Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Барабанщиков, М. А. Васильев, С. Ф. Прокушкин, Свободные уравнения для массивных полей материи в $2+1$ -мерном анти-де ситтеровском пространстве из деформированной алгебры “осцилляторов”, *ТМФ*, 1997, том 110, номер 3, 372–384

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf975>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.80.181.102

26 апреля 2023 г., 15:36:53

А. В. Барабанщиков*, М. А. Васильев†, С. Ф. Прокушкин†
**СВОБОДНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДЛЯ
МАССИВНЫХ ПОЛЕЙ МАТЕРИИ В
2 + 1-МЕРНОМ АНТИ-ДЕ СИТТЕРОВСКОМ
ПРОСТРАНСТВЕ ИЗ ДЕФОРМИРОВАННОЙ
АЛГЕБРЫ “ОСЦИЛЛЯТОРОВ”**

Переформулируются свободные уравнения движения для массивных полей материи спина 0 и $1/2$ в $2 + 1$ -мерном анти-де ситтеровском пространстве в виде некоторого условия постоянной кривизны. Показано, что бесконечномерное представление анти-де ситтеровской алгебры, лежащее в основе этой формулировки, допускает естественную реализацию в терминах алгебры деформированных “осцилляторов” с параметром деформации, связанным с массовым параметром.

1. ВВЕДЕНИЕ

В [1] свободные уравнения для полей материи спина 0 и $1/2$ в $2 + 1$ -мерном анти-де ситтеровском (АдС) пространстве были переформулированы в виде определенных условий нулевой кривизны (“развернутая” формулировка). Будучи эквивалентной обычной формулировке, такая формулировка полезна как минимум в двух отношениях. Она приводит к простой конструкции общего решения свободных уравнений, а также, демонстрируя бесконечномерные симметрии высших спинов, дает важный намек на то, как описать нелинейную динамику. В [1] было показано также, что в случае безмассовых полей предложенная конструкция допускает естественную реализацию в терминах алгебры “осцилляторов” Гейзенберга–Вейля. Затем основанная на этой реализации нелинейная динамика безмассовых полей материи, взаимодействующих через калибровочные поля высших спинов, была сформулирована в [2] во всех порядках по взаимодействию.

В настоящей статье мы ставим вопрос о том, как можно обобщить “осцилляторную” формулировку безмассовых уравнений [1] на случай материальных полей с произвольной массой. Мы показываем, что необходимая алгебраическая конструкция обеспечивается при использовании алгебры деформированных “осцилляторов”, предложенной в [3], с параметром деформации, связанным с массовым параметром.

*International School for Advanced Studies, Via Beirut 2–4, 34013, Trieste, Italy

†Физический институт им. П. Н. Лебедева РАН, отделение теоретической физики, Москва, 117924, Ленинский проспект, 53

В будущей публикации С. Ф. Прокушкина и М. А. Васильева результаты этой статьи будут использованы для анализа нелинейной динамики материальных полей в $2 + 1$ -мерии, взаимодействующих через калибровочные поля высших спинов. Изучаемая в этой статье $2 + 1$ -мерная модель может рассматриваться как игрушечная модель, демонстрирующая некоторые общие свойства более важных с физической точки зрения калибровочных теорий высших спинов в высших размерностях $d \geq 4$.

2. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Мы описываем $2 + 1$ -мерное АдС-пространство в терминах 1-формы лоренцевой связности $\omega^{\alpha\beta} = dx^\nu \omega_\nu^{\alpha\beta}(x)$ и 1-формы триады $h^{\alpha\beta} = dx^\nu h_\nu^{\alpha\beta}(x)$. Здесь x^ν – пространственно-временные координаты ($\nu = 0, 1, 2$), а $\alpha, \beta, \dots = 1, 2$ – спинорные индексы, поднимаемые и опускаемые с помощью симплектической формы $\epsilon_{\alpha\beta} = -\epsilon_{\beta\alpha}$, $A^\alpha = \epsilon^{\alpha\beta} A_\beta$, $A_\alpha = A^\beta \epsilon_{\beta\alpha}$, $\epsilon_{12} = \epsilon^{12} = 1$. АдС-геометрия может быть описана уравнениями

$$d\omega_{\alpha\beta} = \omega_{\alpha\gamma} \wedge \omega_{\beta}{}^\gamma + \lambda^2 h_{\alpha\gamma} \wedge h_{\beta}{}^\gamma, \quad (1)$$

$$dh_{\alpha\beta} = \omega_{\alpha\gamma} \wedge h_{\beta}{}^\gamma + \omega_{\beta\gamma} \wedge h_{\alpha}{}^\gamma, \quad (2)$$

которые имеют форму условий нулевой кривизны для напряженностей полей Янга–Миллса, соответствующих $o(2, 2) \sim sp(2) \oplus sp(2)$. Здесь $\omega_{\alpha\beta}$ и $h_{\alpha\beta}$ симметричны по α и β . Для пространственно-временной геометрической интерпретации этих уравнений необходимо предположить, что триада $h_\nu^{\alpha\beta}$ является невырожденной матрицей 3×3 . Тогда (2) сводится к условию нулевого кручения, которое позволяет выразить лоренцеву связность через триаду $h_\nu^{\alpha\beta}$, а (1) означает, что 2-форма тензора Римана $R_{\alpha\beta} = d\omega_{\alpha\beta} - \omega_{\alpha\gamma} \wedge \omega_{\beta}{}^\gamma$ приобретает АдС-вид

$$R_{\alpha\beta} = \lambda^2 h_{\alpha\gamma} \wedge h_{\beta}{}^\gamma, \quad (3)$$

где λ^{-1} отождествляется с радиусом АдС-пространства.

В [1] было показано, что свободные полевые уравнения для полей материи в $2 + 1$ -мерии можно сформулировать в терминах производящей функции $C(y | x)$:

$$C(y | x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} C_{\alpha_1 \dots \alpha_n}(x) y^{\alpha_1} \dots y^{\alpha_n}, \quad (4)$$

в следующем “развернутом” виде:

$$DC = h^{\alpha\beta} \left[a(N) \frac{\partial}{\partial y^\alpha} \frac{\partial}{\partial y^\beta} + b(N) y_\alpha \frac{\partial}{\partial y^\beta} + e(N) y_\alpha y_\beta \right] C, \quad (5)$$

где D – лоренцев ковариантный дифференциал:

$$D = d - \omega^{\alpha\beta} y_\alpha \frac{\partial}{\partial y^\beta}, \quad (6)$$

а N – оператор Эйлера:

$$N \equiv y^\alpha \frac{\partial}{\partial y^\alpha}. \quad (7)$$

Условия интегрируемости уравнения (5) (т.е. согласованности с $d^2 = 0$) требуют, чтобы функции a , b и e удовлетворяли следующим ограничениям [1]:

$$\begin{aligned} \alpha(n) = 0 \quad \text{при} \quad n \geq 0, \quad \gamma(n) = 0 \quad \text{при} \quad n \geq 2, \\ \beta(n) = 0 \quad \text{при} \quad n \geq 1, \end{aligned} \quad (8)$$

где

$$\alpha(N) = a(N) [(N+4)b(N+2) - Nb(N)], \quad (9)$$

$$\gamma(N) = e(N) [(N+2)b(N) - (N-2)b(N-2)], \quad (10)$$

$$\beta(N) = (N+3)a(N)e(N+2) - (N-1)e(N)a(N-2) + b^2(N) - \lambda^2. \quad (11)$$

В [1] было показано, что при условии $a(n) \neq 0 \quad \forall n \geq 0$ с точностью до переопределения полей $C \rightarrow \tilde{C} = \varphi(N)C$, $\varphi(n) \neq 0 \quad \forall n \in \mathbf{Z}^+$ существуют два однопараметрических класса независимых решений (8):

$$\begin{aligned} a(n) = 1, \quad b(n) = 0, \quad e(n) = \frac{1}{4}\lambda^2 - \frac{M^2}{2(n+1)(n-1)}, \quad n \text{ четное}, \\ a(n) = b(n) = e(n) = 0, \quad n \text{ нечетное}, \end{aligned} \quad (12)$$

и

$$\begin{aligned} a(n) = b(n) = e(n) = 0, \quad n \text{ четное}, \\ a(n) = 1, \quad b(n) = \frac{\sqrt{2}M}{n(n+2)}, \quad e(n) = \frac{1}{4}\lambda^2 - \frac{M^2}{2n^2}, \quad n \text{ нечетное}, \end{aligned} \quad (13)$$

с произвольным параметром M . В результате система (5) сводится к двум независимым бесконечным цепочкам уравнений для бозонов и фермионов, которые описываются мультиспинарами с четным и нечетным числом индексов, соответственно.

Для выяснения физического содержания этих уравнений необходимо отождествить низшие компоненты разложения (4), $C(x)$ и $C_\alpha(x)$, с физическими бозонным (спин 0) и фермионным (спин 1/2) полями материи, соответственно, и проверить, во-первых, что система (5) соответствует физическим уравнениям Клейна–Гордона и Дирака с ненулевой массой:

$$\square C = \left(\frac{3}{2}\lambda^2 - M^2 \right) C, \quad (14)$$

$$h^\nu{}_\alpha{}^\beta D_\nu C_\beta = \frac{M}{\sqrt{2}} C_\alpha, \quad (15)$$

и, во-вторых, что все остальные уравнения в (5) выражают все высшие мультиспиноры через высшие производные материальных полей C и C_α , не накладывая при этом на последние никаких дополнительных ограничений. Отметим, что даламбертиан определен обычным образом:

$$\square = D^\mu D_\mu, \quad (16)$$

где D_μ – полная фоновая ковариантная производная, содержащая кристоффелеву связность, соответствующую нулевому кручению и определяемую через метрический постулат $D_\mu h_\nu^{\alpha\beta} = 0$. Обратная триада определяется аналогично [1]:

$$h_\nu^{\alpha\beta} h^\nu_{\gamma\delta} = \frac{1}{2} (\delta_\gamma^\alpha \delta_\delta^\beta + \delta_\delta^\alpha \delta_\gamma^\beta). \quad (17)$$

Заметим также, что индексы μ, ν поднимаются и опускаются с помощью метрического тензора

$$g_{\mu\nu} = h_\mu^{\alpha\beta} h_{\nu\alpha\beta}.$$

Как подчеркивается в [1], уравнения (5) являются примером условий ковариантного постоянства вида

$$dC_i = A_i^j C_j \quad (18)$$

с калибровочными полями $A_i^j = A^a (T_a)_i^j$, подчиняющимися условиям нулевой кривизны

$$dA^a = U_{bc}^a A^b \wedge A^c, \quad (19)$$

где U_{bc}^a – структурные коэффициенты (супер)алгебры Ли, приводящей к калибровочным полям A^a (ср. с (1), (2)). Тогда требование выполнения условий интегрируемости для (18) эквивалентно требованию, чтобы $(T_a)_i^j$ образовывали некоторое матричное представление калибровочной алгебры. Таким образом, задача состоит в нахождении такого представления группы пространственно-временной симметрии, которое привело бы к правильным полевым уравнениям. В результате, после того как уравнения переписаны в такой “развернутой” форме, можно записать их общее решение в чисто калибровочном виде: $A(x) = -g^{-1}(x)dg(x)$, $C(x) = T(g^{-1})(x)C_0$, где C_0 есть произвольный не зависящий от x элемент пространства представления. Это общее решение имеет структуру ковариантного разложения Тейлора [1]. В рассматриваемой задаче соответствующее (бесконечномерное) представление АдС-алгебры характеризуется коэффициентами (12) и (13).

3. ОПЕРАТОРНАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ ДЛЯ СЛУЧАЯ ПРОИЗВОЛЬНОЙ МАССЫ

Дадим теперь описание операторной алгебры, которая автоматически приводит к правильным уравнениям для массивных полей в форме (5).

Следуя [3], введем “осцилляторы”, подчиняющиеся коммутационным соотношениям,

$$[\hat{y}_\alpha, \hat{y}_\beta] = 2i\epsilon_{\alpha\beta}(1 + \nu k), \quad (20)$$

где $\alpha, \beta = 1, 2$, k – оператор Клейна, антикоммутирующий с $\hat{y}_\alpha$,

$$k\hat{y}_\alpha = -\hat{y}_\alpha k, \quad k^2 = 1, \quad (21)$$

а ν – свободный параметр. Основным свойством этих “осцилляторов” является то, что их билинейные комбинации

$$T_{\alpha\beta} = \frac{1}{4i} \{\hat{y}_\alpha, \hat{y}_\beta\} \quad (22)$$

удовлетворяют стандартным коммутационным соотношениям $sp(2)$:

$$[T_{\alpha\beta}, T_{\gamma\delta}] = \epsilon_{\alpha\gamma} T_{\beta\delta} + \epsilon_{\beta\delta} T_{\alpha\gamma} + \epsilon_{\alpha\delta} T_{\beta\gamma} + \epsilon_{\beta\gamma} T_{\alpha\delta}, \quad (23)$$

а также

$$[T_{\alpha\beta}, \hat{y}_\gamma] = \epsilon_{\alpha\gamma} \hat{y}_\beta + \epsilon_{\beta\gamma} \hat{y}_\alpha \quad (24)$$

при любых ν . Отметим, что частный случай “осцилляторов” такого типа рассматривался Вигнером [4], который поставил вопрос о возможности такой модификации коммутационных соотношений, чтобы соотношение $[H, a_\pm] = \pm a_\pm$ оставалось в силе. Это соотношение является частным случаем (24) при $H = T_{12}$ и $a_\pm = y_{1,2}$.

Свойство (23) позволяет нам записать гравитационные поля, соответствующие $o(2, 2)$, в следующем виде:

$$W_{\text{gr}}(x) = \omega + \lambda h; \quad \omega \equiv \frac{1}{8i} \omega^{\alpha\beta} \{\hat{y}_\alpha, \hat{y}_\beta\}, \quad h \equiv \frac{1}{8i} h^{\alpha\beta} \{\hat{y}_\alpha, \hat{y}_\beta\} \psi, \quad (25)$$

где ψ — дополнительный центральный инволютивный элемент:

$$\psi^2 = 1, \quad [\psi, \hat{y}_\alpha] = 0, \quad [\psi, k] = 0, \quad (26)$$

который вводится для описания 3-мерной АдС-алгебры $o(2, 2) \sim sp(2) \oplus sp(2)$, порождаемой генераторами

$$L_{\alpha\beta} = \frac{1}{4i} \{\hat{y}_\alpha, \hat{y}_\beta\}, \quad P_{\alpha\beta} = \frac{1}{4i} \{\hat{y}_\alpha, \hat{y}_\beta\} \psi. \quad (27)$$

Теперь уравнения (1) и (2), описывающие вакуумную АдС-геометрию, приобретают форму

$$dW_{\text{gr}} = W_{\text{gr}} \wedge W_{\text{gr}}. \quad (28)$$

Введем операторнозначную производящую функцию $C(\hat{y}, k \mid x)$:

$$C(\hat{y}, k, \psi \mid x) = \sum_{A, B=0,1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \lambda^{-[\frac{n}{2}]} C_{\alpha_1 \dots \alpha_n}^{AB}(x) k^A \psi^B \hat{y}^{\alpha_1} \dots \hat{y}^{\alpha_n}, \quad (29)$$

где $C_{\alpha_1 \dots \alpha_n}^{AB}$ — полностью симметричные тензоры (что подразумевает вейлевское упорядочение операторов $\hat{y}_\alpha$). Легко видеть, что следующие два типа уравнений:

$$DC = \lambda[h, C] \quad (30)$$

и

$$DC = \lambda\{h, C\}, \quad (31)$$

где

$$DC \equiv dC - [\omega, C], \quad (32)$$

непротиворечивы (т.е. условия интегрируемости удовлетворяются как следствие условий на вакуум (28)). Действительно, (30) соответствует присоединенному действию алгебры пространственно-временной симметрии (27) на алгебре модифицированных “осцилляторов”. Уравнения же (31) соответствуют другому представлению пространственно-временной симметрии, которое мы назовем “твистованным” представлением. Тот факт, что мы можем заменить коммутатор на антикоммутатор в слагаемом, пропорциональном триаде, есть простое следствие того, что АдС-алгебра имеет инволютивный автоморфизм, меняющий знак АдС-трансляций. В используемой здесь реализации он индуцируется автоморфизмом $\psi \rightarrow -\psi$.

Между этими двумя представлениями имеется важное различие. Первое представление, содержащее коммутатор, разлагается в бесконечную прямую сумму конечномерных представлений алгебры пространственно-временной симметрии. Более того, вследствие свойства (24) это представление не зависит от ν и, следовательно, эквивалентно представлению с $\nu = 0$, которое, как показано в [1], описывает бесконечный ряд вспомогательных (топологических) полей. С другой стороны, твистованное представление есть именно то бесконечномерное представление, которое необходимо для описания полей материи (далее мы будем использовать букву C для обозначения только твистованного представления).

Чтобы убедиться в этом, необходимо провести покомпонентный анализ уравнений (31), который заключается в переупорядочении операторов, приводящем все члены к вейлевски упорядоченной форме по отношению к $\hat{y}_\alpha$. В результате мы получим, что (31) принимает форму уравнения (5) со следующими значениями коэффициентов $a(n)$, $b(n)$ и $e(n)$:

$$a(n) = \frac{i\lambda}{2} \left[1 + \nu k \frac{1 + (-1)^n}{(n+2)^2 - 1} - \frac{\nu^2}{(n+2)^2((n+2)^2 - 1)} \left((n+2)^2 - \frac{1 - (-1)^n}{2} \right) \right], \quad (33)$$

$$b(n) = -\nu k \lambda \frac{1 - (-1)^n}{2n(n+2)}, \quad (34)$$

$$e(n) = -\frac{i\lambda}{2}. \quad (35)$$

Как и ожидалось, эти выражения удовлетворяют условиям (8).

Вспомним теперь, что из-за наличия оператора Клейна k мы имеем удвоенное число полей по сравнению со случаем, рассмотренным в начале этого раздела. С помощью двух проекторов $P_\pm$ можно выделить неприводимые компоненты

$$C_\pm \equiv P_\pm C, \quad P_\pm \equiv \frac{1 \pm k}{2}. \quad (36)$$

В результате мы получим уравнение (5) с коэффициентами (33)–(35) в следующей компонентной форме:

$$DC_{\alpha(n)}^\pm = \frac{i}{2} \left[\left(1 - \frac{\nu(\nu \mp 2)}{(n+1)(n+3)} \right) h^{\beta\gamma} C_{\beta\gamma\alpha(n)}^\pm - \lambda^2 n(n-1) h_{\alpha\alpha} C_{\alpha(n-2)}^\pm \right] \quad (37)$$

для четных n и

$$DC_{\alpha(n)}^{\pm} = \frac{i}{2} \left(1 - \frac{\nu^2}{(n+2)^2} \right) h^{\beta\gamma} C_{\beta\gamma\alpha(n)}^{\pm} \pm \frac{\nu\lambda}{n+2} h_{\alpha}^{\beta} C_{\beta\alpha(n-1)}^{\pm} - \frac{i}{2} \lambda^2 n(n-1) h_{\alpha\alpha} C_{\alpha(n-1)}^{\pm} \quad (38)$$

для нечетных n . Здесь мы используем обозначение $C_{\alpha(n)} = C_{\alpha_1, \dots, \alpha_n}$ и предполагаем, что по индексам, обозначенным буквой α , проведена полная симметризация.

Как показано в [1], даламбертиан, соответствующий уравнению (5), имеет следующий вид

$$\square C = \left[(N+3)(N+2)a(N)e(N+2) + N(N-1)e(N)a(N-2) - \frac{1}{2}N(N+2)b^2(N) \right] C. \quad (39)$$

Подстановка (33)–(35) в (39) дает

$$\square C_{\pm} = \left[\lambda^2 \frac{N(N+2)}{2} + \lambda^2 \frac{3}{2} - M_{\pm}^2 \right] C_{\pm}, \quad (40)$$

где

$$M_{\pm}^2 = \lambda^2 \frac{\nu(\nu \mp 2)}{2}, \quad n \text{ четное}, \quad (41)$$

$$M_{\pm}^2 = \lambda^2 \frac{\nu^2}{2}, \quad n \text{ нечетное}. \quad (42)$$

Таким образом, показано, что модификация (20) позволяет описать поля материи¹⁾ с произвольным массовым параметром, связанным с ν . Данная конструкция естественным образом обобщает реализацию уравнений для безмассовых полей материи в терминах обычных ($\nu = 0$) “осцилляторов”, предложенную в [1]. Важно, однако, подчеркнуть, что эта конструкция не приводит с необходимостью к ненулевым значениям коэффициентов $a(n)$. Например, рассмотрим выражение (33) для бозонной части C_+ , т.е. положим $k = 1$, $n = 2m$, m целое:

$$a(2m) = \frac{i\lambda}{2} \left[1 - \frac{\nu(\nu-2)}{(2m+1)(2m+3)} \right]. \quad (43)$$

Отсюда ясно, что $a(2l) = 0$ при $\nu = \pm 2(l+1) + 1$. Нетрудно видеть, что некоторые из коэффициентов $a(n)$ обращаются в нуль тогда и только тогда, когда $\nu = 2k + 1$ при некоторых целых k . Этот вывод находится в согласии с результатами [3], где было показано, что при этих значениях ν обертывающая алгебра для коммутационных соотношений (20) $Aq(2; \nu | \mathbb{C})$ имеет идеалы. Таким образом, при $\nu = 2k + 1$ система уравнений, полученная из операторной реализации (31), строго говоря, отличается от рассмотренной в [1]. Особенности вырожденной системы с $\nu = 2k + 1$ мы обсудим в разделе 5.

¹⁾Напомним читателю, что компоненты физического материального поля выделяются условиями $NC_{\pm} = 0$ в бозонном секторе и $NC_{\pm} = C_{\pm}$ в фермионном секторе.

В [5] было показано, что алгебра $Aq(2, \nu)$ изоморфна фактор-алгебре $U(osp(1, 2))/I(C_2 - \nu^2)$, где $U(osp(1, 2))$ есть обертывающая алгебра для $osp(1, 2)$, а $I(C_2 - \nu^2)$ – идеал, образованный всеми элементами вида

$$(C_2 - \nu^2)x, \quad \forall x \in U(osp(1, 2)),$$

где C_2 – квадратичный оператор Казимира для $osp(1, 2)$. Из этого наблюдения следует, в частности, что описанная выше “осцилляторная” реализация явно суперсимметрична. Фактически она является $N = 2$ -суперсимметричной [5], причем генераторы $osp(2, 2)$ имеют вид

$$T_{\alpha\beta} = \frac{1}{4i}\{\hat{y}_\alpha, \hat{y}_\beta\}, \quad Q_\alpha = \hat{y}_\alpha, \quad S_\alpha = \hat{y}_\alpha k, \quad J = k + \nu.$$

Это наблюдение гарантирует, что рассматриваемая система уравнений обладает глобальной $N = 2$ -суперсимметрией. Именно эта $N = 2$ -суперсимметрия приводит к удвоенному числу бозонов и фермионов в модели.

4. БОЗОННЫЙ СЛУЧАЙ И $U(o(2, 1))$

Чисто бозонный случай может быть рассмотрен в терминах бозонных операторов без удвоения полей, вызванного суперсимметрией. Для этого будем использовать ортогональную реализацию АдС-алгебры $o(2, 2) \sim o(2, 1) \oplus o(2, 1)$. Пусть T_a – генераторы $o(2, 1)$,

$$[T_a, T_b] = \epsilon_{ab}{}^c T_c, \quad (44)$$

где ϵ_{abc} – полностью антисимметричный 3-мерный тензор, $\epsilon_{012} = 1$, а латинские индексы поднимаются и опускаются с помощью метрики Киллинга на $o(2, 1)$,

$$A^a = \eta^{ab} A_b, \quad \eta = \text{diag}(1, -1, -1).$$

Пусть фоновое гравитационное поле имеет форму

$$W_\mu = \omega_\mu{}^a T_a + \tilde{\lambda} \psi h_\mu{}^a T_a, \quad (45)$$

где ψ – центральный инволютивный элемент,

$$\psi^2 = 1, \quad [\psi, T_a] = 0, \quad (46)$$

и пусть W подчиняется условиям нулевой кривизны (28). Заметим, что обратная триада $h^\mu{}_a$ нормирована так, что

$$h_\mu{}^a h^{\mu b} = \eta^{ab}. \quad (47)$$

Наложим на T_a ограничение, связанное со следующим дополнительным условием на квадратичный оператор Казимира:

$$C_2 \equiv T_a T^a = \frac{1}{8} \left(\frac{3}{2} - \frac{M^2}{\tilde{\lambda}^2} \right). \quad (48)$$

Введем динамическую 0-форму C как функцию T_a и ψ :

$$C = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{A=0,1} \frac{1}{n!} \psi^A C_A^{a_1 \dots a_n}(x) T_{a_1} \dots T_{a_n}, \quad (49)$$

где $C_A^{a_1 \dots a_n}$ — полностью симметричные бесследовые тензоры. Аналогичным образом можно сказать, что C принимает значения в алгебре $A_M \oplus A_M$, где $A_M = U(o(2,1))/I_{(C_2 - \frac{1}{8}(\frac{3}{2} - \frac{M^2}{\tilde{\lambda}^2}))}$. Здесь $U(o(2,1))$ — обертывающая алгебра для соотношений (44), а $I_{(C_2 - \frac{1}{8}(\frac{3}{2} - \frac{M^2}{\tilde{\lambda}^2}))}$ — идеал, образованный всеми элементами вида

$$\left[C_2 - \frac{1}{8} \left(\frac{3}{2} - \frac{M^2}{\tilde{\lambda}^2} \right) \right] x, \quad \forall x \in U(o(2,1)).$$

Теперь мы можем написать уравнение, аналогичное (31), в виде

$$D_\mu C = \tilde{\lambda} \psi h_\mu^a \{T_a, C\}, \quad (50)$$

где

$$D_\mu C = \partial_\mu C - \omega_\mu^a [T_a, C]. \quad (51)$$

Действуя на обе стороны (50) полной ковариантной производной D^μ , определяемой через метрический постулат $D_\mu(h_\nu^a T_a) = 0$ при условии симметричности кристоффелевой связности, получим

$$\square C_n = \frac{1}{2} \tilde{\lambda}^2 \left[2n(n+1) + \frac{3}{2} - \frac{M^2}{\tilde{\lambda}^2} \right] C_n, \quad (52)$$

где посредством C_n обозначен моном n -й степени в (49). Мы видим, что этот результат совпадает с (40) при $N = 2n$ и

$$\lambda^2 = \frac{1}{2} \tilde{\lambda}^2. \quad (53)$$

Можно проверить также, что условия нулевой кривизны для калибровочных полей (25) и (45) эквивалентны друг другу при условии (53). Явные соотношения таковы:

$$\omega_\mu^{\alpha\beta} = -\frac{1}{2} \omega_\mu^a \sigma_a^{\alpha\beta}, \quad h_\mu^{\alpha\beta} = -\frac{1}{\sqrt{2}} h_\mu^a \sigma_a^{\alpha\beta}, \quad T_a = -\frac{1}{16i} \sigma_a^{\alpha\beta} \{\hat{y}_\alpha, \hat{y}_\beta\},$$

где $\sigma_a^{\alpha\beta} = (I, \sigma_1, \sigma_3)$, σ_1, σ_3 — симметричные матрицы Паули.

Нетрудно также проверить, что, как и ожидалось, уравнение (50) имеет те же вырожденные точки по M , которые имеет уравнение (5) согласно (43).

5. ВЫРОЖДЕННЫЕ ТОЧКИ

В этом разделе мы кратко обсудим особенности уравнения (31) в сингулярных по ν точках. Подставим разложение (29) в (5) с коэффициентами (33)–(35) и спроецируем (5)

на подпространство бозонов C_+ , полагая $k = 1$, а n четным. Тогда в компонентной форме мы получим

$$DC_{\alpha(n)} = \frac{i}{2} \left[\left(1 - \frac{\nu(\nu-2)}{(n+1)(n+3)} \right) h^{\beta\gamma} C_{\beta\gamma\alpha(n)} - \lambda^2 n(n-1) h_{\alpha\alpha} C_{\alpha(n-2)} \right]. \quad (54)$$

В общем случае (т.е. при $\nu \neq 2l+1$, l целое) данная цепочка уравнений начинается со скалярной компоненты и эквивалентна динамическому уравнению (14) с $M^2 = \lambda^2 \frac{\nu(\nu-2)}{2}$, дополненному либо соотношениями, выражающими высшие мультиспиноры через высшие производные от C , либо тождествами, которые отражают тот факт, что высшие производные симметричны.

При $\nu = 2l+1$ первый член в правой части (54) обращается в нуль для $n = 2(\pm l - 1)$. Поскольку n неотрицательно, выберем для определенности решение с $n = 2(l-1)$, $l > 0$. Легко видеть, что компонента ранга $2l$ более не выражается из уравнения (54) через производные скалярной компоненты C , становясь тем самым независимой динамической переменной. Вместо этого из уравнения (54) следует равенство нулю (АдС-ковариантной) производной l -го порядка от скалярного поля C . В результате система уравнений (54) в вырожденных точках приобретает неразложимую треугольную форму с конечной подсистемой уравнений для набора мультиспиноров $C_{\alpha(2n)}$, $n < l$, и бесконечной системой уравнений для динамического поля $C_{\alpha(2l)}$ и высших мультиспиноров, которая содержит в правой части производные от исходного поля C в качестве источников.

Подсистема для низших мультиспиноров описывает сектор, аналогичный системе топологических полей (30), который может содержать лишь конечное число степеней свободы. Фактически требования унитарности приводят к тому, что эта система должна быть динамически тривиальной (не существует конечномерных унитарных представлений групп пространственно-временной симметрии)²⁾. С физической точки зрения это эквивалентно наложению таких граничных условий на бесконечности, которые устраняют эти степени свободы, поскольку, имея лишь конечное число ненулевых производных, эти поля растут полиномиально на пространственно-временной бесконечности (исключая, конечно, постоянное поле C).

Таким образом, мы можем отщепить низшие компоненты и рассматривать систему уравнений, начинающуюся с поля $C_{\alpha(2l)}$. Такие системы динамически нетривиальны и соответствуют определенным калибровочным системам. Можно, например, показать, что первая вырожденная точка $\nu = 3$ соответствует 3-мерной электродинамике. Для этого необходимо ввести 2-форму

$$F = h^\alpha_\gamma \wedge h^{\gamma\beta} C_{\alpha\beta} \quad (55)$$

и убедиться в том, что бесконечная часть системы (54) с $n \geq 2$ (т.е. без скалярного поля) эквивалентна уравнениям Максвелла

$$dF = 0, \quad d^*F = 0, \quad (56)$$

²⁾ Единственным исключением является случай, когда вырождение имеет место на самом низком уровне и представление оказывается тривиальным (константа).

дополненным бесконечной цепочкой высших тождеств Бианки (здесь посредством $*F$ обозначена форма, дуальная к F). Заметим, что при нашей нормировке массы электродинамика оказывается массивной с массой $M^2 = \frac{3}{2}\lambda^2$, которая исчезает в плоском пределе $\lambda \rightarrow 0$. Более подробный анализ такой формулировки электродинамики, а также аналогичных систем, соответствующих высшим вырожденным точкам, будет сделан в дальнейшей работе Прокушкина и Васильева.

Отметим далее, что существует альтернативная формулировка динамики полей материи, которая эквивалентна исходной [1] при любых ν и основана на “котвистованном” представлении $\tilde{C}$. А именно, введем невырожденную инвариантную форму

$$\langle C, \tilde{C} \rangle = \int d^4x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} C_{\alpha(2n)} \tilde{C}^{\alpha(2n)}, \quad (57)$$

ограничиваясь для простоты чисто бозонным случаем в секторе C_+ .

Ковариантный дифференциал, соответствующий твистованному представлению C алгебры $o(2, 2)$, имеет форму

$$\mathcal{D}C = dC - [\omega, C] - \lambda\{h, C\}, \quad (58)$$

так что уравнение (31) приобретает вид $\mathcal{D}C = 0$. Ковариантная производная в котвистованном представлении может быть получена из условия инвариантности

$$\langle C, \mathcal{D}\tilde{C} \rangle = -\langle \mathcal{D}C, \tilde{C} \rangle. \quad (59)$$

Она имеет следующий явный вид:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}\tilde{C}^{\alpha(n)} &= d\tilde{C}^{\alpha(n)} - n\omega^\alpha{}_\beta \tilde{C}^{\beta\alpha(n-1)} - \\ &- \frac{i}{2} \left[h_{\beta\gamma} \tilde{C}^{\beta\gamma\alpha(n)} - \lambda^2 n(n-1) \left(1 - \frac{\nu(\nu-2)}{(n-1)(n+1)} \right) h^{\alpha\alpha} \tilde{C}^{\alpha(n-2)} \right]. \end{aligned} \quad (60)$$

В результате уравнение для $\tilde{C}$, аналогичное (54), выглядит так:

$$\mathcal{D}\tilde{C}^{\alpha(n)} = \frac{i}{2} \left[h_{\beta\gamma} \tilde{C}^{\beta\gamma\alpha(n)} - \lambda^2 n(n-1) \left(1 - \frac{\nu(\nu-2)}{(n-1)(n+1)} \right) h^{\alpha\alpha} \tilde{C}^{\alpha(n-2)} \right]. \quad (61)$$

Мы видим, что теперь член, содержащий высший мультиспинор, появляется с единичным коэффициентом, в то время как коэффициент при низшем мультиспиноре может обратиться в нуль. Уравнение (61) тождественно совпадает с уравнением, полученным в [1], которое приведено в разделе 2 данной статьи. Заметим, что твистованное и котвистованное представления эквивалентны при всех $\nu \neq 2l+1$, поскольку алгебра деформированных “осцилляторов” имеет инвариантную квадратичную форму, не вырожденную при всех $\nu \neq 2l+1$ [3]. При $\nu = 2l+1$ это не так, поскольку инвариантная форма вырождается, и, следовательно, твистованное и котвистованное представления оказываются формально неэквивалентными.

Теперь возникают два вопроса. Первый — какова с физической точки зрения разница между уравнениями, соответствующими твистованному и котвистованному представлениям, в вырожденных точках, и второй — которое из этих двух представлений может использоваться в теории со взаимодействием. Эти вопросы более подробно будут рассмотрены в последующей работе Прокушкина и Васильева. Здесь же мы лишь отметим, что на уровне свободных полей эти две формулировки физически эквивалентны и в действительности оказываются дуальными друг другу. Например, в случае электродинамики скалярная компонента поля C в котвистованном представлении может интерпретироваться как магнитный потенциал, причем $*F = dC$. Возникает нетривиальный вопрос, распространяется ли такая формулировка на случай произвольной непротиворечивой локальной теории со взаимодействием. На первый взгляд представляется, что формулировка в терминах твистованного представления имеет больше шансов “выжить” вне линейного приближения. В следующей работе будет показано, что это действительно так.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной статье мы предлагаем простой алгебраический метод, позволяющий сформулировать свободные полевые уравнения для массивных полей материи спина 0 и $1/2$ в $2 + 1$ -мерном АдС-пространстве в виде условий ковариантного постоянства для определенного бесконечномерного представления группы пространственно-временной симметрии. Важным преимуществом такой формулировки является то, что она позволяет просто описать структуру глобальных симметрий высших спинов. Эти симметрии описываются параметрами, принимающими значения в бесконечномерной алгебре функций всех производящих элементов y_α , k и ψ , т.е. $\varepsilon = \varepsilon(y_\alpha, k, \psi | x)$. Полный закон преобразования имеет вид

$$\delta C = \varepsilon C - C \tilde{\varepsilon}, \quad (62)$$

где

$$\tilde{\varepsilon}(y_\alpha, k, \psi | x) = \varepsilon(y_\alpha, k, -\psi | x), \quad (63)$$

а зависимость ε от x дается уравнением

$$d\varepsilon = W_{\text{gr}}\varepsilon - \varepsilon W_{\text{gr}}, \quad (64)$$

которое является интегрируемым вследствие выполнения условий нулевой кривизны (28), и, следовательно, имеет единственное решение, зависящее от произвольной функции $\varepsilon_0(y_\alpha, k, \psi) = \varepsilon(y_\alpha, k, \psi | x_0)$ для произвольной точки пространства-времени x_0 . Нетрудно убедиться в том, что уравнение (31) действительно инвариантно относительно преобразований (62).

Получение в явном виде структуры глобальной симметрии высших спинов является одним из главных результатов этой статьи. В последующей публикации Прокушкина и Васильева это будет служить отправной точкой для анализа взаимодействий полей материи посредством высших спинов в $2 + 1$ -мерии. Интересным свойством симметрии высших спинов, продемонстрированным в данной статье, является то, что вид этих симметрий зависит от рассматриваемой динамической системы. Действительно, алгебры

высших спинов с разными $M^2(\nu)$ неизоморфны друг другу. Это следует из тождественности симметрий высших спинов и определенных фактор-алгебр обертывающих алгебр для алгебр пространственно-временной симметрии (см. раздел 4). Обычные пространственно-временные симметрии могут быть отождествлены, в свою очередь, с (максимальными) конечномерными подалгебрами алгебр высших спинов, не зависящими от динамических параметров, подобных ν (ср. с (20)).

Бесконечномерные алгебры, изоморфные алгебрам, рассмотренным в разделе 4, первоначально были введены в [6, 7] как кандидаты на роль 3-мерных бозонных алгебр высших спинов, в то время как супералгебры деформированных “осцилляторов”, описанные в разделе 3, были предложены в [3] как кандидаты на роль 3-мерных супералгебр высших спинов. С использованием всех этих алгебр и определения суперследа, предложенного в [3], возникла возможность записать действие Черна–Саймонса для 3-мерных калибровочных полей высших спинов, которые все являются динамически тривиальными в отсутствие полей материи (в топологически тривиальной ситуации). Первоначально это было сделано Бленковым [8] для случая алгебры Гейзенберга (т.е. $\nu = 0$). Однако было неясно, каков физический смысл неоднозначности по непрерывному параметру, подобному ν , параметризующему неизоморфные между собой 3-мерные алгебры высших спинов. В данной статье нами показано, что различные симметрии реализуются в различных мультиплетах материальных полей, откуда мы делаем заключение, что симметрии высших спинов оказываются зависящими от рассматриваемой физической модели.

Исследование, описанное в данной статье, осуществлялось при частичной поддержке Комиссии Европейского сообщества по контракту INTAS (грант № 94-2317) и Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 96-01-01144).

Список литературы

- [1] *M. A. Vasiliev.* Class. Quantum Gravity. 1994. V. 11. P. 649.
- [2] *M. A. Vasiliev.* Mod. Phys. Lett. 1992. V. A7. P. 3689.
- [3] *M. A. Vasiliev.* JETP Lett. 1989. V. 50. № 8. P. 374; Int. J. Mod. Phys. 1991. V. A6. P. 1115.
- [4] *E. P. Wigner.* Phys. Rev. 1950. V. 77. P. 711.
- [5] *E. Bergshoeff, B. de Wit, M. A. Vasiliev.* Nucl. Phys. 1991. V. B336. P. 315.
- [6] *E. Bergshoeff, M. P. Blencowe, K. S. Stelle.* Commun. Math. Phys. 1990. V. 128. P. 213.
- [7] *M. Bordemann, J. Hoppe, P. Schaller.* Phys. Lett. 1989. V. 232. P. 199.
- [8] *M. P. Blencowe.* Class. Quantum Gravity. 1989. V. 6. P. 443.

Поступила в редакцию 20.VIII.1996 г.

A. V. Barabanschikov, M. A. Vasiliev, S. F. Prokushkin FREE EQUATIONS FOR MASSIVE MATTER FIELDS IN 2 + 1-DIMENSIONAL ANTI-DE SITTER SPACE FROM DEFORMED OSCILLATOR ALGEBRA

We reformulate free equations of motion for massive spin 0 and spin 1/2 matter fields in 2+1-dimensional anti-de Sitter space in the form of some covariant constancy conditions. The infinite-dimensional representation of the anti-de Sitter algebra underlying this formulation is shown to admit a natural realization in terms of the algebra of deformed oscillators with a deformation parameter related to the parameter of mass.