Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Б. М. Зупник, $N = 4$ мультиплеты в $N = 3$ гармоническом суперпространстве,
ТМФ, 2004, том 140, номер 2, 269–283

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf97>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и
согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.197.130.99

26 апреля 2023 г., 11:35:53

$N = 4$ МУЛЬТИПЛЕТЫ В $N = 3$ ГАРМОНИЧЕСКОМ СУПЕРПРОСТРАНСТВЕ

Показано, что $N = 3$ гармонические суперполевые уравнения движения инвариантны относительно 4-й суперсимметрии. $SU(3)$ -гармоники также используются для анализа более гибкой формы суперполевых связей абелевого $N = 4$ векторного мультиплета и его $N = 3$ разложения. Альтернативное необычное представление $N = 4$ суперсимметрии реализовано на бесконечных мультиплетах аналитических суперполей в $N = 3$ гармоническом суперпространстве. $U(1)$ -заряды суперполей в этих мультиплетах параметризуются целочисленным параметром, который играет роль дискретной координаты. Каждый суперполевой член $N = 3$ действия Янга–Миллса имеет бесконечномерное $N = 4$ обобщение. Калибровочная группа этой модели содержит бесконечное число суперполевых параметров.

Ключевые слова: расширенная суперсимметрия, суперпространство, калибровочные суперполя.

1. ВВЕДЕНИЕ

Теория Янга–Миллса в гармоническом $D = 4$, $N = 3$ суперпространстве была построена в работе [1] (см. также работы [2], [3] и книгу [4]). В этом подходе физические компонентные поля $N = 3$ векторного мультиплета включены в геометрические суперполя, которые имеют вне массовой поверхности бесконечное число вспомогательных полей. Суперполевая геометрия $N = 3$ калибровочной теории основана на сохранении грасмановой аналитичности, а суперполевые уравнения движения представляют собой условия нулевой кривизны для основных суперполей (гармонических потенциалов) этой теории. Внемассовая структура $N = 3$ гармонических суперполей играет важную роль, в частности, при построении $N = 3$ аналога действия Борна–Инфельда [5].

$N = 4$ векторный мультиплет рассматривался в рамках $SU(4)$ -гармонического суперпространства [6]–[8]. В этом весьма сложном гармоническом формализме удается построить гармоническую проекцию суперполевых напряженностей, удовлетворяющую простым уравнениям движения, однако никто не знает, как решить проблемы построения соответствующего суперполевого действия. Не исключено, что эти проблемы связаны с явной $SU(4)$ -инвариантностью и высокой размерностью грасмановой части

* Лаборатория теоретической физики им. Н. Н. Боголюбова, Объединенный институт ядерных исследований, Дубна, Московская обл, Россия. E-mail: zupnik@thsun1.jinr.ru

$N = 4$ суперпространства. Мы рассматриваем более гибкое $N = 3$ суперпространство и анализируем различные реализации $N = 4$ суперсимметрии на $N = 3$ суперполях и уравнениях движения. В частности, предлагается $N = 4$ инвариантное обобщение действия $N = 3$ калибровочной теории для бесконечного мультиплета суперполей.

Хорошо известно, что физические полевые компоненты $N = 3$ и $N = 4$ векторных мультиплетов полностью идентичны, однако преобразования $N = 4$ суперсимметрии для этих компонент образуют замкнутую алгебру на уравнениях движения. $N = 4$ теория Янга–Миллса может быть также построена в $N = 2$ гармоническом суперпространстве [4], но алгебра дополнительных преобразований суперсимметрии в этой формулировке замыкается только на массовой поверхности.

Раздел 2 посвящен $N = 4$ суперсимметрии, реализованной на суперполевых решениях $N = 3$ уравнений движения. Мы строим дополнительные спинорные преобразования $N = 3$ суперполевых напряженностей и потенциалов на массовой поверхности. Показано, что абелевы и неабелевы калибровочные уравнения в $N = 3$ суперпространстве инвариантны относительно 4-й суперсимметрии.

Суперполевые $N = 4$ уравнения (связи) в стандартном суперпространстве можно разложить по четвертой спинорной координате для изучения $N = 4$ преобразований калибровочных $N = 3$ суперполей и решений связей со скрытой $SU(4)$ -симметрией. В разделе 3 мы анализируем $SU(3)$ -ковариантное представление $N = 4$ суперполевых связей для абелевого калибровочного мультиплета. Можно пытаться использовать $SU(3)/U(1) \times U(1)$ -гармоники, чтобы понять геометрический смысл этих уравнений и их связь с $N = 3$ гармоническим суперпространством. Разложение $N = 4$ суперполей по четвертой спинорной координате позволяет изучать $N = 4$ преобразования калибровочных $N = 3$ полей. Следует сказать, что мы не нашли подходящего действия без лагранжевых множителей в этом подходе.

В работе [9] $N = 4$ суперсимметрия с центральными зарядами реализована на бесконечном множестве киральных $N = 2$ суперполей, которые могут быть нелинейно выражены через одно киральное $N = 2$ суперполе, описывающее частичное спонтанное нарушение $N = 4$ суперсимметрии. В $SU(4)$ -гармоническом формализме [8] также можно определить геометрические $N = 4$ суперполя, в разложениях которых появляются бесконечные мультиплеты $N = 3$ суперполей разных размерностей. $N = 3$ гармоническое суперпространство дает нам более простую возможность реализовать преобразования $N = 4$ суперсимметрии и соответствующий вариант суперполевой геометрии. В разделе 4 мы изучаем $N = 4$ преобразования на бесконечном множестве $N = 3$ суперполей, параметризованном целочисленным параметром k , который играет роль вспомогательной дискретной координаты. Четвертое спинорное преобразование на этом множестве содержит спинорные производные, сохраняющие грасманову аналитичность. Правило умножения для бесконечных $N = 4$ мультиплетов используется при построении $N = 4$ инвариантного обобщения $N = 3$ действия Янга–Миллса. Мы исследуем также калибровочную инвариантность этого действия. Классические уравнения для дополнительных $N = 3$ суперполей могут иметь нетривиальные решения, поэтому непротиворечивость модели с бесконечным числом суперполей на квантовом уровне и ее связь с $N = 3$ калибровочной теорией требуют дополнительного анализа. Рассмотрена также воз-

возможность “укороченных” реализаций $N = 4$ суперсимметрии на конечном числе $N = 3$ суперполей, однако суперполевое действие для этих реализаций пока не построено.

В приложении дается обзор основных формул $N = 3$ калибровочной теории в гармоническом суперпространстве, которые используются в других разделах работы.

2. $N = 4$ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ СУПЕРПОЛЕВЫХ УРАВНЕНИЙ $N = 3$ ТЕОРИИ

Преобразования суперсимметрии компонент $N = 4$ векторного мультиплета и их уравнений движения хорошо известны. Алгебра преобразований суперсимметрии в этом подходе замыкается на уравнениях движения. Формулировки $N = 4$ теории Янга–Миллса в $N = 1$ или $N = 2$ суперполях соответствуют явной реализации соответствующих суперсимметрий.

Мы будем использовать формализм $N = 3$ калибровочной теории в гармоническом суперпространстве, обзор которого дан в приложении. В $N = 3$ суперпространстве три суперсимметрии реализованы явно на суперполевых потенциалах $N = 3$ теории V_J^I (П.12) и суперполевых напряженностях $W^1, \bar{W}_3$ (П.17), поэтому мы будем изучать возможную связь с 4-й суперсимметрией. Рассмотрим решения гармонических суперполевых уравнений движения $V_2^1|, V_3^2|, W^1|$ и $\bar{W}_3|$ и соответствующие преобразования дополнительной суперсимметрии. Суперполевые решения свободных уравнений будут отмечены символом $|_0$. На свободных суперполевых напряженностях абелевой $N = 3$ теории можно определить следующие спинорные преобразования:

$$\hat{\delta}_\eta W^1|_0 = -\bar{\eta}^{\dot{\alpha}} \bar{D}_{2\dot{\alpha}} \bar{W}_3|_0, \quad \hat{\delta}_\eta \bar{W}_3|_0 = \eta^\alpha D_\alpha^2 W^1|_0. \quad (2.1)$$

Свободные уравнения [7]

$$(D_2^1, D_3^2)(W^1, \bar{W}_3) = 0 \quad (2.2)$$

инвариантны относительно этих спинорных преобразований:

$$\hat{\delta}_\eta (D_2^1, D_3^2) W^1 = (D_2^1, D_3^2) \hat{\delta}_\eta W^1|_0 = -\bar{\eta}^{\dot{\alpha}} \bar{D}_{2\dot{\alpha}} (D_2^1, D_3^2) \bar{W}_3|_0 = 0. \quad (2.3)$$

Преобразования (2.1) по определению удовлетворяют следующим условиям, характеризующим свободные суперполя:

$$(D^2)^2 \hat{\delta}_\eta W^1|_0 = 0, \quad (\bar{D}_2)^2 \hat{\delta}_\eta \bar{W}_3|_0 = 0. \quad (2.4)$$

Дополнительные спинорные преобразования совместно с $N = 3$ ϵ -преобразованиями образуют стандартную $N = 4$ супералгебру без центральных зарядов:

$$[\hat{\delta}_{\eta_2}, \hat{\delta}_{\eta_1}] W^1|_0 = 2i(\eta_1^\alpha \bar{\eta}_2^{\dot{\alpha}} - \eta_2^\alpha \bar{\eta}_1^{\dot{\alpha}}) \partial_{\alpha\dot{\alpha}} W^1|_0, \quad [\delta_\epsilon, \hat{\delta}_\eta] W^1|_0 = 0. \quad (2.5)$$

Спинорное преобразование потенциала, соответствующее преобразованию $\hat{\delta}_\eta \bar{W}_3$ (2.1), имеет вид

$$\hat{\delta}_\eta V_2^1|_0 = 2\eta_\alpha \theta_2^\alpha W^1|_0. \quad (2.6)$$

Спинорное преобразование потенциала $V_3^2|_0$ получается сопряжением:

$$\hat{\delta}_\eta V_3^2|_0 = -2\bar{\eta}_{\dot{\alpha}}\bar{\theta}^{2\dot{\alpha}}\bar{W}_3|_0. \quad (2.7)$$

По сравнению с (2.5) скобка Ли преобразований потенциала содержит калибровочно-зависимые необычные члены. Более общее преобразование потенциала V_2^1 может содержать дополнительные члены, которые не дают вклада в преобразование $\bar{W}_3|_0$ (2.1), но изменяют алгебру преобразований на $V_2^1|_0$.

Нелинейные спинорные преобразования неабелевых потенциалов можно выбрать в виде

$$\begin{aligned} \hat{\delta}_\eta V_2^1| &= 2\eta_\alpha\theta_2^\alpha W^1|(V_3^2), \\ \hat{\delta}_\eta V_3^1| &= 2\eta_\alpha\theta_3^\alpha W^1|(V_3^2) - 2\bar{\eta}_{\dot{\alpha}}\bar{\theta}^{1\dot{\alpha}}\bar{W}_3|(V_2^1). \end{aligned} \quad (2.8)$$

Неабелевы уравнения движения инвариантны относительно этих преобразований:

$$\hat{\delta}_\eta[\nabla_3^1, \nabla_2^1] = 2\eta_\alpha\theta_2^\alpha\nabla_3^1 W^1| - 2\eta_\alpha\theta_3^\alpha\nabla_2^1 W^1| + 2\bar{\eta}_{\dot{\alpha}}\bar{\theta}^{1\dot{\alpha}}\nabla_2^1\bar{W}_3| = 0. \quad (2.9)$$

Здесь использованы условия ковариантной гармонической аналитичности суперполевых напряженностей (П.18).

Нелинейные преобразования (2.8) удобно изучать с использованием калибровочных условий (П.21) и нелинейных разложений суперполей $W^1(V_3^2)$ и $\bar{W}_3(V_2^1)$ (П.23) по неабелевым потенциалам. В частности, эти формулы позволяют построить спинорные преобразования неабелевых суперполевых напряженностей по преобразованиям потенциалов (2.8).

3. $SU(3)$ -РАЗЛОЖЕНИЕ $N = 4$ СУПЕРПОЛЕВЫХ СВЯЗЕЙ

$SU(4)$ -инвариантные формулировки уравнений движения $D = 4$, $N = 4$ векторного мультиплета в гармоническом суперпространстве анализировались в работах [6]–[8]. Нетрудно вложить физические поля этого мультиплета в бесконечномерные $N = 4$ мультиплеты в гармоническом суперпространстве, однако не ясно, как строить действие в этом формализме.

Предположим, что $N = 3$ теория описывает некоторую фазу $N = 4$ теории, в которой нет явной $SU(4)$ -симметрии. Для изучения связи $N = 4$ и $N = 3$ теорий рассмотрим $SU(3)$ -разложение *свободных* $N = 4$ суперполевых напряженностей W^{AB}

$$W^{AB} = (\bar{W}^{ik}, W^{i4}), \quad W_{AB} = (W_{ik}, \bar{W}_{i4}), \quad (3.1)$$

удовлетворяющих следующему варианту $N = 4$ условия вещественности:

$$\bar{W}^{ik} = \varepsilon^{ikl}\bar{W}_{l4}, \quad W_{ik} = \varepsilon_{ikl}W^{l4}, \quad (3.2)$$

где $A = (i, 4)$, $i, k, l = 1, 2, 3$ – индексы $SU(4)$ - или $SU(3)$ -групп, соответственно. В формализме со скрытой $SU(4)$ -симметрией можно трактовать W^{i4} и $\bar{W}_{i4}$ как независимые $N = 4$ суперполя. Суперполевые уравнения движения $N = 4$ абелевого векторного мультиплета в этом подходе имеют вид

$$D_\alpha^i W^{j4} + D_\alpha^j W^{i4} = 0, \quad D_\alpha^4 W^{i4} = 0, \quad (3.3)$$

$$\bar{D}_{i\dot{\alpha}} W^{j4} - \frac{1}{3} \delta_i^j \bar{D}_{k\dot{\alpha}} W^{k4} = 0, \quad (3.4)$$

$$2\bar{D}_{4\dot{\alpha}} W^{i4} = \varepsilon^{ikl} \bar{D}_{k\dot{\alpha}} \bar{W}_{l4}. \quad (3.5)$$

Можно попытаться исследовать эти связи, используя $SU(3)/U(1) \times U(1)$ -гармоники и следующие обозначения для сопряженных гармонических проекций $N = 4$ суперполей:

$$\mathcal{W}^1 \equiv u_k^1 W^{k4}, \quad \bar{\mathcal{W}}_3 \equiv u_3^k \bar{W}_{k4}. \quad (3.6)$$

$SU(3)$ -гармонические проекции $N = 4$ связей эквивалентны соотношениям

$$(D_\alpha^1, D_\alpha^4, \bar{D}_{2\dot{\alpha}}, \bar{D}_{3\dot{\alpha}}) \mathcal{W}^1 = 0, \quad D_3^2 \mathcal{W}^1 = 0, \quad (3.7)$$

$$(D_\alpha^1, D_\alpha^2, \bar{D}_{4\dot{\alpha}}, \bar{D}_{3\dot{\alpha}}) \bar{\mathcal{W}}_3 = 0, \quad D_2^1 \bar{\mathcal{W}}_3 = 0, \quad (3.8)$$

$$\bar{D}_{4\dot{\alpha}} \mathcal{W}^1 = \bar{D}_{2\dot{\alpha}} \bar{\mathcal{W}}_3, \quad D_\alpha^4 \bar{\mathcal{W}}_3 = -D_\alpha^2 \mathcal{W}^1, \quad (3.9)$$

$$(D_2^1, D_3^1) \mathcal{W}^1 = 0, \quad (D_3^2, D_3^1) \bar{\mathcal{W}}_3 = 0.$$

Уравнения (3.7) формально могут быть решены вне массовой поверхности через некоторые $N = 4$ суперполя (потенциалы) по аналогии с решениями $N = 3$ калибровочных связей (П.17), однако мы не знаем геометрической интерпретации этих $N = 4$ потенциалов. Соотношения (3.8) непосредственно дают уравнения движения

$$(\bar{D}_4)^2 \mathcal{W}^1 = 0, \quad (\bar{D}_2)^2 \bar{\mathcal{W}}_3 = 0. \quad (3.10)$$

Отметим, что подобные уравнения

$$[(D^3)^2, (\bar{D}_1)^2, (\bar{D}_2)^2] \bar{\mathcal{W}}_3 = 0 \quad (3.11)$$

следуют также из гармонических уравнений (3.9) и условий (3.7) грассмановой аналитичности $\bar{\mathcal{W}}_3$.

Рассмотрим разложение суперполя $\mathcal{W}^1$ по 4-й спинорной координате

$$\begin{aligned} \mathcal{W}^1 = & W^1 - \frac{i}{2} \theta^\alpha \bar{\theta}^{\dot{\alpha}} \partial_{\alpha\dot{\alpha}} W^1 - \frac{1}{32} (\theta)^2 (\bar{\theta})^2 \partial^{\alpha\dot{\alpha}} \partial_{\alpha\dot{\alpha}} W^1 + \\ & + \bar{\theta}^{\dot{\alpha}} S_{\dot{\alpha}}^1 - \frac{i}{4} \theta^\alpha (\bar{\theta})^2 \partial_{\alpha\dot{\alpha}} S^{1\dot{\alpha}} + (\bar{\theta})^2 P^1, \end{aligned} \quad (3.12)$$

где $\theta \equiv \theta_4$, $\bar{\theta} \equiv \bar{\theta}^4$, а W^1 , $S_{\dot{\alpha}}^1$ и P^1 – соответствующие $N = 3$ компоненты:

$$(D_\alpha^1, \bar{D}_{2\dot{\alpha}}, \bar{D}_{3\dot{\alpha}}, D_3^2) (W^1, S_{\dot{\alpha}}^1, P^1) = 0. \quad (3.13)$$

Преобразования 4-й суперсимметрии этих $N = 3$ суперполей имеют вид

$$\delta_\eta W^1 = -\bar{\eta}^{\dot{\alpha}} S_{\dot{\alpha}}^1, \quad \delta_\eta S_{\dot{\alpha}}^1 = -2i\eta^\alpha \partial_{\alpha\dot{\alpha}} W^1 + 2\bar{\eta}_{\dot{\alpha}} P^1, \quad \delta_\eta P^1 = i\eta^\alpha \partial_{\alpha\dot{\alpha}} S^{1\dot{\alpha}}. \quad (3.14)$$

Связи массовой поверхности (3.8) порождают соотношения

$$S_{\dot{\alpha}}^1 = \bar{D}_{2\dot{\alpha}} \bar{W}_3, \quad P^1 = 0, \quad (3.15)$$

которые приводят к уравнениям

$$(\bar{D}_2)^2 \bar{W}_3 = 0, \quad D_3^2 \bar{D}_{2\dot{\alpha}} \bar{W}_3 = 0. \quad (3.16)$$

Уравнения (3.8) могут быть получены из суперполевого действия с лагранжевыми множителями, однако эти суперполевые множители содержат дополнительные степени свободы и не имеют геометрической интерпретации. Также не ясно, можно ли построить $N = 3$ суперполевое действие без лагранжевых множителей для $N = 4$ супермультиплета W^1 , $S_{\dot{\alpha}}^1$ и P^1 (3.13).

4. БЕСКОНЕЧНОМЕРНЫЙ МУЛЬТИПЛЕТ $N = 3$ СУПЕРПОЛЕЙ

4.1. Дискретная координата и альтернативная реализация 4-й суперсимметрии. В этом разделе мы определим необычную реализацию $N = 4$ суперсимметрии на бесконечном множестве аналитических $N = 3$ суперполей. Введем сначала специальное обозначение

$$A[k] = (A[-n], A[0], A[n]) \quad (4.1)$$

для бесконечных мультиплетов $N = 3$ суперполей, имеющих $U(1) \times U(1)$ -заряды, соответствующие зарядам произведений гармоник u_2^i или u_i^2 :

$$\begin{aligned} hA[k] &= -k, & \tilde{h}A[k] &= k, \\ A[-n] &\sim (u_2^{i_1} \dots u_2^{i_n}), & A[n] &\sim (u_{i_1}^2 \dots u_{i_n}^2). \end{aligned} \quad (4.2)$$

Отметим, что можно использовать альтернативные обозначения этих мультииндексов, например:

$$A[-2] \equiv A_{22}, \quad A[-1] \equiv A_2, \quad A[0] \equiv A, \quad A[1] \equiv A^2, \quad A[3] \equiv A^{222}. \quad (4.3)$$

Преобразования 4-й суперсимметрии могут быть реализованы на трех бесконечных мультиплетах аналитических $N = 3$ суперполей

$$V_2^1[k] \equiv (\dots, V_{222}^1, V_{22}^1, V_2^1, V^1, V^{12}, V^{122}, V^{1222}, \dots), \quad (4.4)$$

$$V_3^2[k] \equiv (\dots, V_{2223}, V_{223}, V_{23}, V_3, V_3^2, V_3^{22}, V_3^{222}, \dots), \quad (4.5)$$

$$V_3^1[k] \equiv (\dots, V_{2223}^1, V_{223}^1, V_{23}^1, V_3^1, V_3^{12}, V_3^{122}, V_3^{1222}, \dots), \quad (4.6)$$

параметризованных целым числом k или натуральным числом n . “Внешние” зарядовые индексы соответствуют зарядам $N = 3$ калибровочных потенциалов, которые включены в эти мультиплеты. Введем общее обозначение для этих мультиплетов $\mathcal{V}[k] \equiv (V_2^1, V_3^2, V_3^1)[k]$ и будем трактовать параметр k как дополнительную дискретную (зарядовую) координату.

Каждое суперполе в этом множестве имеет определенные значения $U(1)$ -зарядов, которые определяются параметром k и “внешними” индексами

$$\begin{aligned} hV_2^1[k] &= 2 - k, & \tilde{h}V_2^1[k] &= k - 1, \\ hV_3^2[k] &= -k - 1, & \tilde{h}V_3^2[k] &= k + 1, \\ hV_3^1[k] &= 1 - k, & \tilde{h}V_3^1[k] &= k + 1. \end{aligned}$$

Определим в каждом из этих мультиплетов следующие дополнительные преобразования суперсимметрии:

$$\delta_\eta \mathcal{V}[k] = \eta^\alpha D_\alpha^2 \mathcal{V}[k - 1] - \bar{\eta}^{\dot{\alpha}} \bar{D}_{2\dot{\alpha}} \mathcal{V}[k + 1], \quad (4.7)$$

где η^α и $\bar{\eta}^{\dot{\alpha}}$ – спинорные параметры. Данные представления содержат суперполя одинаковой размерности в отличие от преобразований $N = 3$ компонент $N = 4$ суперполей (3.14).

Дополнительные преобразования коммутируют со спинорными преобразованиями $N = 3$ суперсимметрии и сохраняют все свойства $N = 3$ аналитических суперполей:

$$[\delta(\eta, \bar{\eta}), \delta(\epsilon_i, \bar{\epsilon}^i)] \mathcal{V}[k] = 0. \quad (4.8)$$

Скобка Ли двух η -преобразований дает $4D$ -трансляции всех суперполей:

$$[\delta_{\eta_2}, \delta_{\eta_1}] \mathcal{V}[k] = 2i(\eta_1^\alpha \bar{\eta}_2^{\dot{\alpha}} - \eta_2^\alpha \bar{\eta}_1^{\dot{\alpha}}) \partial_{\alpha\dot{\alpha}} \mathcal{V}[k]. \quad (4.9)$$

Нетрудно понять, что правила умножения различных $N = 4$ супермультиплетов $\mathcal{V}[k]$ и $\mathcal{U}[k]$ должны включать суммирование по параметру k , например:

$$\mathcal{A}[p] \equiv \sum_k \mathcal{V}[k+p] \mathcal{U}[-k], \quad h\mathcal{V}[k] = v - k, \quad h\mathcal{U}[k] = u - k, \quad h\mathcal{A}[p] = v + u - p, \quad (4.10)$$

где целочисленный параметр p характеризует новый $N = 4$ мультиплет $\mathcal{A}[p]$, а v и u – некоторые внешние заряды. Можно непосредственно проверить, что η -вариация этого произведения имеет стандартную $N = 4$ форму (4.7):

$$\delta_\eta \mathcal{A}[p] = \eta^\alpha D_\alpha^2 \mathcal{A}[p - 1] - \bar{\eta}^{\dot{\alpha}} \bar{D}_{2\dot{\alpha}} \mathcal{A}[p + 1]. \quad (4.11)$$

Мы использовали инвариантность бесконечных сумм по отношению к замене параметра k , например:

$$\sum_k \{ \eta^\alpha D_\alpha^2 \mathcal{V}[k+p-1] \mathcal{U}[-k] + \mathcal{V}[k+p] \eta^\alpha D_\alpha^2 \mathcal{U}[-1-k] \} = \eta^\alpha D_\alpha^2 \sum_k \{ \mathcal{V}[k+p-1] \mathcal{U}[-k] \},$$

где во второй сумме сделана замена $k \rightarrow k - 1$.

4.2. Укороченные представления $N = 4$ суперсимметрии. Рассмотрим преобразование $N = 3$ потенциала в бесконечном мультиплете (4.7)

$$\delta_\eta V_2^1 = \eta^\alpha D_\alpha^2 V_{22}^1 - \bar{\eta}^{\dot{\alpha}} \bar{D}_{2\dot{\alpha}} V^1. \quad (4.12)$$

Мы не знаем, как это представление связано с реализацией $N = 4$ суперсимметрии на массовой поверхности (2.6), поэтому обсудим формальную возможность “укорочения” бесконечномерных представлений $N = 4$ суперсимметрии, когда высшие члены супермультиплетов $\mathcal{V}[k]$ выражаются через конечное число независимых суперполей при сохранении структуры преобразований (4.7). В качестве простейшего примера будут рассмотрены преобразования

$$\begin{aligned} \delta_\eta V_2^1 &= c_2(u) \eta^\alpha D_\alpha^2 V_2^1 + \tilde{c}^2(u) \bar{\eta}^{\dot{\alpha}} \bar{D}_{2\dot{\alpha}} V_2^1, \\ \delta_\eta V_3^2 &= c_2(u) \eta^\alpha D_\alpha^2 V_3^2 + \tilde{c}^2(u) \bar{\eta}^{\dot{\alpha}} \bar{D}_{2\dot{\alpha}} V_3^2, \end{aligned} \quad (4.13)$$

где $c_2(u)$ и $\tilde{c}^2(u)$ — формальные гармонические ряды, удовлетворяющие простому соотношению

$$c_2(u) \tilde{c}^2(u) = -c_2(u) \tilde{c}_2(u) = -1. \quad (4.14)$$

Это соотношение порождает бесконечную систему уравнений для коэффициентов гармонических рядов. Мы не требуем никакой регулярности от функции $c_2(u)$, в частности, ее нельзя считать гармоническим полиномом.

Скобка Ли преобразований (4.13) имеет стандартный вид, аналогичный соотношению (4.9). Отметим, что введение функций $c_2(u)$ и $\tilde{c}^2(u)$ нарушает $SU(3)$ -ковариантность. Эти гармонические функции позволяют определить следующее укороченное решение для бесконечномерных $N = 4$ мультиплетов:

$$(V_2^1, V_3^2)[k] = (c_2)^{-k} (V_2^1, V_3^2)[k], \quad (c_2)^{-n} \equiv -(-1)^n (\tilde{c}^2)^n. \quad (4.15)$$

Мы оставим анализ этой и других возможных укороченных реализаций $N = 4$ суперсимметрии для дальнейших исследований и продолжим изучение бесконечномерных $N = 4$ мультиплетов.

4.3. $N = 4$ обобщение свободного $N = 3$ суперполевого действия. Простая геометрическая интерпретация бесконечномерных $N = 4$ мультиплетов $V_J^I[k]$ как $N = 3$ потенциалов, зависящих от дополнительной дискретной координаты, позволяет построить классическое суперполевое действие этой модели. Суперполевое действие $N = 3$ калибровочной теории рассматривается в приложении (П.14). Свободное действие $N = 3$ абелевого суперполя имеет вид

$$S_f(N = 3) = -\frac{1}{4} \int du d\zeta \binom{33}{11} \{ V_2^1 D_3^2 V_3^1 + V_3^1 D_2^1 V_3^2 + V_3^2 D_3^1 V_2^1 - \frac{1}{2} (V_3^1)^2 \}. \quad (4.16)$$

Каждый член этого действия допускает бесконечномерное $N = 4$ инвариантное обобщение, построенное по правилу перемножения $N = 4$ мультиплетов (4.10). Используя соотношения

$$[(D_2^1, D_3^2, D_3^1), (D_\alpha^2, \bar{D}_{2\dot{\alpha}})] \mathcal{V}[k] = 0,$$

нетрудно показать, что гармонические производные $(D_2^1, D_3^2, D_3^1)\mathcal{V}[k]$ преобразуются как $N = 4$ мультиплеты с измененными значениями внешних зарядов (4.7). Рассмотрим следующие $N = 4$ мультиплеты, соответствующие всем суперполевым членам свободного $N = 3$ действия:

$$A_{33}^{11} \equiv \sum_k V_2^1[k] D_3^2 V_3^1[-k] = V_2^1 D_3^2 V_3^1 + V_{22}^1 D_3^2 V_3^{12} + V^1 D_3^2 V_{32}^1 + \dots, \quad (4.17)$$

$$\tilde{A}_{33}^{11} \equiv \sum_k V_3^1[k] D_2^1 V_3^2[-k] = V_3^1 D_2^1 V_3^2 + V_{32}^1 D_2^1 V_3^{22} + V_3^{12} D_2^1 V_3 + \dots, \quad (4.18)$$

$$B_{33}^{11} \equiv \sum_k V_3^2[k] D_3^1 V_2^1[-k] = V_3^2 D_3^1 V_2^1 + V_3 D_3^1 V^1 + V_3^{22} D_3^1 V_{22}^1 + \dots, \quad (4.19)$$

$$C_{33}^{11} \equiv -\frac{1}{2} \sum_k V_3^1[k] V_3^1[-k] = -\frac{1}{2} (V_3^1)^2 - V_3^{12} V_{32}^1 - V_3^{122} V_{322}^1 - \dots. \quad (4.20)$$

Все эти суперполя построены по аналогии с компонентой $\mathcal{A}[0]$ в произведении $N = 4$ мультиплетов (4.10), поэтому их η -вариации представляют собой комбинации полных спинорных производных, например:

$$\delta_\eta A_{33}^{11} = \eta^\alpha D_\alpha^2 A_{233}^{11} - \bar{\eta}^{\dot{\alpha}} \bar{D}_{2\dot{\alpha}} A_{33}^{112}. \quad (4.21)$$

Интегралы от этих суперполей по $N = 3$ суперпространству инвариантны относительно $N = 4$ суперсимметрии.

Действие $N = 4$ абелевого мультиплета $\mathcal{V}[k]$ может быть построено как бесконечная сумма суперполевых членов типа Черна–Саймонса

$$S_f(N = 4) = -\frac{1}{4} \int du d\zeta \binom{33}{11} \{A_{33}^{11} + \tilde{A}_{33}^{11} + B_{33}^{11} + C_{33}^{11}\} = \sum_k S_k, \quad (4.22)$$

где $S_0 = S_f(N = 3)$ (4.16). Это действие инвариантно относительно абелевых калибровочных преобразований

$$\delta_\lambda V_J^I[k] = -D_J^I \lambda[k], \quad I < J, \quad (4.23)$$

где аналитические калибровочные параметры $\lambda[k]$ образуют бесконечный супермультиплет, который включает $N = 3$ калибровочный параметр $\lambda[0] \equiv \lambda$ (П.12). Эту инвариантность нетрудно проверить с использованием соотношений

$$\begin{aligned} \delta_\lambda A_{33}^{11} &= \sum_k \lambda[k] \{D_2^1 D_3^2 V_3^1[-k] - D_3^1 D_3^2 V_2^1[-k]\} + \text{div}, \\ \delta_\lambda \tilde{A}_{33}^{11} &= \sum_k \lambda[k] \{D_3^1 D_2^1 V_3^2[-k] - D_3^2 D_2^1 V_3^1[-k]\} + \text{div}, \\ \delta_\lambda B_{33}^{11} &= \sum_k \lambda[k] \{D_3^2 D_3^1 V_2^1[-k] - D_2^1 D_3^1 V_3^2[-k]\} + \text{div}, \\ \delta_\lambda C_{33}^{11} &= -\sum_k \lambda[k] D_3^1 V_3^1[-k] + \text{div}, \end{aligned}$$

где div обозначает некоторые члены с полными гармоническими производными, которые исчезают в гармонических интегралах.

Бесконечное множество уравнений нулевой кривизны для свободного $N = 4$ действия (4.22) состоит из трех независимых серий:

$$\begin{aligned} V_3^1[k] &= D_2^1 V_3^2[k] - D_3^2 V_2^1[k], \\ F_{32}^{11}[k] &\equiv D_3^1 V_2^1[k] - D_2^1 V_3^1[k] = 0, \\ F_{33}^{21}[k] &\equiv D_3^2 V_3^1[k] - D_3^1 V_3^2[k] = 0. \end{aligned} \quad (4.24)$$

Первое уравнение чисто алгебраическое и может быть решено вне массовой поверхности. Его решение $\hat{V}_3^1[k]$ можно использовать для определения свободного $N = 4$ действия второго порядка на усеченном множестве независимых потенциалов:

$$\hat{S}_f(N = 4) = -\frac{1}{4} \int du d\zeta \zeta^{(33)}_{(11)} \{B_{33}^{11} - \hat{C}_{33}^{11}\} = \sum_k \hat{S}_k, \quad (4.25)$$

где B_{33}^{11} задается уравнением (4.19), а второй член может быть получен из (4.20) с помощью подстановки

$$V_3^1[k] \Rightarrow \hat{V}_3^1[k] = D_2^1 V_3^2[k] - D_3^2 V_2^1[k]. \quad (4.26)$$

Структуру решений бесконечного множества уравнений можно анализировать в несуперсимметричных калибровках. Нетрудно показать в компонентах, что некоторые ветви бесконечных множеств (4.4) и (4.5) являются чисто калибровочными суперполями:

$$V_2^1[-n] = -D_2^1 \lambda[-n], \quad V_3^2[n] = -D_3^2 \lambda[n]. \quad (4.27)$$

В этой калибровке, нарушающей 4-ю суперсимметрию, остаются независимые суперполя

$$V_3^2[-n], \quad V_3^2, \quad V_2^1, \quad V_2^1[n] \quad (4.28)$$

и соответствующие “остаточные” калибровочные параметры

$$D_2^1 \hat{\lambda}[-n] = 0, \quad D_3^2 \hat{\lambda}[n] = 0.$$

Суперполе $N = 3$ уравнение

$$F_{32}^{11} = D_3^1 V_2^1 - D_2^1 (D_2^1 V_3^2 - D_3^2 V_2^1) = 0 \quad (4.29)$$

дает в компонентах свободные уравнения физических полей $N = 3$ векторного мультиплета [1]

$$\phi^k(x), \quad \bar{\phi}_k(x), \quad A_m(x), \quad \psi_k^\alpha(x), \quad \bar{\psi}^{k\dot{\alpha}}, \quad \psi^\alpha, \quad \bar{\psi}^{\dot{\alpha}}. \quad (4.30)$$

Вспомогательные компонентные поля свободных суперполей V_2^1 и V_3^2 исчезают на массовой поверхности.

Рассмотрим следующие пары гармонических уравнений (4.24) в калибровке (4.28):

$$F_{32}^{11}[n] = (D_3^1 + D_2^1 D_3^2) V_2^1[n] = 0, \quad F_{33}^{12}[n] = -(D_3^2)^2 V_2^1[n] = 0. \quad (4.31)$$

Эти уравнения содержат суперполе $V_2^1[n] = (V^1, V^{12}, \dots)$ и имеют нетривиальные решения для любого n , описывающие “короткие” суперполя с экзотическими по размерностям и $SU(3)$ -представлениям компонентными полями. Например, суперполе V^{12} имеет безразмерную скалярную компоненту $u_3^k R_k$ и соответствующие вспомогательные поля.

4.4. $N = 4$ инвариантное неабелево взаимодействие. Построим $N = 4$ обобщение неабелевого $N = 3$ взаимодействия (П.14), которое содержит суперполе

$$J_{33}^{11} = V_3^1 [V_2^1, V_3^2]. \quad (4.32)$$

Очевидное $N = 4$ обобщение этого члена представляет собой бесконечную двойную сумму суперполей

$$I_{33}^{11} = \sum_{k,p} V_3^1 [k] [V_2^1 [p - k], V_3^2 [-p]], \quad (4.33)$$

где p и k – произвольные целочисленные параметры, а все суперполевые потенциалы рассматриваются в присоединенном представлении алгебры Ли калибровочной группы G .

$N = 4$ преобразование этого суперполя можно анализировать по аналогии с (4.11), (4.21). Таким образом, $N = 4$ инвариантное обобщение действия $N = 3$ теории Янга–Миллса имеет вид

$$S_{\text{YM}}(N = 4) = -\frac{1}{4} \int du d\zeta \binom{33}{11} \text{Tr} \{ A_{33}^{11} + \tilde{A}_{33}^{11} + B_{33}^{11} + C_{33}^{11} + I_{33}^{11} \}, \quad (4.34)$$

где квадратичные члены заданы уравнениями (4.17)–(4.20). Это действие типа Черна–Саймонса инвариантно относительно следующих неабелевых калибровочных преобразований:

$$\begin{aligned} \delta_\lambda V_2^1 [k] &= -D_2^1 \lambda [k] - \sum_p [V_2^1 [k + p], \lambda [-p]], \\ \delta_\lambda V_3^2 [k] &= -D_3^2 \lambda [k] - \sum_p [V_3^2 [k + p], \lambda [-p]], \\ \delta_\lambda V_3^1 [k] &= -D_3^1 \lambda [k] - \sum_p [V_3^1 [k + p], \lambda [-p]], \end{aligned} \quad (4.35)$$

где $\lambda [k]$ – $N = 4$ множество аналитических параметров. Коммутаторные члены сохраняют $N = 4$ структуру в соответствии с уравнениями (4.10). Доказательство инвариантности полностью аналогично соответствующему доказательству в $N = 3$ теории [4], если использовать простые свойства бесконечных сумм.

Уравнения движения для неабелевого $N = 4$ действия представляют собой бесконечномерное обобщение $N = 3$ условий нулевой кривизны (П.16)

$$\begin{aligned} V_3^1 [k] &= D_2^1 V_3^2 [k] - D_3^2 V_2^1 [k] + \sum_p [V_2^1 [k + p], V_3^2 [-p]], \\ F_{32}^{11} [k] &\equiv D_3^1 V_2^1 [k] - D_2^1 V_3^1 [k] + \sum_p [V_3^1 [k + p], V_2^1 [-p]] = 0. \end{aligned} \quad (4.36)$$

$N = 3$ потенциалы V_2^1 , V_3^2 и V_3^1 взаимодействуют со всеми дополнительными суперполями в бесконечных $N = 4$ мультиплетах. Проблема в том, как оценить роль дополнительных суперполей в $N = 4$ инвариантной фазе этой модели.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Показано, что $N = 3$ уравнения движения в гармоническом суперпространстве инвариантны относительно дополнительного спинорного преобразования $N = 4$ суперсимметрии. Соответствующие преобразования $N = 3$ потенциалов на массовой поверхности имеют необычную алгебру суперсимметрии, которая содержит калибровочно-зависимые члены.

Проблема суперполевого описания $N = 4$ уравнений движения обсуждалась в формализме со скрытой или нарушенной $SU(4)$ -симметрией. Суперполевым формализм, основанный на $SU(3)/U(1) \times U(1)$ -гармониках, кажется более гибким в $N = 4$ суперпространстве. Разложение суперполевых связей для $N = 4$ напряженности по 4-й спинорной координате порождает уравнения движения для $N = 3$ напряженности W^1 и вспомогательных суперполевых напряженностей S_α и P^1 , однако в этом подходе не удастся построить подходящее суперполевое действие.

Как иллюстрация гибкости $N = 3$ суперпространства рассматривается новая реализация стандартной $N = 4$ алгебры суперсимметрии на бесконечном множестве $N = 3$ суперполей, параметризованном целочисленным параметром k . Этот параметр играет роль дополнительной дискретной координаты, отмечающей различные суперполя $N = 4$ супермультиплетов, и эта степень свободы прямо не связана с новыми грассмановыми или гармоническими координатами. Нетрудно построить бесконечномерное $N = 4$ обобщение калибровочного действия в $N = 3$ гармоническом суперпространстве. Эта суперполевая модель имеет простую геометрическую интерпретацию, однако роль дополнительных суперполевых степеней свободы пока не ясна, и непротиворечивость этой модели на квантовом уровне не проверена. Мы надеемся продолжить исследование возможных реализаций $N = 4$ суперсимметрии на конечном числе $N = 3$ суперполей по аналогии с простейшим примером подобной реализации в п. 4.2.

ПРИЛОЖЕНИЕ

$N = 3$ гармоническое суперпространство

В приложении дается обзор основных формул $D = 4$, $N = 3$ гармонического суперпространства [1], [2], [4] с использованием некоторых результатов и обозначений работы [5]. Удобными координатами этого суперпространства являются гармоники u_i^I и u_I^i , параметризующие шестимерное однородное пространство $SU(3)/U(1) \times U(1)$:

$$u_i^I u_J^i = \delta_J^I, \quad u_i^I u_I^j = \delta_i^j, \quad \varepsilon^{ijk} u_i^1 u_j^2 u_k^3 = 1, \quad (\text{П.1})$$

где $i, j, k = 1, 2, 3$ – индексы фундаментального представления группы автоморфизмов $SU(3)$, а $I, J = 1, 2, 3$ – некоторые комбинации $U(1) \times U(1)$ -зарядов в обозначениях работы [5]. $SU(3)$ -инвариантные гармонические производные ∂_J^I ($I \neq J$) действуют на этих гармониках:

$$\partial_J^I u_i^K = \delta_J^K u_i^I, \quad \partial_J^I u_K^i = -\delta_K^I u_J^i. \quad (\text{П.2})$$

Гармонические $U(1)$ -заряды h и $\tilde{h}$ возникают в коммутаторах заряженных производных

$$\begin{aligned} [\partial_2^1, \partial_1^2] &= h, & [\partial_3^2, \partial_2^3] &= \tilde{h}, & [h, \partial_2^1] &= 2\partial_2^1, \\ [h, \partial_1^2] &= -2\partial_1^2, & [\tilde{h}, \partial_3^2] &= 2\partial_3^2, & [\tilde{h}, \partial_2^3] &= -2\partial_2^3, \\ [h, \partial_3^2] &= -\partial_3^2, & [\tilde{h}, \partial_2^1] &= -\partial_2^1, & [h, \partial_3^1] &= \partial_3^1 = [\tilde{h}, \partial_3^1]. \end{aligned} \quad (\text{П.3})$$

$N = 3$ гармоники могут быть использованы для определения *аналитических* координат $\{x_A^m, \theta_I^\alpha, \bar{\theta}^{I\dot{\alpha}}, u\}$ в гармоническом суперпространстве

$$x_A^m = x^m - i(\sigma^m)_{\alpha\dot{\alpha}}(\theta_1^\alpha \bar{\theta}^{1\dot{\alpha}} - \theta_3^\alpha \bar{\theta}^{3\dot{\alpha}}), \quad \theta_I^\alpha = \theta_i^\alpha u_I^i, \quad \bar{\theta}^{I\dot{\alpha}} = \bar{\theta}^{\dot{\alpha}i} u_i^I, \quad (\text{П.4})$$

где x^m , θ_i^α , $\bar{\theta}^{i\dot{\alpha}}$ – стандартные координаты $D = 4$, $N = 3$ суперпространства и σ^m – матрицы Вейля группы $SL(2, \mathbb{C})$.

Мы будем использовать гармонические проекции стандартных спинорных производных D_α^k и $\bar{D}_{k\dot{\alpha}}$

$$\begin{aligned} D_\alpha^I &= u_I^k D_\alpha^k, & \bar{D}_{I\dot{\alpha}} &= u_I^k \bar{D}_{k\dot{\alpha}}, \\ \{D_\alpha^I, D_\beta^K\} &= 0 = \{\bar{D}_{I\dot{\alpha}}, \bar{D}_{K\dot{\beta}}\}, \\ \{D_\alpha^K, \bar{D}_{J\dot{\beta}}\} &= 2i\delta_J^K \partial_{\alpha\dot{\beta}}, \end{aligned} \quad (\text{П.5})$$

где $\partial_{\alpha\dot{\beta}} = (\sigma^m)_{\alpha\dot{\beta}} \partial_m$.

Специальное сопряжение действует на гармониках и гармонических производных:

$$\begin{aligned} \widetilde{u_k^1} &= u_3^k, & \widetilde{u_k^3} &= u_1^k, & \widetilde{u_k^2} &= -u_2^k, \\ \widetilde{\partial_2^1} &= -\partial_3^2, & \widetilde{\partial_3^1} &= \partial_2^1. \end{aligned} \quad (\text{П.6})$$

Специальное сопряжение спинорных производных можно выбрать в следующем виде:

$$\widetilde{D_\alpha^1 f} = -\bar{D}_{3\dot{\alpha}} \tilde{f}, \quad \widetilde{D_\alpha^2 f} = \bar{D}_{2\dot{\alpha}} \tilde{f}, \quad (\text{П.7})$$

где f и $\tilde{f}$ – взаимно сопряженные четные гармонические суперполя.

$(4 + 4)$ -грассманово-аналитическое суперполе $\Lambda(\zeta, u)$ определено в аналитическом $(4|4 + 4)$ -мерном суперпространстве с координатами

$$\zeta = (x_A^m, \theta_2^\alpha, \theta_3^\alpha, \bar{\theta}^{1\dot{\alpha}}, \bar{\theta}^{2\dot{\alpha}}); \quad (\text{П.8})$$

оно удовлетворяет условиям

$$(D_\alpha^1, \bar{D}_{3\dot{\alpha}})\Lambda = 0. \quad (\text{П.9})$$

Гармонические производные в аналитических координатах D_K^I действуют ковариантно на спинорных производных:

$$[D_K^I, D_\alpha^J] = \delta_K^J D_\alpha^I, \quad [D_K^I, \bar{D}_{J\dot{\alpha}}] = -\delta_J^I \bar{D}_{K\dot{\alpha}}. \quad (\text{П.10})$$

Отметим, что грассманова аналитичность сохраняется следующими гармоническими и спинорными производными:

$$D_2^1, \quad D_3^2, \quad D_3^1 = [D_2^1, D_3^2], \quad D_\alpha^2, \quad \bar{D}_{2\dot{\alpha}}. \quad (\text{П.11})$$

Аналитические потенциалы $N = 3$ теории Янга–Миллса V_2^1 , V_3^2 и V_3^1 можно трактовать как калибровочные связности для гармонических ковариантных производных:

$$\begin{aligned}\nabla_J^I &= D_J^I + V_J^I, \quad I < J, \\ \delta_\lambda V_J^I &= -D_J^I \lambda + [\lambda, V_J^I],\end{aligned}\tag{П.12}$$

где λ – инфинитезимальный аналитический калибровочный параметр. Мы используем условия сопряжения

$$\widetilde{V}_2^1 = -V_3^2, \quad \widetilde{V}_3^1 = V_3^1, \quad \widetilde{\lambda} = -\lambda.\tag{П.13}$$

Суперполевое действие $N = 3$ теории определено на этих аналитических потенциалах [1]:

$$S(N = 3) = -\frac{1}{4} \int du d\zeta^{(33)}_{11} \text{Tr} \left\{ V_2^1 D_3^2 V_3^1 + V_3^1 D_2^1 V_3^2 + V_3^2 D_3^1 V_2^1 - \frac{1}{2} (V_3^1)^2 + V_3^1 [V_2^1, V_3^2] \right\},\tag{П.14}$$

где рассматривается аналитическая мера интегрирования

$$d\zeta^{(33)}_{11} = d^4 x_A d\theta^{(33)}_{11}, \quad \int d\theta^{(33)}_{11} (\theta_2)^2 (\theta_3)^2 (\bar{\theta}^1)^2 (\bar{\theta}^2)^2 = 1.\tag{П.15}$$

Это действие порождает уравнения движения, которые имеют вид условий нулевой кривизны для $N = 3$ потенциалов:

$$V_3^1 = D_2^1 V_3^2 - D_3^2 V_2^1 + [V_2^1, V_3^2], \quad F_{32}^{11} \equiv D_3^1 V_2^1 - D_2^1 V_3^1 + [V_3^1, V_2^1] = 0.\tag{П.16}$$

$N = 3$ гармонический формализм позволяет вводить немассовые суперполевыи напряженности [5], [10]

$$\begin{aligned}W^1 &= \frac{1}{4} (\overline{D}_3)^2 V_2^3 (V_3^2), \quad D_3^2 V_2^3 - D_2^3 V_3^2 + [V_3^2, V_2^3] = 0, \\ \overline{W}_3 &= -\frac{1}{4} (D^1)^2 V_1^2 (V_2^1), \quad D_2^1 V_1^2 - D_1^2 V_2^1 + [V_2^1, V_1^2] = 0,\end{aligned}\tag{П.17}$$

которые определяются через неаналитические связности $V_1^2(V_2^1)$ и $V_2^3(V_3^2)$. Гармонические уравнения нулевой кривизны для $N = 3$ связностей V_J^I гарантируют *гармоническую аналитичность* этих суперполей, например:

$$\nabla_3^2 W^1 = D_3^2 W^1 + [V_3^2, W^1] = 0, \quad \nabla_2^1 W^1 = D_2^1 W^1 + [V_2^1, W^1] = 0.\tag{П.18}$$

Первое соотношение выполняется вне массовой поверхности, тогда как второе эквивалентно уравнениям движения.

Нетрудно получить псевдодифференциальные решения для абелевой неаналитической связности

$$V_1^2 = \frac{1}{2} (D_1^2)^2 V_2^1 - \frac{1}{12} (D_1^2)^3 D_2^1 V_2^1 + \dots,\tag{П.19}$$

используя соотношения $[D_2^1, D_1^2]V_2^1 = 2V_2^1$. Абелева суперполевая напряженность также выражается через потенциал

$$\begin{aligned}\bar{W}_3 &= -\frac{1}{4}(D^1)^2 V_1^2 = -\frac{1}{4}(D^2)^2 P V_2^1, \\ P &\equiv 1 + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k!(k+1)!} (D_1^2)^k (D_2^1)^k.\end{aligned}\quad (\text{П.20})$$

Аналогичное решение для W^1 содержит сопряженный оператор $\tilde{P}$.

Удобно использовать калибровочные условия

$$D_2^1 V_2^1 = 0, \quad D_3^2 V_3^2 = 0 \quad (\text{П.21})$$

для упрощения псевдодифференциальных решений уравнений (П.17). В этом случае можно построить простое нелинейное разложение неаналитической связности V_1^2 по неабелевому потенциалу

$$\begin{aligned}V_1^2(V_2^1) &= \frac{1}{2}(D_1^2)^2 V_2^1 + \frac{1}{4}[(D_1^2)^2 V_2^1, D_1^2 V_2^1] + \frac{1}{12}[D_1^2 V_2^1, [D_1^2 V_2^1, (D_1^2)^2 V_2^1]] - \\ &\quad - \frac{1}{24}[(D_1^2)^2 V_2^1, [V_2^1, (D_1^2)^2 V_2^1]] + \dots,\end{aligned}\quad (\text{П.22})$$

$$\bar{W}_3(V_2^1) = -\frac{1}{4}(D^1)^2 V_1^2(V_2^1) = -\frac{1}{4}(D^2)^2 V_2^1 + \dots \quad (\text{П.23})$$

и аналогичные разложения для $V_2^3(V_3^2)$ и $W^1(V_3^2)$.

Благодарности. Автор признателен С. Феррара за гостеприимство во время визита в Теоретический отдел ЦЕРН, где была написана часть этой работы, а также Е. Иванову за обсуждения. Работа поддержана грантами ИНТАС № 00-00254, РФФИ-ННИО № 02-02-04002, DFG № 436 RUS 113/669 и РФФИ № 03-02-17440.

Список литературы

- [1] *A. Galperin, E. Ivanov, S. Kalitzin, V. Ogievetsky, E. Sokatchev.* Class. Q. Grav. 1985. V. 2. P. 155.
- [2] *A. С. Гальперин, Е. А. Иванов, В. И. Огиевецкий.* ЯФ. 1987. Т. 46. С. 948.
- [3] *F. Delduc, J. McCabe.* Class. Q. Grav. 1989. V. 6. P. 233.
- [4] *A. Galperin, E. Ivanov, V. Ogievetsky, E. Sokatchev.* Harmonic Superspace. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2001.
- [5] *E. A. Ivanov, B. M. Zupnik.* Nucl. Phys. B. 2001. V. 618. P. 3; hep-th/0110074.
- [6] *E. Ivanov, S. Kalitsyn, Nguyen Ai Viet, V. Ogievetsky.* J. Phys. A. 1985. V. 18. P. 3433; *И. А. Бандос.* ТМФ. 1988. Т. 76. С. 169; *G. G. Hartwell, P. S. Howe.* Int. J. Mod. Phys. A. 1995. V. 10. P. 3901.
- [7] *L. Andrianopoli, S. Ferrara, E. Sokatchev, B. Zupnik.* Adv. Theor. Math. Phys. 1999. V. 3. P. 1149; hep-th/9912007.
- [8] *B. M. Zupnik.* Nucl. Phys. B. Proc. Suppl. 2001. V. 102. P. 278; hep-th/0104114.
- [9] *S. Bellucci, E. Ivanov, S. Krivonos.* Phys. Rev. D. 2001. V. 64. P. 025014; hep-th/0101195.
- [10] *J. Niederle, B. M. Zupnik.* Nucl. Phys. B. 2001. V. 598. P. 645; hep-th/0012114.

Поступила в редакцию 5.IX.2003 г.