Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. В. Антонов, М. Ю. Налимов, А. А. Удалов, Ренормализационная группа в задаче о развитой турбулентности сжимаемой жидкости, *ТМФ*, 1997, том 110, номер 3, 385–398

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf976>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.64.247

26 апреля 2023 г., 18:06:57

Н. В. Антонов*, М. Ю. Налимов*, А. А. Удалов*
**РЕНОРМАЛИЗАЦИОННАЯ ГРУППА В
ЗАДАЧЕ О РАЗВИТОЙ ТУРБУЛЕНТНОСТИ
СЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ**

Методом ренормализационной группы исследована модель развитой турбулентности сжимаемой жидкости (газа), основанная на стохастическом уравнении Навье–Стокса. Доказана мультипликативная ренормируемость предложенной модели в переменных скорость – логарифм плотности. В однопетлевом приближении вычислены скейлинговые размерности всех полей и параметров. Изучена зависимость эффективных скорости звука и числа Маха от интегрального масштаба турбулентности.

1. ВВЕДЕНИЕ

Метод ренормализационной группы (РГ) был с успехом использован в теории развитой гидродинамической турбулентности для обоснования колмогоровского скейлинга и вычисления различных универсальных величин (критических размерностей простых и составных полей, константы Колмогорова и т. д.), см. работы [1–8] и ссылки в них. В этих работах изучалась, как правило, несжимаемая жидкость (об исключениях см. ниже), здесь мы рассмотрим развитую турбулентность жидкости конечной сжимаемости (немалые числа Маха).

Феноменологическая теория Колмогорова–Обухова [9, 10] непосредственно обобщается на случай сжимаемой жидкости. Допуская зависимость корреляционных функций скорости в инерционном интервале волновых чисел $\chi \ll k \ll k_d$ ($k_d = l_d^{-1}$ – обратная диссипационная длина, $\chi = L^{-1}$ – обратный интегральный масштаб турбулентности) не только от средней скорости диссипации W , но и от дополнительного аргумента – скорости звука c (для несжимаемой жидкости $c = \infty$) и сохраняя предположение о независимости корреляторов от вязкости, для случая одновременного парного коррелятора скорости получаем

$$D(k) = W^{2/3} k^{-11/3} F(W^{2/3} k^{-2/3} c^{-2}). \quad (1)$$

С учетом соотношения $W \sim v_{rms}^3 L^{-1}$ (в котором v_{rms} – среднеквадратичная скорость жидкости) находим, что безразмерный аргумент скейлинговой функции F в (1) пропорционален $\text{Ma}^2 (Lk)^{-2/3}$, где $\text{Ma} = v_{rms}/c$ – число Маха. Предполагая разложимость F

* Санкт-Петербургский государственный университет

в нуле в ряд Тейлора и ограничиваясь первым членом разложения, находим

$$F(\dots) = 1 + \text{const } \text{Ma}^2 (Lk)^{-2/3}. \quad (2)$$

Выражение (2) описывает ведущую поправку к колмогоровскому спектру для несжимаемой жидкости за счет слабой сжимаемости (число Маха мало, множитель $(Lk)^{-2/3}$ в инерционном интервале ограничен).

Феноменологический результат (2) был обоснован в рамках скелетных уравнений самосогласования в работе [11] и с помощью аппарата РГ – в [12]. В последующей работе [13] этот результат был обобщен на все порядки разложения по числу Маха, но доказательство общего соотношения (1) пока отсутствует. Более того, есть основания считать, что развитая турбулентность при больших числах Маха (например, звуковая турбулентность [14, 15]) вообще не описывается теорией Колмогорова–Обухова и представление типа (1) для нее не имеет места.

В настоящей работе мы рассмотрим задачу о развитой турбулентности жидкости конечной сжимаемости (немалые числа Маха) с помощью метода РГ и покажем, что в ней действительно существует нетривиальный скейлинговый режим с прежней (колмогоровской) размерностью скорости жидкости; при вычислениях в однопетлевом приближении у нас получены “неколмогоровские” размерности скорости звука и плотности.

В разделе 2 обсуждается постановка задачи и приводится ее квантово-полевая формулировка. В разделе 3 рассматривается процедура ультрафиолетовой (УФ-) ренормировки теории. Отметим, что отсутствие ренормируемости рассматриваемой модели в переменных скорость – плотность до сих пор было препятствием для применения к ней аппарата РГ [13]. В работах [12, 13] эта трудность была преодолена тем, что задача сводилась к вычислению критических размерностей некоторых семейств составных полей (составных операторов) в исходной (“несжимаемой”) модели, которая является мультипликативно ренормируемой. При этом существенно использовались методы точного расчета критических размерностей составных операторов, развитые ранее в работах [3, 5, 6, 8], и полученная в них информация о размерностях конкретных операторов. Основываясь на результатах [13], мы предлагаем слегка изменить модель, а именно пренебречь учетом флуктуаций кинематической вязкости при флуктуациях плотности.

Основным результатом настоящей работы является доказательство мультипликативной ренормируемости предлагаемой модели в удобных переменных скорость – логарифм плотности, что и позволяет применить к ней метод РГ. В разделе 3 приводятся также результаты расчета констант ренормировки в однопетлевом приближении.

В разделе 4 вычисляются РГ-функции модели (β -функции и аномальные размерности) и обсуждается ее критическое поведение. Показано, что в физической области значений параметров (положительные вязкости и т.п.) уравнения РГ имеют единственную инфракрасно (ИК-) устойчивую неподвижную точку. Это означает наличие в ИК-области универсального асимптотического скейлингового режима. Соответствующие критические размерности вычислены в первом порядке ϵ -разложения (некоторые найдены точно).

В разделе 5 решение уравнений РГ обсуждается на примере одновременного парного коррелятора скорости, его скейлинговая функция найдена в первом порядке ϵ -разложе-

ния. Исследована зависимость эффективных скорости звука и числа Маха от внешнего масштаба турбулентности.

Наши результаты существенно отличаются от полученных ранее методом РГ в работе [16]. В разделе 5 поясняется, что рассмотренная в [16] модель не является мультипликативно-ренормируемой, т.к. процедура ее УФ-ренормировки генерирует бесконечное число необходимых контрчленов. Поэтому результаты [16] нельзя признать достоверными.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. КВАНТОВО-ПОЛЕВАЯ ФОРМУЛИРОВКА

В стохастической формулировке однородная изотропная развитая турбулентность сжимаемой жидкости (газа) описывается уравнением Навье–Стокса с внешней случайной силой [9, 10]

$$\nabla_t \phi_i = \nu_0 [\delta_{ik} \Delta - \partial_i \partial_k] \phi_k + u_0 \nu_0 \partial_i \partial_k \phi_k - \partial_i p / \rho + f_i \quad (3)$$

и уравнением неразрывности

$$\nabla_t \rho + \rho (\partial_i \phi_i) = 0, \quad (4)$$

здесь $\nabla_t \equiv \partial_t + (\phi_i \partial_i)$ – галилеево-ковариантная производная, ϕ_i – поле скорости жидкости, ρ – плотность, p – давление, f_i – плотность случайной силы (все эти величины зависят от $x \equiv (t, \mathbf{x})$). В записи (3) явно выделены поперечная и продольная части оператора Лапласа, ν_0 – кинематический коэффициент сдвиговой вязкости, параметр $u_0 > 0$ связан с коэффициентом объемной вязкости ζ_0 соотношением $\nu_0(u_0 - 1) = \nu_0/3 + \zeta_0/\rho$. Задача (3), (4) должна быть дополнена условием запаздывания, нулевым асимптотическим условием для поля ϕ_i при $t \rightarrow -\infty$, а также уравнением состояния $p = p(\rho)$. Его мы выбираем в простейшей форме линейной связи

$$(p - p_0) = c_0^2 (\rho - \rho_0) \quad (5)$$

между отклонениями давления и плотности от их средних значений p_0, ρ_0 ; c_0 – адиабатическая скорость звука. При написании (3), (4) использовано предположение о независимости кинематических коэффициентов сдвиговой и объемной вязкостей (т.е. ν_0 и u_0) от флуктуаций плотности ρ . Косвенным образом на допустимость такого предположения указывают результаты работы [13]. Этим и объясняется отличие уравнения (3) от рассмотренного в работе [16].

Для случайной силы предполагается гауссово распределение с нулевым средним и заданным коррелятором

$$\langle f_i(x) f_j(x') \rangle = \frac{\delta(t - t')}{(2\pi)^d} \int d\mathbf{k} d_{ij}^f(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}(\mathbf{x} - \mathbf{x}')}, \quad (6)$$

$$d_{ij}^f(\mathbf{k}) = g_0 \nu_0^3 k^{4-d-2\epsilon} [P_{ij}^\perp(\mathbf{k}) + a P_{ij}^\parallel(\mathbf{k})], \quad (7)$$

здесь d – произвольная (для общности) размерность пространства $\mathbf{x}$; $P_{ij}^\perp(\mathbf{k}) = \delta_{ij} - k_i k_j / k^2$, $P_{ij}^\parallel(\mathbf{k}) = k_i k_j / k^2$ – поперечный и продольный проекторы, $k \equiv |\mathbf{k}|$. Множитель

ν_0^3 выделен явно в (7) для удобства, $g_0 > 0$ играет роль константы связи (“заряда”) в теории возмущений, $a, \epsilon > 0$ – произвольные параметры. Случайная сила моделирует взаимодействие с крупномасштабными движениями ($k \sim \chi = L^{-1}$), поэтому физическая область значений параметра РГ-разложения ϵ есть $\epsilon \geq 2$, $\epsilon = 0$ соответствует так называемой логарифмической модели (подробнее см., например, в [6]). Для $\epsilon > 2$ выражение (7) должно быть как-то регуляризовано в области малых $k \sim \chi$. При этом возникает задача исследования зависимости корреляционных функций от χ , которая оказывается нетривиальной из-за наличия в теории “опасных” составных операторов с отрицательными размерностями [6, 8]. Эта задача не решена полностью и для случая несжимаемой жидкости, поэтому в дальнейшем мы ограничимся областью $0 < \epsilon \leq 2$, считая физическим значением $\epsilon = 2$. Отметим, что при $\epsilon = 2$ функцию (7) при подходящем выборе амплитуды можно рассматривать как степенную модель $\delta(\mathbf{k})$. Домножив уравнение неразрывности (4) на c_0^2/ρ , используя соотношение (5) и переходя к новой переменной $\Theta \equiv c_0^2 \ln(\rho/\rho_0)$, перепишем уравнения (3), (4) в виде

$$\nabla_t \phi_i = \nu_0 [\delta_{ik} \Delta - \partial_i \partial_k] \phi_k + u_0 \nu_0 \partial_i \partial_k \phi_k - \partial_i \Theta + f_i, \quad (8)$$

$$\nabla_t \Theta = -c_0^2 \partial_i \phi_i. \quad (9)$$

Такая форма записи выгодно отличается от (3), (4) локальностью по полям ϕ, Θ .

Согласно общей теореме [17] стохастическая задача (8), (9) эквивалентна квантово-полевой модели удвоенного набора полей $\Phi \equiv \phi, \phi', \Theta, \Theta'$ с функционалом действия

$$\begin{aligned} S(\Phi) = & \frac{1}{2} \phi'_i D_F{}_{ij} \phi'_j + \phi'_i [-\nabla_t \phi_i + \nu_0 (\delta_{ik} \Delta - \partial_i \partial_k) \phi_k + u_0 \nu_0 \partial_i \partial_k \phi_k - \partial_i \Theta] + \\ & + \Theta' [-\nabla_t \Theta + v_0 \nu_0 \Delta \Theta - c_0^2 \partial_i \phi_i], \end{aligned} \quad (10)$$

здесь D_F – коррелятор (6); необходимые суммирования по индексам полей и производных и интегрирования по $x \equiv (t, \mathbf{x})$ в (10) и аналогичных формулах ниже подразумеваются. О необходимости введения дополнительного слагаемого $v_0 \nu_0 \Theta' \Delta \Theta$ с $v_0 > 0$ см. ниже; исходной задаче (8), (9) отвечает $v_0 = 0$.

Действию (10) соответствует стандартная квантово-полевая диаграммная теория возмущений с вершинами типа $\phi'(\phi\partial)\phi$ и $\Theta'(\phi\partial)\Theta$. Роль линий в диаграммах играют затравочные пропагаторы $\langle \Phi \Phi \rangle_0$, определенные обычным образом по свободной (квадратичной по полям) части S . В импульсно-частотном $\mathbf{k}, \omega$ -представлении они имеют вид

$$\begin{aligned} \langle \phi \phi' \rangle_0 &= \langle \phi' \phi \rangle_0^* = P^\perp \epsilon_1^{-1} + P^\parallel \epsilon_3 R^{-1}, \\ \langle \phi \phi \rangle_0 &= P^\perp \frac{d^f}{|\epsilon_1|^2} + P^\parallel ad^f \left| \frac{\epsilon_3}{R} \right|^2, \\ \langle \Theta \phi' \rangle_0 &= \langle \phi' \Theta \rangle_0^* = -\frac{ic^2 \mathbf{k}}{R}, \quad \langle \phi \Theta' \rangle_0 = \langle \Theta' \phi \rangle_0^* = -\frac{i\mathbf{k}}{R}, \\ \langle \Theta \Theta' \rangle_0 &= \langle \Theta' \Theta \rangle_0^* = \frac{\epsilon_2}{R}, \quad \langle \Theta \Theta \rangle_0 = \frac{c^4 k^2 ad^f}{|R|^2}, \\ \langle \phi \Theta \rangle_0 &= \langle \Theta \phi \rangle_0^* = \frac{(ic^2 \mathbf{k}) ad^f \epsilon_3}{|R|^2}, \\ \langle \Theta' \Theta' \rangle_0 &= \langle \phi' \phi' \rangle_0 = \langle \Theta' \phi' \rangle_0 = 0, \end{aligned} \quad (11)$$

где введены обозначения: $\epsilon_1 = -i\omega + \nu_0 k^2$, $\epsilon_2 = -i\omega + u_0 \nu_0 k^2$, $\epsilon_3 = -i\omega + v_0 \nu_0 k^2$, $R = \epsilon_2 \epsilon_3 + c^2 k^2$, $d^f = g_0 \nu_0^3 k^{4-d-2\epsilon}$ и опущены индексы полей и проекторов.

3. УФ-РАСХОДИМОСТИ И УФ-РЕНОРМИРОВКА

Исследование УФ-расходимостей квантово-полевых моделей связано с анализом канонических размерностей [18]. В динамических моделях типа (10) есть две независимые канонические масштабные инвариантности, поэтому для каждой величины F (поля или параметра) можно ввести две независимые канонические размерности [3] – импульсную d_F^k и частотную d_F^ω , определив их из естественных условий нормировки $d_{\mathbf{k}}^k = -d_{\mathbf{x}}^k = 1$, $d_{\mathbf{k}}^\omega = d_{\mathbf{x}}^\omega = 0$, $d_\omega^k = d_t^k = 0$, $d_\omega^\omega = -d_t^\omega = 1$ и требования безразмерности (импульсной и частотной отдельно) всех слагаемых действия (10). По этим размерностям затем вводится суммарная каноническая размерность $d_F = d_F^k + 2d_F^\omega$ (в свободной теории $\partial_t \sim \partial^2$). Полученные таким образом канонические размерности полей приведены в таблице, в нее включены и параметры ренормированной теории, которые появятся впоследствии.

	φ	φ'	θ	θ'	ν, ν_0	c, c_0	g_0	g, u_0, u, v_0, v	μ, m
d_F^k	-1	$d+1$	-2	$d+2$	-2	-1	2ϵ	0	1
d_F^ω	1	-1	2	-2	1	1	0	0	0
d_F	1	$d-1$	2	$d-2$	0	1	2ϵ	0	1

Из таблицы видно, что модель становится логарифмической ($d_{g_0} = 0$) при $\epsilon = 0$. УФ-расходимости имеют вид полюсов по ϵ в корреляционных функциях (функциях Грина). Суммарная каноническая размерность произвольной 1-неприводимой функции Грина (“формальный индекс расходимости”) есть

$$\delta = d + 2 - \sum_{\Phi} d_{\Phi} n_{\Phi}, \quad (12)$$

где n_{Φ} – числа внешних линий полей Φ в функции Грина с суммированием по всем типам полей Φ , d_{Φ} – их суммарные канонические размерности. Контрчлены порождаются только “поверхностно-расходящимися” 1-неприводимыми диаграммами; диаграмма поверхностно расходится, если ее реальный индекс расходимости (см. ниже) в логарифмической теории (т.е. при $\epsilon = 0$) есть целое неотрицательное число. При этом величина $\delta(\epsilon = 0)$ определяет степень однородности контрчлена по импульсам, частотам и “массе” c_0 (термин “масса” возник здесь лишь по аналогии с УФ-ренормировкой моделей квантовой теории поля и не несет непосредственного физического смысла). При анализе расходимостей в модели (10) необходимо также учитывать следующие дополнительные соображения:

1. Все 1-неприводимые функции Грина с $n_{\phi'} = n_{\theta'} = 0$ равны нулю [3].
2. В вершину $\Theta'(\phi\partial)\Theta$ поле Θ входит под знаком производной, поэтому в любой 1-неприводимой функции Грина на каждое поле Θ выделяется один внешний импульс.

Это уменьшает реальный индекс расходимости δ' [3] на соответствующее число единиц: $\delta' = \delta - n_\Theta$, и запрещает некоторые типы расходимостей. Так, для 1-неприводимой функции $\langle \Theta' \Theta \rangle$ имеем $\delta = 2$, $\delta' = 1$, что запрещает контрчлен $\Theta' \partial_t \Theta$ и оставляет возможным лишь $\Theta' \Delta \Theta$.

3. Галилеева инвариантность модели (10) требует, чтобы вклад контрчленов также был галилеево-инвариантным [1, 3, 5]. В частности, ковариантная производная $\nabla_t = \partial_t + (\phi \partial)$ должна входить в контрчлены как одно целое. Отсюда, например, вытекает, что контрчлен, требующийся для устранения расходимостей в функции $\langle \Theta' \phi \Theta \rangle$ с $\delta = 1$, $\delta' = 0$ должен обязательно иметь вид $\Theta'(\phi \partial) \Theta$ и входить в комбинации $\Theta' \nabla_t \Theta$, а следовательно, он запрещен (см. выше). Аналогичным образом расходимость в $\langle \phi' \phi \rangle$ с $\delta = 2$ и $\langle \phi' \phi \phi \rangle$ с $\delta = 1$ должна устраняться двумя контрчленами $\phi' \Delta \phi$ и $\phi' \nabla_t \phi$. В действительности вторая структура тоже запрещена обобщенной галилеевой инвариантностью с параметром преобразования $v(t)$, зависящим от времени [1, 5, 8]:

$$\begin{aligned} \phi_v(x) &= \phi(x_v) - \mathbf{v}(t), & \Phi_v(x) &= \Phi(x_v), \\ x &\equiv (t, \mathbf{x}), & x_v &\equiv (t, \mathbf{x} + \mathbf{u}(t)), & \mathbf{u}(t) &= \int_{-\infty}^t \mathbf{v}(t') dt', \end{aligned} \quad (13)$$

в данном случае Φ обозначает поля ϕ , Θ , Θ' . Хотя действие (10) не полностью инвариантно относительно преобразований (13), т.к. $S(\Phi_v) = S(\Phi) + \phi' \partial_t v$, вклад контрчленов должен быть обязательно инвариантным (см. [8]). Это и запрещает контрчлен типа $\phi' \nabla_t \phi$, инвариантный относительно обычных галилеевых преобразований с $v = \text{const}$, $u = vt$, но неинвариантный относительно обобщенных преобразований (13).

4. Как видно из (11), на каждую линию $\langle \Theta \phi' \rangle_0$, $\langle \Theta \phi \rangle_0$ в диаграммах теории возмущений выделяется наружу один множитель c^2 , а на каждую линию $\langle \Theta \Theta \rangle_0$ — множитель c^4 . При этом реальный индекс расходимости диаграммы уменьшается на соответствующее число единиц. В частности, из каждой диаграммы любой 1-неприводимой функции с $n_{\Theta'} > n_\Theta$ выделяется множитель $c^{2(n_{\Theta'} - n_\Theta)}$. Отсюда, например, вытекает, что контрчлен к 1-неприводимой функции $\langle \Theta' \phi \rangle$ с $\delta = 3$ обязательно сводится к $c^2 \Theta'(\partial \phi)$, тогда как структуры $\Theta' \Delta(\partial \phi)$ и т.п. запрещены. Другой пример — функция $\langle \Theta' \phi \phi \rangle$ с $\delta = 2$. В каждой ее диаграмме выделяется множитель c^2 , что запрещает контрчлены типа $\Theta'(\partial_i \phi_k)(\partial_k \phi_i)$ и т.п., тогда как остающаяся структура $c^2 \Theta' \phi^2$ запрещена галилеевой инвариантностью.

С учетом этих соображений можно убедиться, что все УФ-расходимости в модели (10) устраняются с помощью контрчленов вида

$$\phi'_i \Delta \phi_i, \quad \phi'_i \partial_i \partial_k \phi_k, \quad \phi'_i \partial_i \Theta, \quad c^2 \Theta' \partial_i \phi_i, \quad \Theta' \Delta \Theta.$$

Все такие члены, кроме последнего, присутствуют в неренормированном действии с $v_0 = 0$. Для обеспечения мультипликативной ренормируемости мы и ввели в (10) дополнительное слагаемое $v_0 \nu_0 \Theta' \Delta \Theta$. Это отвечает добавке типа $\Delta \Theta'$ в уравнение неразрывности (9), которая является физически допустимой и приводит лишь к переопределению поля скорости [10]. При желании можно исследовать и исходную теорию без такой добавки, если решать уравнения РГ, полученные в расширенной модели (10), с начальным

условием $v_0 = 0$. Однако в силу единственности неподвижной точки РГ в физической области значений параметров (см. ниже) в этом нет необходимости.

Как и в случае несжимаемой жидкости [1], при $d = 2$ возникает дополнительная УФ-расходимость в функции $\langle \phi' \phi' \rangle$, требующая введения контрчлена $\phi' \Delta \phi'$. В случае несжимаемой жидкости это не влияет существенно на результаты РГ-анализа [19]. В дальнейшем мы будем всегда считать $d > 2$. Тем самым ренормированное действие имеет вид

$$S_R(\Phi) = \frac{1}{2} \phi'_i D_{Fij} \phi'_j + \phi'_i [-\nabla_t \phi_i + Z_1 \nu (\delta_{ik} \Delta - \partial_i \partial_k) \phi_k + Z_2 u \nu \partial_i \partial_k \phi_k - Z_4 \partial_i \Theta] + \\ + \Theta' [-\nabla_t \Theta + Z_3 v \nu \Delta \Theta - Z_5 c^2 \partial_i \phi_i]. \quad (14)$$

Здесь g, ν, u, v, c – ренормированные аналоги параметров $g_0, \nu_0, u_0, v_0, c_0$; коррелятор случайной силы D_F выражен через ренормированные параметры с помощью соотношения $g_0 \nu_0^3 = g \nu^3 \mu^2 \epsilon$; ренормировочная масса μ – дополнительный произвольный параметр ренормированной теории; константы ренормировки Z_i зависят от полностью безразмерных параметров g, u, v, a (зависимость от d и ϵ предполагается). Ренормированное действие (14) получается из (10) ренормировкой полей $\Theta \rightarrow Z_\Theta \Theta$, $\Theta' \rightarrow Z_{\Theta'} \Theta'$ и параметров

$$g_0 = g \mu^{2\epsilon} Z_g, \quad \nu_0 = \nu Z_\nu, \quad u_0 = u Z_u, \quad v_0 = v Z_v, \quad c_0 = c Z_c. \quad (15)$$

Константы ренормировки в (14) и (15) связаны соотношениями

$$Z_\nu = Z_1, \quad Z_u = Z_2 Z_1^{-1}, \quad Z_v = Z_3 Z_1^{-1}, \\ Z_\Theta = Z_{\Theta'}^{-1} = Z_4, \quad Z_c = (Z_4 Z_5)^{1/2}, \quad Z_g = Z_\nu^{-3}. \quad (16)$$

Последнее равенство в (16) – следствие отсутствия ренормировки нелокального вклада случайной силы в (14). Ренормировки полей ϕ, ϕ' не требуется: $Z_\phi = Z_{\phi'} = 1$.

Явный вид констант ренормировки зависит от выбора схемы вычитаний. Всюду далее используется наиболее удобная практически схема минимальных вычитаний (MS), в которой константы Z_i не зависят от “массовых параметров” типа c, μ и имеют вид “единица плюс полюсные по ϵ члены” [18]. Расчет в первом порядке по g (однопетлевое приближение) дает

$$Z_1 = 1 + \frac{h}{\epsilon} A, \quad Z_2 = 1 + \frac{h}{u\epsilon} B, \\ Z_3 = 1 - \frac{h}{\epsilon} \frac{(d-1)}{2d} \frac{1}{v(v+1)} - \frac{ah}{\epsilon} \frac{u-v}{2duv(u+v)^2}, \\ Z_4 = 1 + \frac{h}{\epsilon} \frac{(d-1)}{2d} \frac{1}{(1+u)(1+v)}, \quad Z_5 = 1. \quad (17)$$

В (17) мы перешли от g к новому заряду $h \equiv g S_d / 2(2\pi)^d$, где $S_d = 2\pi^{d/2} / \Gamma(d/2)$ – площадь поверхности единичной сферы в d -мерном пространстве, и использовали обозначения

$$A = \frac{u^2 d(1-d) - 2u(d^2 + d - 4) - d(d+3)}{4d(d+2)(1+u)^2} + \frac{a(1-u)}{2du(1+u)^2}, \\ B = (1-d) \frac{(d-1)u^2 + (d+4)u + 1}{2d(d+2)(1+u)^2}. \quad (18)$$

Поясним кратко технику расчета констант (17), (18). Они вычисляются по диаграммам “базовой” модели (см., например, [18]), которая получается из (14) заменой всех констант ренормировки единицей. Соответствующие затравочные пропагаторы $\langle \Phi \Phi \rangle_0$ находятся из (11) заменой всех параметров их ренормированными аналогами: $g_0 \rightarrow g\mu^{2\epsilon}$, $\nu_0 \rightarrow \nu$ и т.д. В схеме MS контрчлены полиномиальны по “массе” c , а константы Z_i от нее не зависят. Поэтому константы $Z_1, \dots, Z_4$ можно вычислить в упрощенной “безмассовой” модели с $c_0 = c = 0$. При этом пропагаторы $\langle \Theta \phi' \rangle_0$, $\langle \phi \Theta \rangle_0$, $\langle \Theta \Theta \rangle_0$ исчезают, а вид остальных пропагаторов значительно упрощается. При расчете константы Z_5 в контрчлене типа $c^2 \Theta'(\partial \phi)$ достаточно учитывать диаграммы с участием ровно одной линии $\langle \Theta \phi' \rangle_0$ или $\langle \phi \Theta \rangle_0$. При этом нужный множитель c^2 сразу выделяется наружу из-под знака интеграла, а в остающемся выражении снова можно положить $c = 0$. Наконец, любая диаграмма с участием более чем одной линии $\langle \Theta \phi' \rangle_0$, $\langle \phi \Theta \rangle_0$ или хотя бы одной линии $\langle \Theta \Theta \rangle_0$ УФ-конечна и не дает вклада в константы ренормировки.

Равенство $Z_5 = 1$ получено прямым расчетом и возникает из-за сокращения нетривиальных вкладов трех диаграмм. Неясно, является ли этот результат точным или он нарушится в следующих порядках теории возмущений по $g \sim h$.

4. РГ-ФУНКЦИИ, НЕПОДВИЖНАЯ ТОЧКА И КРИТИЧЕСКИЕ РАЗМЕРНОСТИ

Для каждой константы ренормировки соответствующая аномальная размерность γ_i определяется соотношением

$$\gamma_i \equiv \tilde{\mathcal{D}}_\mu \ln Z_i = -2\mathcal{D}_h a_i. \quad (19)$$

Здесь $\mathcal{D}_x \equiv x\partial/\partial x$ для любой переменной x ; $\tilde{\mathcal{D}}_\mu$ обозначает операцию $\mathcal{D}_\mu$ при фиксированных значениях затравочных параметров; a_i – вычет в полюсе первого порядка по ϵ для константы Z_i , т.е. $Z_i = 1 + a_i/\epsilon + O(1/\epsilon^2)$; второе равенство (19) справедливо только для схемы MS и вытекает из УФ-конечности функции γ_i . Для каждого заряда $g = \{g_1 \equiv h, g_2 \equiv u, g_3 \equiv v\}$ соответствующая β -функция определяется равенством $\beta_{g_i} \equiv \tilde{\mathcal{D}}_\mu g_i$. Из определений и связей (16) между константами ренормировки для β -функций находим

$$\begin{aligned} \beta_h &= h[-2\epsilon - \gamma_h] = h[-2\epsilon + 3\gamma_1], \\ \beta_u &= -u\gamma_u = u[\gamma_1 - \gamma_2], \\ \beta_v &= -v\gamma_v = v[\gamma_1 - \gamma_3], \end{aligned} \quad (20)$$

а для аномальных размерностей имеем

$$\gamma_\Theta = -\gamma_{\Theta'} = \gamma_4, \quad \gamma_c = (\gamma_4 + \gamma_5)/2, \quad \gamma_\nu = \gamma_1. \quad (21)$$

Из-за отсутствия ренормировки полей ϕ, ϕ' для них $\gamma_\phi = \gamma_{\phi'} = 0$. Как и в случае несжимаемой жидкости, включение в коррелятор случайной силы (7) внешнего масштаба L не изменяет результатов РГ-анализа (контрчлены и РГ-функции от L не зависят), сама величина L не ренормируется, т.е. $L_0 = L$, $Z_L = 1$ и $\gamma_L = 0$.

В однопетлевом приближении из (17), (18) находим

$$\begin{aligned}\gamma_1 &= -2Ah, & \gamma_2 &= -2Bh/u, \\ \gamma_3 &= h \frac{(d-1)}{d} \frac{1}{v(v+1)} + ah \frac{(u-v)}{d u v (u+v)^2}, \\ \gamma_4 &= h \frac{(1-d)}{d(1+u)(1+v)}, & \gamma_5 &= 0\end{aligned}\quad (22)$$

с A и B из (18).

Неподвижная точка $g_* = \{g_{i*}\}$ находится из условий $\beta_{g_i}(g_*) = 0$ для всех $g_i = \{h, u, v\}$; она является ИК-устойчивой, если вещественные части всех собственных чисел матрицы $\omega_{ik} = \partial \beta_{g_i} / \partial g_k|_{g=g_*}$ неотрицательны.

Поясним, что мы не включаем входящий в коррелятор (7) параметр $a > 0$ в число зарядов, поскольку для него $a_0 = a$, $Z_a = 1$ и β -функция, формально определенная равенством $\beta_a \equiv \bar{D}_\mu a$, исчезает тождественно. Поэтому условие $\beta_a = 0$ не накладывает ограничение на величину a , она остается произвольным параметром, от которого (вместе с d) могут зависеть координаты неподвижной точки g_* .

Из соотношений (20), (22), (18) находим, что в физической области значений параметров ($h, u, v, a > 0$) существует единственная ИК-устойчивая точка РГ; в однопетлевом приближении ее координаты таковы:

$$h_* = \frac{4\epsilon}{3} \frac{d}{(d-1)}, \quad u_* = v_* = 1. \quad (23)$$

Заметим, что в однопетлевом приближении все они не зависят от a , а u_* и v_* — также и от d .

Поясним вывод (23). Неподвижная точка с $h_* = 0$ заведомо не может быть ИК-устойчивой, т.к. для нее одно из собственных чисел матрицы ω_{ik} совпадает с диагональным элементом $\partial_h \beta_h = -2\epsilon < 0$. При $h_* \neq 0$ из условия $\beta_h = 0$ сразу находим $\gamma_1^* = \gamma_\nu^* = 2\epsilon/3$ (здесь и далее $\gamma_i^* \equiv \gamma_i(g_*)$). Подстановка этого равенства в условие $\beta_u = 0$ приводит к уравнению только на u_* (при условии $h_* \neq 0$), единственное положительное решение которого есть $u_* = 1$. Подставляя его в условие $\beta_h = 0$, находим h_* . Наконец, подстановка известных значений для u_* , h_* в условие $\beta_v = 0$ дает уравнение на v_* с решением $v_* = 1$. Теперь нетрудно видеть, что в неподвижной точке (23) матрица ω_{ik} треугольна, поэтому ее собственные числа совпадают с диагональными элементами $\partial_{g_i} \beta_{g_i}$ и легко вычисляются по известным β -функциям. В точке (23) все они положительны для любых $d > 2$, $a > 0$.

В нефизической области значений параметров могут в принципе находиться другие ИК-устойчивые неподвижные точки, но исследовать их нет смысла, т.к. решения уравнений РГ с физическими начальными данными не могут попадать в эти точки (подробнее см. ниже).

Для аномальных размерностей (21) в неподвижной точке (23) из (22) находим

$$\gamma_\nu^* = 2\epsilon/3, \quad \gamma_\Theta^* = -\gamma_{\Theta'}^* = -\epsilon/3 + O(\epsilon^2), \quad \gamma_c^* = -\epsilon/6 + O(\epsilon^2). \quad (24)$$

В однопетлевом приближении они не зависят от a, d ; выражение для γ_ν^* точное.

Критическая размерность Δ_F величины F в динамической модели типа (10) в области $\epsilon \leq 2$ определяется соотношением [3]

$$\Delta_F = d_F^k + \Delta_\omega d_F^\omega + \gamma_F^\omega, \quad \Delta_\omega = -2 + \gamma_\nu^*. \quad (25)$$

Из (24), (25) и данных таблицы находим, что

$$\Delta_\phi = 1 + 2\epsilon/3, \quad \Delta_{\phi'} = d - \Delta_\phi, \quad \Delta_\omega = -2 + 2\epsilon/3, \quad \Delta_L = -1 \quad (26)$$

(поскольку $\gamma_\nu^* = 2\epsilon/3$, $\gamma_\phi = \gamma_{\phi'} = \gamma_L = 0$, то эти результаты являются точными),

$$\Delta_\Theta = d - \Delta_{\Theta'} = 2 - 5\epsilon/3 + O(\epsilon^2), \quad \Delta_c = 1 - 5\epsilon/3 + O(\epsilon^2). \quad (27)$$

Размерности (26) не отличаются от полученных для несжимаемой жидкости [1, 3] и при реальном $\epsilon = 2$ также принимают “колмогоровские” значения $\Delta_\phi = -1/3$, $\Delta_\omega = 2/3$ и т. д. Для размерностей Θ, c из (27) при $\epsilon = 2$ находим $\Delta_\Theta = 2\Delta_c = -4/3$, что отличается от “колмогоровских” значений $\Delta_p = 2\Delta_c = -2/3$ (мы привели здесь “колмогоровскую” размерность давления p , которое совпадает с полем Θ в первом порядке разложения по $\delta\rho/\rho_0$).

Полученные результаты (23)–(27) справедливы для любого конечного $a \geq 0$. Отдельного рассмотрения требует случай чисто продольного коррелятора случайной силы, которому формально отвечает предел $a \rightarrow \infty$ в (7). Для этого необходимо перейти в РГ-функциях к новым переменным $h' = ha$, $b = 1/a$ и затем положить $b = 0$ при конечном h' . Таким образом из (20), (22) находим

$$\beta_{h'} = -2\epsilon h', \quad \beta_u = h' \frac{(u-1)}{2du(1+u)^2}, \quad \beta_v = h' \frac{(v-u)}{du(u+v)^2}. \quad (28)$$

Система β -функций (28) не имеет ИК-устойчивой неподвижной точки, т.к. из $\beta_{h'} = 0$ обязательно следует $h' = 0$, а такая точка не может быть ИК-устойчивой, поскольку $\partial_{h'}\beta_{h'} = -2\epsilon < 0$ (см. выше). Нужная неподвижная точка с $h'_* \sim \epsilon^{1/2}$ может появиться при учете двухпетлевого вклада порядка $(h')^3$ в $\beta_{h'}$; при этом результаты (26) сохраняются, тогда как результаты (27) могут измениться.

5. РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ РГ ДЛЯ ПАРНОГО КОРРЕЛЯТОРА СКОРОСТИ. ЭФФЕКТИВНАЯ СКОРОСТЬ ЗВУКА И ЧИСЛО МАХА

Обсудим кратко решение уравнений РГ в модели (10) на примере одновременного парного коррелятора скорости

$$D_{ij}(\mathbf{k}) \equiv \langle \phi_i(\mathbf{k}) \phi_j(-\mathbf{k}) \rangle = P_{ij}^\perp(\mathbf{k}) D^\perp(k) + P_{ij}^\parallel(\mathbf{k}) D^\parallel(k). \quad (29)$$

Из соображений размерности (см. таблицу) в ренормированных переменных имеем

$$D^{\perp, \parallel} = k^{2-d} \nu^2 R^{\perp, \parallel}(s, h, u, v, \tau), \quad (30)$$

где $R^{\perp,||}$ – функции полностью безразмерных переменных, включая $s \equiv k/\mu$, $\tau \equiv \nu k/c$. Функции (30) удовлетворяют уравнению РГ, вытекающему из связи неренормированного (10) и ренормированного (14) функционалов действия (подробнее см., например, [6]):

$$\left\{ \mathcal{D}_\mu + \sum_{g_i} \beta_{g_i} \partial_{g_i} - \gamma_\nu \mathcal{D}_\nu - \gamma_c \mathcal{D}_c \right\} D^{\perp,||} = 0. \quad (31)$$

Отсюда для них вытекает следующее РГ-представление:

$$D^{\perp,||} = k^{2-d} \bar{\nu}^2 R^{\perp,||}(1, \bar{h}, \bar{u}, \bar{v}, \bar{\tau}), \quad (32)$$

с теми же, что и в (30), функциями $R^{\perp,||}$. Инвариантные переменные $\bar{e}$ в (32) суть первые интегралы уравнения (31), нормированные на e при $s = 1$. Инвариантные заряды $\bar{g}_i$ удовлетворяют уравнениям

$$\mathcal{D}_s \bar{g}_i = \beta_{g_i}(\bar{g}), \quad \bar{g}_i(s = 1) = g_i. \quad (33)$$

Нетрудно видеть, что для положительных начальных данных g_i все инвариантные заряды $\bar{g}_i$ остаются положительными при $s \leq 1$. Это вытекает из уравнений (33), исчезновения всех β -функций (20) при $h = 0$ и того факта, что функции β_u и β_v строго отрицательны при $u = 0$ и $v = 0$, соответственно:

$$\beta_u|_{u=0} = -h \frac{(d-1)}{d(d+2)}, \quad \beta_v|_{v=0} = -\frac{h(d-1)}{d} - \frac{2h}{du^2}.$$

Отсюда следует, что в ИК-асимптотике $s \rightarrow 0$ инвариантные заряды $\bar{g}_i$ могут стремиться лишь к единственной положительной неподвижной точке (23), $\bar{g}_i \rightarrow g_{i*}$. При этом инвариантные переменные $\bar{\nu}, \bar{c}, \bar{\tau} = \bar{c}/k\bar{\nu}$ сохраняют нетривиальную зависимость от k . Можно показать, что асимптотические выражения $\bar{\nu}_*, \bar{c}_*$ для $\bar{\nu}, \bar{c}$ при $k \rightarrow 0$ имеют вид

$$\begin{aligned} \bar{\nu}_*(k) &= \nu_0 g_0^{1/3} k^{-2\epsilon/3} \cong \nu_0 (k_d/k)^{2\epsilon/3}, \\ \bar{c}_*(k) &= c_0 g_0^{*\gamma_c/2\epsilon} k^{-\gamma_c^*} \cong c_0 (k_d/k)^{\gamma_c^*}, \end{aligned} \quad (34)$$

где опущены безразмерные константы порядка единицы и использовано соотношение $g_0 \sim k_d^{2\epsilon}$ [6]. Инвариантную переменную $\bar{\nu}(k)$ отождествляют обычно с эффективной “вихревой вязкостью” [2, 4, 7], аналогично $\bar{c}(k)$ можно считать эффективной скоростью звука.

Из (34) находим

$$\tau_*(k) \equiv \frac{\bar{\nu}_*(k)k}{\bar{c}_*(k)} \cong \text{Ma Re}^{-1/4} (k/k_d)^{\Delta_c}, \quad (35)$$

где использованы известные соотношения $\text{Re} \sim (k/\chi)^{4/3}$, $v_{rms} \sim (W/\chi)^{1/3}$, $k_d \sim W^{1/4} \nu_0^{-1/4}$, связывающие число Рейнольдса и среднюю скорость диссипации с турбулентными масштабами χ, k_d ; $\text{Ma} \equiv v_{rms}/c_0$, Δ_c определено в (25).

Совокупность выражений (32), (34), (35) и координат неподвижной точки (23) описывает поведение коррелятора (29) в ИК-области $k/k_d \rightarrow 0$. Вычисляя функции

$R^{\perp,||}$ в (30) в виде ряда ренормированной теории возмущений по $g \sim h$ и подставляя $h \rightarrow h_* \sim \epsilon$, приходим к ϵ -разложению скейлинговых функций $R^{\perp,||}(\tau) \equiv R^{\perp,||}(1, h_*, u_*, v_*, \tau)$.

В первом порядке по g ренормированный коррелятор $\langle \phi \phi \rangle$ в $\mathbf{k}, \omega$ -представлении совпадает с затравочным пропагатором $\langle \phi \phi \rangle_0$ в (11) с заменой в нем $g_0 \rightarrow g\mu^{2\epsilon}$ и т.д.; одновременный коррелятор получается интегрированием по ω . Отсюда находим $R^{\perp}(\tau) = g_*/2$, $R^{\parallel}(\tau) = (ag_*/2)(1 + \tau)$, где g_* связано с h_* , как g с h . В однопетлевом приближении (27) при реальном $\epsilon = 2$ это дает

$$\begin{aligned} D^{\perp} &= \text{const } W^{2/3} k^{-d-2/3}, \\ R^{\parallel}/R^{\perp} &= a \left[1 + \text{const } \text{Ma Re}^{1/4} (kL)^{-2/3} \right]. \end{aligned} \quad (36)$$

Аргумент скейлинговой функции (36) отличен от “колмогоровского” в (1); при изменении k в инерционном интервале $\chi \leq k \leq k_d$ он изменяется в широких пределах: $\text{Ma Re}^{-1/4} \leq \bar{\tau} \leq \text{Ma Re}^{1/4}$. Поэтому функция $D^{\parallel}$ нетривиально зависит от k в инерционном интервале, изменяясь от $D^{\parallel} \sim D^{\perp} \sim k^{-d-2/3}$ при малых k до $D^{\parallel} \sim k^{-d-4/3}$ при больших; лишь первая асимптотика (при $d = 3$) отвечает “закону 11/3” Колмогорова.

На возможность существования в инерционном интервале двух областей с различным степенным поведением указывалось в работе [15] для случая звуковой турбулентности, хотя показатели степеней там были другими. Необходимо, однако, иметь в виду, что наше рассмотрение не включает собственно звуковую турбулентность из-за присутствия поперечных компонент скорости и случайной силы в (3). Подчеркнем также, что представление (36) получено в первом порядке по ϵ для размерностей и скейлинговых функций. Учет вкладов ϵ^2 и старших в точных формулах (32), (34) может изменить этот результат.

Обсудим теперь кратко “эффективное число Маха” $\text{Ma}_*(\chi)$, определив его равенством $\text{Ma}_*(\chi) \equiv v_{rms}/\bar{c}_*(\chi)$. Из (34) имеем $\bar{c}_*(\chi) \sim c_0(k_d/\chi)^{\gamma_c^*} \sim c_0 \text{Re}^{3\gamma_c^*/4}$, что вместе с $v_{rms} \sim (W/\chi^{1/3}) \sim \nu_0 \chi \text{Re}$ дает $\text{Ma}_*(\chi) \sim \text{Ma}(k_d/\chi)^{-\gamma_c^*} \sim \text{Ma Re}^{-3\gamma_c^*/4}$. Учитывая, что $\gamma_c^* = -1/3$ (см. (24)), окончательно находим $\text{Ma}_*(\chi) \sim \text{Ma Re}^{1/4} \sim \text{Ma}(k_d/\chi)^{1/3}$. При стандартных предположениях ($\text{Ma} \leq 1$, $\text{Re} \gg 1$) эффективное число Маха велико и растет при $L \rightarrow \infty$.

Заметим, что обычная для несжимаемой жидкости оценка $v_{rms} \sim \nu_0 \chi \text{Re}$, использованная выше, может быть оправдана в рамках самой модели (10) прямым вычислением критической размерности $\Delta[\phi^2]$ составного оператора $\phi^2(x)$, входящего в определение $v_{rms} \equiv \langle \phi^2(x) \rangle^{1/2}$. В общем случае критическая размерность составного оператора не является простой суммой размерностей входящих в него полей и производных (например, в модели $\lambda \Phi^4$ критического поведения размерности полей Φ , Φ^2 , Φ^4 определяют совершенно независимые критические индексы η, ν, ω). Однако в данном случае оказывается, что $\Delta[\phi^2] = 2\Delta[\phi] = 2(1 - 2\epsilon/3)$ благодаря УФ-конечности оператора $\phi^2(x)$ в ренормированной теории. Это есть следствие галилеевой инвариантности задачи (см. аналогичное доказательство для несжимаемой жидкости [5]) и отсутствия допустимой по формальному индексу примеси поля $\Theta(x)$ к $\phi^2(x)$ (по реальному индексу δ' она запрещена, см. раздел 3). Поэтому величина v_{rms} удовлетворяет аналогичному (31) однородному уравнению РГ, откуда из соответствующего РГ-представления в ИК-области для нее находим $v_{rms} \sim m\bar{\nu}(m) \sim m\nu_0 \text{Re}$, что и требовалось.

Развитая турбулентность при немалых числах Маха рассматривалась ранее методом РГ в работе [16] (для частного случая $a = 1$ в корреляторе случайной силы (7)), но наши результаты существенно отличаются от полученных в [16]. Так, согласно [16] в ИК-асимптотике справедливы соотношения (приводим их в наших обозначениях)

$$u_* = 1.5; \quad D^{\parallel}/D^{\perp} \sim \text{const}, \quad \bar{c}_*(\chi) \sim \chi^{-1/3}, \quad \text{Ma}_*(\chi) \sim \text{const}. \quad (37)$$

По этому поводу необходимо сказать следующее. Метод РГ использовался в [16] в одном из вариантов рекурсионных соотношений Вильсона; результаты этого подхода (при его корректном применении) должны совпадать с результатами стандартной квантово-полевой техники РГ. Однако авторы [16] не обратили внимание на отсутствие мультипликативной ренормируемости рассматриваемой ими модели (фактически вопросы ренормируемости в [16] вообще не обсуждались) и, как следствие, на невозможность применения непосредственно к ней аппарата РГ. Плотность ρ , входящая в знаменатель правой части уравнения Навье–Стокса (3), разлагалась в работе [16] в ряд в окрестности среднего значения ρ_0 по $\delta\rho/\rho_0 = (\rho - \rho_0)/\rho_0$ с удержанием лишь вкладов порядка $(\delta\rho/\rho_0)^2$ включительно. Однако процедура ренормировки получаемой при этом модели с необходимостью порождает и все остальные вклады с любыми степенями канонически-безразмерной величины $\delta\rho/\rho_0$, поэтому ограничиваться любым конечным порядком разложения здесь невозможно [13]. Кроме того, в [16] не вводилось необходимое для мультипликативной ренормируемости слагаемое типа $\Delta\Theta$ в уравнение неразрывности. Наконец, при нахождении нетривиального (“неколмогоровского”) критического режима авторы [16] выполняли подстановку $\epsilon = 2$ прямо в РГ-функциях, тогда как в последовательном РГ-подходе сначала вычисляют координаты неподвижных точек и критические индексы в форме ϵ -разложений и лишь затем экстраполируют полученные результаты к реальному значению $\epsilon \sim 1$. Все сказанное позволяет заключить, что результаты [16] нельзя признать достоверными.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 96-02-17-033) и КЦФЕ Госкомвуза (грант № 95-0-5.1-30).

Н. В. Антонов получал финансовую поддержку Ассоциации INTAS в рамках исследовательской программы Международного центра фундаментальной физики в Москве (грант INTAS № 93-2492), а также поддержку Правительства Санкт-Петербурга.

Список литературы

- [1] *C. De Dominicis, P. C. Martin.* Phys. Rev. A. 1979. V. 19. P. 419.
- [2] *J.-D. Fournier, U. Frish.* Phys. Rev. A. 1983. V. 28. P. 1000.
- [3] *Л. Ц. Аджемян, А. Н. Васильев, Ю. М. Письмак.* ТМФ. 1983. Т. 57. С. 268.
- [4] *V. Yakhot, S. A. Orszag.* Phys. Rev. Lett. 1986. V. 57. P. 1722; J. Sci. Comput. 1986. V. 1. P. 3.
- [5] *Л. Ц. Аджемян, А. Н. Васильев, М. Гнатич.* ТМФ. 1988. Т. 74. С. 180.
- [6] *Л. Ц. Аджемян, Н. В. Антонов, А. Н. Васильев.* ЖЭТФ. 1989. Т. 95. С. 1272.
- [7] *V. Yakhot, L. M. Smith.* J. Sci. Comput. 1992. V. 7. P. 35; *L. M. Smith, W. C. Reynolds.* Phys. Fluids. 1992. V. A4. № 2. P. 364.
- [8] *Л. Ц. Аджемян, Н. В. Антонов, Т. Л. Ким.* ТМФ. 1994. Т. 100. С. 382.
- [9] *А. С. Монин, А. М. Яглом.* Статистическая гидромеханика. Ч. 2. М.: Наука, 1967.
- [10] *Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц.* Гидродинамика. М.: Наука, 1986.

- [11] *В. С. Львов, А. В. Михайлов.* Препринт № 54. Новосибирск: ИАиЭ, 1977.
- [12] *Л. Ц. Аджемян, М. Ю. Налимов, М. М. Степанова.* ТМФ. 1995. Т. 104. С. 260.
- [13] *Д. Ю. Волченков, М. Ю. Налимов.* ТМФ. 1996. Т. 106. С. 375.
- [14] *Б. Б. Кадомцев, В. И. Петвиашвили.* ДАН СССР. 1973. Т. 208. С. 794.
- [15] *К. А. Наугольный, С. А. Рыбак.* ЖЭТФ. 1975. Т. 68. С. 78.
- [16] *I. Staroselsky, V. Yakhot, S. Kida, S. A. Orszag.* Phys. Rev. Lett. 1990. V. 65. P. 171.
- [17] *P. C. Martin, E. D. Siggia, H. A. Rose.* Phys. Rev. A. 1973. V. 8. P. 423; *H. K. Janssen.* Z. Phys. 1976. B. 23. S. 377; *R. Baush, H. K. Janssen, H. Wagner.* Z. Phys. 1976. B. 24. S. 113; *C. De Dominicis.* J. Phys. Suppl. C1. 1976. V. 37. P. 247.
- [18] *J. Collins.* Renormalization. Cambridge: Cambridge University Press, 1985.
- [19] *J. Honkonen, M. Yu. Nalimov.* Z. Phys. 1996. B. 99. S. 297.

Поступила в редакцию 8.VIII.1996 г.

N. V. Antonov, M. Yu. Nalimov, A. A. Udalov

RENORMALIZATION GROUP IN THE PROBLEM OF THE FULLY DEVELOPED TURBULENCE OF A COMPRESSIBLE FLUID

A model of the fully developed turbulence of a compressible fluid based on the stochastic Navier-Stokes equation is considered by means of the field theoretic renormalization group. It is proved that the model is multiplicatively renormalizable in terms of the variables "velocity – logarithm of the pressure". The scaling dimensions of the fields and parameters are calculated in the first order of the ϵ -expansion. The dependence of the effective sound velocity and the Mach number on the integral turbulence scale L is studied.