4M_0^2)}}{2M_0}, \quad \Theta(z_0) = \frac{k}{M_0}z_0 - \frac{E_0}{M_0}(\vec{z} \cdot \vec{n}_\Delta), \quad (2.35)$$

получаем

$$(4M_0^2 - \Delta^2)F_3^{\text{st}}(\Delta^2) = -\frac{i}{2}|c_{\text{st}}|^2 \int \frac{d^3 \vec{z}}{(2\pi)^3} v(\vec{z}) \int \frac{dz_0}{2\pi i} G_0\left(\sqrt{M_0^2}, z\right) \Lambda^2 \times \\ \times \left(\frac{1}{-\left(\Theta(z_0) - \frac{k}{2}\right)^2 - \beta_\Delta^2 + i0} + \frac{1}{-\left(\Theta(z_0) + \frac{k}{2}\right)^2 - \beta_\Delta^2 + i0} - \right. \\ \left. - \frac{2}{-\left(\Theta(z_0)\right)^2 - \beta_\Delta^2 + i0} \right). \quad (2.36)$$

Как легко видеть, величины $F_i^{\text{st}}(\Delta^2)$, вообще говоря, являются комплексными из-за того, что часть полюсов в подынтегральных выражениях, которые возникают из-за нулей в знаменателях функции $v(z)$, находятся не на действительной оси.

3. РЕЗУЛЬТАТЫ И ОБСУЖДЕНИЕ

Как было показано выше, итерационный ряд для электромагнитного формфактора связанной системы, вычисленного в заданном приближении по квазипотенциалу, сходится к своему точному значению (к значению, вычисленному в рамках 4-мерного формализма БС) при тех же предположениях, при которых сходится и итерационный ряд для массы связанной системы (по крайней мере, в модели с сепарабельным ядром взаимодействия). При этом, однако, структура итерационного ряда для формфактора такова, что первые два члена этого ряда не содержат “естественного параметра малости” $g(I - \tilde{I})$, характеризующего величину эффекта запаздывания, и поэтому могут сильно отличаться от точного решения, даже если $|g(I - \tilde{I})| \ll 1$. В связи с этим, как отмечалось выше, ставится вопрос, является ли обоснованным описание формфактора связанной системы в первом приближении (импульсное приближение) даже в том случае, если эффект запаздывания в спектре масс связанной системы был оценен и оказался малым.

Общий ответ на данный вопрос, очевидно, зависит от детальных характеристик системы. В рамках используемой в данной работе модели с сепарабельным ядром уравнения БС с помощью численных методов мы исследовали электромагнитный формфактор “скалярного дейтрона” в двух предельных случаях $|\varepsilon_B/M| \ll 1$ и $|\varepsilon_B/M| \sim 1$. Для обоих случаев был изучен интервал изменения параметра Λ (и соответственно $\langle r^2 \rangle$), от $\Lambda \gg M$ ($\langle r^2 \rangle$ стремится к своему предельному значению) до $\Lambda \ll M$ ($\langle r^2 \rangle$ большое).

В таблице и на рисунке приведены некоторые результаты расчета спектра масс и среднеквадратичного радиуса связанной системы при двух “затравочных” значениях энергии связи $\varepsilon_B = 2.2245$ МэВ (энергия связи реального дейтрона) и $\varepsilon_B = 100$ МэВ и для двух предельных значений параметра Λ : жесткий предел $\Lambda = 10$ ГэВ и мягкий предел $\Lambda = 0.4$ ГэВ. В таблице $\varepsilon_B^{(1)}$ — это энергия связи в первом квазипотенциальном приближении, $\varepsilon_B^{(2)}$ — энергия связи во втором квазипотенциальном приближении, $\varepsilon_B^{\text{st}}$ — энергия связи в статическом приближении.

Параметры	$\varepsilon_B^{(1)}$, МэВ	$\varepsilon_B^{(2)}$, МэВ	$\varepsilon_B^{(st)}$, МэВ	$\langle r^2 \rangle$, Ф ²
$\varepsilon_B = 2.2245$, $\Lambda = 10.0$	1.07	2.21	31.0	2.47
$\varepsilon_B = 2.245$, $\Lambda = 0.4$	1.84	2.22	4.60	3.28
$\varepsilon_B = 100$, $\Lambda = 10.0$	87.5	99.9	250	0.0787
$\varepsilon_B = 100$, $\Lambda = 0.4$	89.7	99.4	160	0.268

Результаты расчета электромагнитного формфактора “скалярного дейтрона” в области $0 \leq -\Delta^2 < 2$ ГэВ для различных значений параметров модели даны на рисунке. Из данных таблицы и рисунка сделаны следующие выводы:

Графики зависимости действительной части электромагнитного формфактора “скалярного дейтрона” от параметров модели: кривая 1 – точное выражение в 4-мерном формализме БС, 2 – импульсное приближение (2.28а), 3 – первое квазипотенциальное приближение (2.28б), 4 – второе квазипотенциальное приближение (2.28в), 5 – статическое приближение, 6 – статическое приближение без учета тока взаимодействия

• Как для спектра масс, так и для формфактора квазипотенциальный итерационный ряд быстро сходится, так что уже во втором приближении по квазипотенциалу результаты практически совпадают с точным ответом, полученным в 4-мерном подходе БС. Заметим при этом, что вопреки ожиданию статическое приближение для энергии связи является довольно плохим даже при $|\varepsilon_B/M| \ll 1$. Ток взаимодействия, как и ожидалось, вносит пренебрежимо малый вклад в формфактор в пределе точечной связи ($\Lambda \rightarrow \infty$), однако этот вклад довольно существен при малых Λ (большие $\langle r^2 \rangle$) и растет с увеличением Δ^2 (на рисунке приведены результаты расчета вклада тока взаимодействия только в статическом пределе).

• Как мы и ожидали, из теоретического анализа итерационного ряда для формфакто-

ра первые два члена этого ряда оказались как бы “выбитыми” из общей закономерности: при малых Λ^2 хорошее описание дается первым квазипотенциальным приближением, тогда как при больших Λ^2 импульсное приближение лучше описывает точный ответ. Результаты численного анализа подтверждают заключение, что регулярный итерационный ряд для формфактора начинается не с члена порядка g^0 , соответствующего импульсному приближению, а с члена порядка g^2 .

• Использование вершинного оператора, предложенного в данной работе для расчета формфактора в статическом пределе, дает хорошее описание точного результата при малых Λ^2 . Отметим, что это соответствует случаю, когда величина $\langle r^2 \rangle$ намного превышает то предельное теоретическое значение, которое получается из расчетов в предположении элементарности “дейтрона”, и, таким образом, значение величины $\langle r^2 \rangle$, полученное из численного анализа, может а posteriori служить критерием для проверки точности приближения. Заметим при этом, что при таких $\langle r^2 \rangle$, как видно из рисунка, нельзя пренебрегать током взаимодействия, который вносит существенный вклад в формфактор заряженной частицы.

Заключительное замечание касается случая, когда взаимодействие двух частиц, образующих связанную систему, описывается несепарабельным ядром $gv(p)v(p') \rightarrow K(p, p')$. В статическом приближении слагаемое в вершинном операторе, соответствующее току взаимодействия, обобщается непосредственно при помощи приведенной выше подстановки. Легко проверить, что электромагнитный формфактор, построенный с использованием такого вершинного оператора, удовлетворяет условиям поперечности и нормировки. Следовательно, его можно использовать в расчетах электромагнитных свойств связанных систем в реалистических моделях.

Авторы (Е.Л. и А.Р.) выражают благодарность В.Гарсеванишвили, Г.Джибути и Н.Кикнадзе за полезные обсуждения во время выполнения работы.

Список литературы

- [1] *I.Tamm*. J. Phys. (USSR). 1945. V. 9. P. 449; *S.M.Dancoff*. Phys. Rev. 1950. V. 78. P. 382.
- [2] *S.J.Brodsky et al.* The challenge of light-cone quantization of gauge field theory: Preprint SLAC-PUB-5811.
- [3] *В.В.Анисович*. В кн.: Материалы XX зимней школы ЛИЯФ. Л.: Изд. ЛИЯФ, 1985. С. 3.
- [4] *B.L.G.Bakker, L.A.Kondratyuk, M.V.Terent'ev*. Nucl. Phys. 1979. V. B158. P. 497; *H.Sazdjian*. Phys. Rev. 1986. V. D33. P. 3401, 3425, 3435.
- [5] *Y.Nambu, G.Jona-Lazinio*. Phys. Rev. 1961. V. 122. P. 345; *S.P.Klevansky*. Rev. Mod. Phys. 1992. V. 64. P. 649.
- [6] *T.Goldman, R.W.Haymaker*. Phys. Rev. 1981. V. D24. P. 724; *I.Anikin, M.Ivanov, N.Kulimanova, V.Luybovitskij*. Z. Phys. 1995. V. C65. P. 681; ЯФ. 1994. Т. 57. С. 1082.
- [7] *G.V.Efimov, M.A.Ivanov*. The quark confinement model of hadrons. Bristol, Philadelphia: IOP, 1993; *G.V.Efimov, S.N.Nedelko*. Phys. Rev. 1995. V. D51. P. 174.
- [8] *K.Hayashi et al.* Fortsch. Phys. 1967. B. 15. S. 625.
- [9] *E.E.Salpeter, H.A.Bethe*. Phys. Rev. 1951. V. 84. P. 1232.
- [10] *K.Huang, H.A.Weldon*. Phys. Rev. 1975. V. D11. P. 257.
- [11] *A.A.Logunov, A.N.Tavkhelidze*. Nuovo Cim. 1963. V. 29. P. 380.
- [12] *R.Blankenbecler, R.Sugar*. Phys. Rev. 1966. V. 142. P. 1051; *F.Gross*. Phys. Rev. 1966. V. 142. P. 1951.

- [13] *V.G.Kadyshevsky*. Nucl. Phys. 1968. V. B6. P. 125; *В.А.Карманов*. ЭЧАЯ. 1988. Т. 19. С. 525.
- [14] *E.E.Salpeter*. Phys. Rev. 1952. V. 87. P. 328.
- [15] *T.Kopaleishvili, A.Rusetsky*. In: Talk presented at the International Symposium on "Clusters in Hadrons and Nuclei". Tübingen, Germany, July 15–17, 1991; *Т.Копалейшвили, А.Русецкий*. ЯФ. 1993. Т. 56. № 7. С. 168; 1996. Т. 59. С. 914; *T.Kopaleishvili, A.Rusetsky*. Nucl. Phys. 1995. V. A587. P. 758; Phys. Rev. D (submitted for publication).
- [16] *N.Brambilla, G.M.Prosperi*. Phys. Rev. 1992. V. D46. P. 1096; 1993. V. D48. P. 2360.
- [17] *В.Р.Гарсеванишвили, В.А.Матвеев, Л.А.Слепченко*. Релятивистская задача двух тел с сепарабельным взаимодействием. Сообщения ОИЯИ, P2–3865. Дубна, 1968.
- [18] *Р.Н.Фаустов*. ТМФ. 1970. Т. 3. С. 240; *R.N.Faustov*. Ann. Phys. 1973. V. 78. P. 176; *В.Р. Гарсеванишвили, А.Н.Квинихидзе, В.А.Матвеев, А.Н.Тавхелидзе, Р.Н.Фаустов*. ТМФ. 1975. Т. 23. С. 310; *В.Р.Гарсеванишвили, В.А.Матвеев*. ТМФ. 1975. Т. 24. С. 3.
- [19] *H.Ito, W.W.Buck, F.Gross*. Phys. Rev. 1991. V. C43. P. 2483; 1992. V. C45. P. 1918; Phys. Lett. 1992. V. B287. P. 23.

Поступила в редакцию 6.V.1996 г.

T. Kopaleishvili, E. Lipartia, A. Rusetsky
ON RETARDATION EFFECT IN THE
FORMFACTOR OF TWO-PARTICLE BOUND STATE

In the Logunov–Tavkhelidze quasipotential approach the convergence of the iteration procedure corresponding to the account of the dynamical retardation effect in the electromagnetic formfactor of the two scalar particle bound state with the separable Bethe–Salpeter kernel is investigated. The status of the relativistic momentum approximation within the framework of this approach is discussed. In the static approximation the electromagnetic vertex operator obeying the current conservation and normalization conditions is constructed with regard to the interaction current. The comparative analysis of the formfactor in the different approximations is done.