Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. И. Лагно, В. И. Фущич, Редукция самодуальных уравнений Янга–Миллса по подгруппам расширенной группы Пуанкаре, *ТМФ*, 1997, том 110, номер 3, 416–432

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf978>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.174.149.18

26 апреля 2023 г., 12:25:42

В. И. Лагно*, В. И. Фушич*

РЕДУКЦИЯ САМОДУАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ЯНГА–МИЛЛСА ПО ПОДГРУППАМ РАСШИРЕННОЙ ГРУППЫ ПУАНКАРЕ

Для вектор-потенциала поля Янга–Миллса в пространстве Минковского $R(1, 3)$ построены анзацы, инвариантные относительно трехпараметрических подгрупп расширенной группы Пуанкаре $\tilde{P}(1, 3)$. Проведена симметричная редукция самодуальных уравнений Янга–Миллса к системам обыкновенных дифференциальных уравнений.

1. ВВЕДЕНИЕ

Классические $SU(2)$ -инвариантные уравнения Янга–Миллса (УЯМ) составляют систему двенадцати нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных (ДУЧП) второго порядка в пространстве Минковского $R(1, 3)$. С другой стороны, если потенциал поля Янга–Миллса удовлетворяет условиям самодуальности, то он автоматически удовлетворяет УЯМ. Это позволяет строить широкие подклассы решений УЯМ, используя условия самодуальности, которые задают нелинейную систему девяти ДУЧП первого порядка

$$F_{\mu\nu} = \frac{i}{2} \varepsilon_{\mu\nu\gamma\delta} F^{\gamma\delta}, \quad (1)$$

где $F_{\mu\nu} = \partial^\mu \vec{A}_\nu - \partial^\nu \vec{A}_\mu + e \vec{A}_\mu \times \vec{A}_\nu$ – тензор поля Янга–Миллса, $\varepsilon_{\mu\nu\gamma\delta}$ – антисимметричный тензор четвертого порядка, e – калибровочная постоянная связи, $\mu, \nu, \gamma, \delta = \overline{0, 3}$. Уравнения (1) называются самодуальными уравнениями Янга–Миллса (СУЯМ).

Именно исходя из свойства самодуальности были получены в явной форме точные решения УЯМ, которые базировались на анзацах для полей Янга–Миллса, предложенных Ву и Янгом, Розеном, 'т Хоофтом, Корриганом и Феерли, Вилчеком, Виттенем. Следует также отметить и конструкцию Атьи–Дринфельда–Хитчина–Манина, которая использовалась для построения инстантонных решений УЯМ (см. обзоры [1, 2] и цитированную там литературу).

В последние годы наблюдается повышенный интерес к изучению СУЯМ и соответствующих пар Лакса в пространстве Евклида $R(4)$ в связи с возможностью их редукции к классическим интегрируемым уравнениям (Эйлера–Арнольда, Бюргерса, Кадомцева–Петвиашвили, Лиувилля и т.п.). В частности, такая задача рассматривалась в

* Институт математики НАН Украины

работах [3–5], где использовалась редукция по трансляциям. В работе [6] проведена редукция СУЯМ по всем подгруппам группы Евклида $E(4)$, а в работах [7, 8] – редукция СУЯМ и соответствующих пар Лакса в четырехмерном пространстве Минковского с сигнатурой $(+ + - -)$ по некоторым абелевым подгруппам группы Пуанкаре $P(2, 2)$.

В данной работе мы продолжаем исследование проблемы симметричной редукции УЯМ и СУЯМ в пространстве Минковского $R(1, 3)$. Известно [9], что максимальной в смысле Ли группой симметрии УЯМ является группа $C(1, 3) \otimes SU(2)$; инвариантами относительно этой же группы являются и СУЯМ (1). Наличие высокой симметрии дает возможность применять к уравнениям метод симметричной редукции [10, 11] с дальнейшим получением их точных решений. Несколько конформно-инвариантных решений УЯМ получено в работе [12] (см. также [13]). Систематическое изучение конформно-инвариантной редукции УЯМ и СУЯМ было начато в работах [14, 15], где была проведена редукция УЯМ и СУЯМ (1) по трехпараметрическим подгруппам группы Пуанкаре $P(1, 3)$ к системам обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) и построены новые решения УЯМ. Унифицированная форма $P(1, 3)$ -инвариантных анзацев позволила в работе [16] осуществить прямую редукцию УЯМ к системам ОДУ и получить условно-инвариантные решения УЯМ. Здесь мы рассматриваем симметричную редукцию СУЯМ (1) к системам ОДУ, которая соответствует трехпараметрическим подгруппам расширенной группы Пуанкаре $\tilde{P}(1, 3)$.

Структура работы следующая. Во втором разделе работы мы рассматриваем общую процедуру построения линейных анзацев. Третий раздел посвящен получению унифицированной формы $\tilde{P}(1, 3)$ -инвариантных анзацев и редукции СУЯМ (1) к системам ОДУ. В последнем разделе мы рассматриваем некоторые из редуцированных систем и получаем точные действительные решения СУЯМ (1).

2. ЛИНЕЙНАЯ ФОРМА $\tilde{P}(1, 3)$ -ИНВАРИАНТНЫХ АНЗАЦЕВ

Как было указано выше, СУЯМ (1) инвариантны относительно конформной группы $C(1, 3)$, которая содержит как подгруппу расширенную группу Пуанкаре $\tilde{P}(1, 3)$ с базисными генераторами вида

$$\begin{aligned} P_\mu &= \partial_\mu, & J_{\mu\nu} &= x^\mu \partial_\nu - x^\nu \partial_\mu + A^{m\mu} \frac{\partial}{\partial A_\nu^m} - A^{m\nu} \frac{\partial}{\partial A_\mu^m}, \\ D &= x_\mu \partial_\mu - A_\mu^m \frac{\partial}{\partial A_\mu^m}, \end{aligned} \quad (2)$$

где $\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x_\mu}$, $\mu, \nu = \overline{0, 3}$, $m = \overline{1, 3}$. Здесь и далее по повторяющимся индексам предусмотрено суммирование (от 0 до 3 по индексам $\mu, \nu, \gamma, \delta, \sigma = \overline{0, 3}$ и от 1 до 3 по индексам $m, n = \overline{1, 3}$). Поднимание и опускание индексов $\mu, \nu, \gamma, \delta, \sigma$ осуществляется с помощью метрического тензора $g_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$.

Пусть $A\tilde{P}(1, 3)$ – расширенная алгебра Пуанкаре, базис которой составляют генераторы (2), а $A\tilde{P}^{(1)}(1, 3)$ – расширенная алгебра Пуанкаре, которая порождается векторными полями

$$P_\mu^{(1)} = \partial_\mu, \quad J_{\mu\nu}^{(1)} = x^\mu \partial_\nu - x^\nu \partial_\mu, \quad D = x_\mu \partial_\mu.$$

Согласно классическому подходу Ли [10, 11] симметричная редукция СУЯМ (1) к системам ОДУ соответствует тем подалгебрам L алгебры $\tilde{AP}(1, 3)$, для которых выполняется условие $r = r^{(1)} = 3$, где r – ранг L , а $r^{(1)}$ – ранг проекции L на $\tilde{AP}^{(1)}(1, 3)$. Нетрудно убедиться, что имеет место равенство $\dim L = r = 3$, т.е. для проведения редукции необходимо знать трехмерные подалгебры алгебры $\tilde{AP}(1, 3)$ с указанным выше свойством. Учитывая, что СУЯМ (1) инвариантны относительно конформной группы $C(1, 3)$, мы можем ограничиться трехмерными подалгебрами алгебры $\tilde{AP}(1, 3)$, найденными с точностью до конформной сопряженности. Такие подалгебры алгебры $\tilde{AP}(1, 3)$ известны [17, 18]. Поскольку в работах [14, 15] случай алгебры Пуанкаре $AP(1, 3)$ уже рассмотрен, ограничимся только теми подалгебрами алгебры $\tilde{AP}(1, 3)$, которые $C(1, 3)$ -сопряжены подалгебрам алгебры $AP(1, 3)$. Здесь мы используем результаты и обозначения работы [18], согласно которым трехмерные подалгебры алгебры $\tilde{AP}(1, 3)$, не сопряженные трехмерным подалгебрам алгебры $AP(1, 3)$, с точностью до $C(1, 3)$ -сопряженности исчерпываются алгебрами

$$\begin{aligned}
L_1 &= \langle D, P_0, P_3 \rangle, & L_2 &= \langle J_{12} + \alpha D, P_0, P_3 \rangle, \\
L_3 &= \langle J_{12}, D, P_0 \rangle, & L_4 &= \langle J_{12}, D, P_3 \rangle, \\
L_5 &= \langle J_{03} + \alpha D, P_0, P_3 \rangle, & L_6 &= 2 \langle J_{03} + \alpha D, P_1, P_2 \rangle, \\
L_7 &= \langle J_{03} + \alpha D, M, P_1 \rangle \quad (\alpha \neq 0), & L_8 &= \langle J_{03} + D + 2T, P_1, P_2 \rangle, \\
L_9 &= \langle J_{03} + D + 2T, M, P_1 \rangle, & L_{10} &= \langle J_{03}, D, P_1 \rangle, \\
L_{11} &= \langle J_{03}, D, M \rangle, & L_{12} &= \langle J_{12} + \alpha J_{03} + \beta D, P_0, P_3 \rangle, \\
L_{13} &= \langle J_{12} + \alpha J_{03} + \beta D, P_1, P_2 \rangle, & & (3) \\
L_{14} &= \langle J_{12} + \alpha(J_{03} + D + 2T), P_1, P_2 \rangle, & L_{15} &= \langle J_{12} + \alpha J_{03}, D, M \rangle, \\
L_{16} &= \langle J_{03} + \alpha D, J_{12} + \beta D, M \rangle & (0 \leq |\alpha| \leq 1, \beta \geq 0, |\alpha| + |\beta| \neq 0), \\
L_{17} &= \langle J_{03} + D + 2T, J_{12} + \alpha T, M \rangle \quad (\alpha \geq 0), \\
L_{18} &= \langle J_{03} + D, J_{12} + 2T, M \rangle, & L_{19} &= \langle J_{03}, J_{12}, D \rangle, \\
L_{20} &= \langle G_1, J_{03} + \alpha D, P_2 \rangle \quad (0 < |\alpha| \leq 1), & L_{21} &= \langle J_{03} + D, G_1 + P_2, M \rangle, \\
L_{22} &= \langle J_{03} - D + M, G_1, P_2 \rangle, & L_{23} &= \langle J_{03} + 2D, G_1 + 2T, M \rangle, \\
L_{24} &= \langle J_{03} + 2D, G_1 + 2T, P_2 \rangle.
\end{aligned}$$

Здесь $M = P_0 + P_3$, $G_1 = J_{01} - J_{13}$, $T = \frac{1}{2}(P_0 - P_3)$; где это специально не подчеркивается, $\alpha, \beta > 0$. Далее α и β принимают именно те значения, которые приведены в списке (3).

Отметим, что для всех подалгебр L_j ($j = \overline{1, 24}$) выполняется равенство $r = r^{(1)} = 3$.

Покажем, что здесь, как и в работах [14, 15, 19], без потери общности мы можем представить анзацы для полей $\vec{A}_\mu$ в линейной форме

$$\vec{A}_\mu(x) = \Lambda(x) \vec{B}_\mu(\omega), \quad (4)$$

где $\Lambda(x)$ – известная невырожденная квадратная матрица порядка 12, $\vec{B}_\mu(\omega)$ – новые неизвестные вектор-функции независимой переменной $\omega = \omega(x)$, $x = (x_0, x_1, x_2, x_3) \in R(1, 3)$.

Очевидно, что линейность искомого анзаца требует наличия в алгебре L_j одного инварианта $\omega(x)$, который не зависит от $\vec{A}_\mu$, и двенадцати линейных инвариантов вида

$$f_{\mu 0}^m(x)A_0^m + f_{\mu 1}^m(x)A_1^m + f_{\mu 2}^m(x)A_2^m + f_{\mu 3}^m(x)A_3^m,$$

которые функционально независимы как функции от $A_0^m, A_1^m, A_2^m, A_3^m$. Эти инварианты можно рассматривать как компоненты вектора $F\vec{A}$, где $F = (f_{\mu\nu}^m(x))$, а

$$\vec{A} = \begin{pmatrix} \vec{A}_0 \\ \vec{A}_1 \\ \vec{A}_2 \\ \vec{A}_3 \end{pmatrix}.$$

При этом F – невырожденная матрица в некоторой области из $R(1, 3)$. На основании теоремы об условном существовании инвариантных решений [11] анзац $F\vec{A} = \vec{B}(\omega)$ редуцирует систему (1) к системе ОДУ, которые связывают независимую переменную ω , искомые функции B_μ^m и их производные первого порядка. Положив $\Lambda = F^{-1}(x)$, мы приходим к анзацу (4).

Пусть $L = \langle X_1, X_2, X_3 \rangle$ – одна из подалгебр алгебры $A\tilde{P}(1, 3)$, приведенных в списке (3), где X_k – оператор вида (2), т.е.

$$X_k = \xi_{k\mu}(x)\partial_\mu + \rho_{m\sigma\lambda}(x)A_\lambda^m \frac{\partial}{\partial A_\sigma^m} \quad (k = 1, 2, 3).$$

Функция $f_{\delta\gamma}^n(x)A_\gamma^n$ является инвариантом оператора X_k тогда и только тогда, когда

$$\xi_{k\mu}(x) \frac{\partial f_{\delta\gamma}^n(x)}{\partial x_\mu} A_\gamma^n + \rho_{k\sigma\lambda}(x) A_\lambda^n f_{\delta\sigma}^n(x) = 0$$

или

$$\xi_{k\mu}(x) \frac{\partial f_{\delta\gamma}^n(x)}{\partial x_\mu} + f_{\delta\sigma}^n(x) \rho_{k\sigma\gamma}(x) = 0 \quad (5)$$

для всех значений γ . Пусть $F(x) = (f_{\delta\sigma}^n(x))$, $\Gamma_k(x) = (\rho_{k\sigma\gamma}(x))$ – квадратные матрицы порядка 12. Тогда второе слагаемое левой части равенства (5) является некоторым элементом матрицы $F(x)\Gamma_k(x)$.

На основании проведенных рассуждений приходим к выводу о достоверности следующей теоремы.

ТЕОРЕМА 1. Система функций $f_{\delta\gamma}^n(x)A_\gamma^n$ является системой функциональных инвариантов подалгебры L тогда и только тогда, когда $F = (f_{\delta\sigma}^n(x))$ – невырожденная матрица в некоторой области пространства $R(1, 3)$ и удовлетворяет системе уравнений

$$\xi_{k\mu}(x) \frac{\partial F(x)}{\partial x_\mu} + F(x)\Gamma_k(x) = 0 \quad (k = 1, 2, 3). \quad (6)$$

Аналогично функция $\omega(x)$ является инвариантом оператора X_k тогда и только тогда, когда $X_k\omega = 0$, т.е.

$$\xi_{k\mu}(x) \frac{\partial \omega}{\partial x_\mu} = 0. \quad (7)$$

Поскольку все алгебры L_j удовлетворяют условию

$$\text{rank } ||\xi_{k\mu}(x)|| = 3,$$

то системы (6), (7) совместны.

В теореме 1 мы каждому генератору X_k подалгебры L алгебры $A\tilde{P}(1, 3)$ сопоставили матрицу Γ_k . Укажем явный вид этих матриц для всех генераторов (2) алгебры $A\tilde{P}(1, 3)$.

Поскольку оператор P_μ не зависит от $\frac{\partial}{\partial A^\mu}$, то для него матрица Γ – нулевая матрица. Обозначим через $-S_{\mu\nu}$ матрицу Γ , которая соответствует оператору $J_{\mu\nu}$. Легко убедиться, что

$$\begin{aligned} S_{01} &= \begin{pmatrix} 0 & -I & 0 & 0 \\ -I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & S_{02} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ S_{03} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -I \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -I & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & S_{12} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -I & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ S_{13} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -I \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 \end{pmatrix}, & S_{23} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -I \\ 0 & 0 & I & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

где 0 – нулевая, а I – единичная матрицы порядка 3.

Оператору D соответствует матрица $-E$, где E – единичная матрица порядка 12.

Выписанные матрицы задают матричное представление алгебры $A\tilde{O}(1, 3) = AO(1, 3) \oplus \langle D \rangle$, поскольку

$$[S_{\mu\nu}, S_{\delta\gamma}] = g_{\mu\gamma}S_{\nu\delta} + g_{\nu\delta}S_{\mu\gamma} - g_{\mu\delta}S_{\nu\gamma} - g_{\nu\gamma}S_{\mu\delta}, \quad [E, S_{\mu\nu}] = 0.$$

Пусть $a = (1, 0, 0, 0)$, $b = (0, 1, 0, 0)$, $c = (0, 0, 1, 0)$, $d = (0, 0, 0, 1)$, $k = a + d$. Обозначим через a_μ , b_μ , c_μ , d_μ компоненты с номером μ соответственно векторов a , b , c , d . Тогда

$$\begin{aligned} x_0 &= ax = a_\mu x^\mu, & x_1 &= -bx = -b_\mu x^\mu, \\ x_2 &= -cx = -c_\mu x^\mu, & x_3 &= -dx = -d_\mu x^\mu. \end{aligned}$$

ТЕОРЕМА 2. Для каждой из подалгебр L_j ($j = 1, \dots, 24$), приведенных в списке (3), существует линейный анзац (4), где ω – решение системы (7), а

$$\Lambda^{-1} = \exp\{-\ln \theta E\} \exp\{\theta_0 S_{03}\} \exp\{-\theta_1 S_{12}\} \exp\{-2\theta_2(S_{01} - S_{13})\}.$$

При этом функции θ , θ_0 , θ_1 , θ_2 , ω можно представить в следующем виде:

$$L_1: \quad \theta = |bx|^{-1}, \quad \theta_0 = \theta_1 = \theta_2 = 0, \quad \omega = cx(bx)^{-1};$$

$$L_2: \quad \theta = \Psi_1^{-\frac{1}{2}}, \quad \theta_0 = \theta_2 = 0, \quad \theta_1 = \Phi, \quad \omega = \ln \Psi_1 + 2\Phi;$$

$$L_3: \quad \theta = |dx|^{-1}, \quad \theta_0 = \theta_2 = 0, \quad \theta_1 = \Phi, \quad \omega = \Psi_1(dx)^{-2};$$

$$L_4: \quad \theta = |ax|^{-1}, \quad \theta_0 = \theta_2 = 0, \quad \theta_1 = \Phi, \quad \omega = \Psi_1(ax)^{-2};$$

$$L_5: \quad \theta = |bx|^{-1}, \quad \theta_0 = \alpha^{-1} \ln |bx|, \quad \theta_1 = \theta_2 = 0, \quad \omega = cx(bx)^{-1};$$

$$L_6: \quad \theta = |\Psi_2|^{-\frac{1}{2}}, \quad \theta_0 = \frac{1}{2} \ln |(ax - dx)(kx)^{-1}|, \quad \theta_1 = \theta_2 = 0,$$

$$\omega = (1 - \alpha) \ln |ax - dx| + (1 + \alpha) \ln |kx|;$$

$$L_7: \quad \theta = |cx|^{-1}, \quad \theta_0 = \alpha^{-1} \ln |cx|, \quad \theta_1 = \theta_2 = 0, \quad \omega = |kx|^\alpha |cx|^{1-\alpha};$$

$$L_8: \quad \theta = |ax - dx|^{-\frac{1}{2}}, \quad \theta_0 = \frac{1}{2} \ln |ax - dx|, \quad \theta_1 = \theta_2 = 0,$$

$$\omega = kx - \ln |ax - dx|;$$

$$L_9: \quad \theta = |cx|^{-1}, \quad \theta_0 = \ln |cx|, \quad \theta_1 = \theta_2 = 0, \quad \omega = kx - 2 \ln |cx|;$$

$$L_{10}: \quad \theta = |cx|^{-1}, \quad \theta_0 = \ln |(ax - dx)(cx)^{-1}|, \quad \theta_1 = \theta_2 = 0, \quad \omega = \Psi_2(cx)^{-2};$$

$$L_{11}: \quad \theta = |cx|^{-1}, \quad \theta_0 = -\ln |kx(cx)^{-1}|, \quad \theta_1 = \theta_2 = 0, \quad \omega = cx(bx)^{-1};$$

$$L_{12}: \quad \theta = \Psi_1^{-\frac{1}{2}}, \quad \theta_0 = -\alpha\Phi, \quad \theta_1 = \Phi, \quad \theta_2 = 0, \quad \omega = \ln \Psi_1 + 2\beta\Phi;$$

$$L_{13}: \quad \theta = |\Psi_2|^{-\frac{1}{2}}, \quad \theta_0 = \frac{1}{2} \ln |(ax - dx)(kx)^{-1}|,$$

$$\theta_1 = -\frac{1}{2\alpha} \ln |(ax - dx)(kx)^{-1}|, \quad \theta_2 = 0,$$

$$\omega = (\alpha - \beta) \ln |ax - dx| + (\alpha + \beta) \ln |kx|;$$

$$L_{14}: \quad \theta = |ax - dx|^{-\frac{1}{2}}, \quad \theta_0 = \frac{1}{2} \ln |ax - dx|, \quad \theta_1 = -\frac{1}{2} \ln |ax - dx|, \quad \theta_2 = 0,$$

$$\omega = kx - \ln |ax - dx|;$$

$$L_{15}: \quad \theta = \Psi_1^{-\frac{1}{2}}, \quad \theta_0 = -\alpha\Phi, \quad \theta_1 = \Phi, \quad \theta_2 = 0, \quad \omega = \ln[\Psi_1(kx)^{-2}] + 2\alpha\Phi;$$

$$L_{16}: \quad \theta = \Psi_1^{-\frac{1}{2}}, \quad \theta_0 = \frac{1}{2} \ln[\Psi_1(kx)^{-2}], \quad \theta_1 = \Phi, \quad \theta_2 = 0,$$

$$\omega = \ln[\Psi_1^{1-\alpha}(kx)^{2\alpha}] + 2\beta\Phi;$$

$$L_{17}: \quad \theta = \Psi_1^{-\frac{1}{2}}, \quad \theta_0 = \frac{1}{2} \ln \Psi_1, \quad \theta_1 = \Phi, \quad \theta_2 = 0, \quad \omega = kx - \ln \Psi_1 + 2\alpha\Phi;$$

$$L_{18}: \quad \theta = \Psi_1^{-\frac{1}{2}}, \quad \theta_0 = \frac{1}{2} \ln \Psi_1, \quad \theta_1 = \Phi, \quad \theta_2 = 0, \quad \omega = kx + 2\Phi;$$

$$L_{19}: \quad \theta = \Psi_1^{-\frac{1}{2}}, \quad \theta_0 = -\frac{1}{2} \ln |kx(ax - dx)^{-1}|, \quad \theta_1 = \Phi, \quad \theta_2 = 0,$$

$$\omega = \Psi_1 |\Psi_2|^{-1};$$

$$L_{20}: \quad \theta = |\Psi_3|^{-\frac{1}{2}}, \quad \theta_0 = \frac{1}{2\alpha} \ln |\Psi_3|, \quad \theta_1 = 0, \quad \theta_2 = \frac{1}{2} bx(kx)^{-1},$$

$$\omega = |kx|^{2\alpha} |\Psi_3|^{1-\alpha};$$

$$L_{21}: \quad \theta = |cx kx - bx|^{-1}, \quad \theta_0 = \ln |cx kx - bx|, \quad \theta_1 = 0, \quad \theta_2 = \frac{1}{2} cx,$$

$$\omega = kx;$$

$$L_{22}: \quad \theta = |kx|^{-\frac{1}{2}}, \quad \theta_0 = -\frac{1}{2} \ln |kx|, \quad \theta_1 = 0, \quad \theta_2 = \frac{1}{2} bx(kx)^{-1},$$

$$\omega = ax - dx + \ln |kx| - (bx)^2 (kx)^{-1};$$

$$L_{23}: \quad \theta = |cx|^{-1}, \quad \theta_0 = \frac{1}{2} \ln |cx|, \quad \theta_1 = 0, \quad \theta_2 = -\frac{1}{4} kx,$$

$$\omega = [4bx + (kx)^2] (cx)^{-1};$$

$$L_{24}: \quad \theta = |4bx + (kx)^2|^{-1}, \quad \theta_0 = \frac{1}{2} \ln |4bx + (kx)^2|, \quad \theta_1 = 0, \quad \theta_2 = -\frac{1}{4} kx,$$

$$\omega = \left[ax - dx + bx kx + \frac{1}{6} (kx)^3 \right]^2 [4bx + (kx)^2]^{-3}.$$

Здесь $\Phi = \arctg \frac{cx}{bx}$, $\Psi_1 = (bx)^2 + (cx)^2$, $\Psi_2 = (ax)^2 - (dx)^2$, $\Psi_3 = (ax)^2 - (bx)^2 - (dx)^2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Все случаи исследуются аналогично, поэтому ограничимся случаем подалгебры $L_2 = \langle J_{12} + \alpha D, P_0, P_3 \rangle$.

На основании теоремы 1 компоненты столбца $\Lambda^{-1} \vec{A}$ являются инвариантами подалгебры L_2 тогда и только тогда, когда

$$\begin{aligned} -x_1 \frac{\partial \Lambda}{\partial x_2} + x_2 \frac{\partial \Lambda}{\partial x_1} + \alpha \left(x_\mu \frac{\partial \Lambda}{\partial x_\mu} \right) - \Lambda (S_{12} + \alpha E) &= 0, \\ \frac{\partial \Lambda}{\partial x_0} &= 0, \quad \frac{\partial \Lambda}{\partial x_3} = 0. \end{aligned} \quad (8)$$

Последние два уравнения системы (8) показывают, что $\Lambda = \Lambda(x_1, x_2)$, а из первого уравнения следует, что в Λ можно положить $\theta_0 = \theta_2 = 0$. Согласно формуле Кэмпбелла–Хаусдорфа в этом случае

$$\xi_\mu \frac{\partial \Lambda}{\partial x_\mu} = -\Lambda \xi_\mu \left(\frac{\partial \theta}{\partial x_\mu} + \frac{\partial \theta_1}{\partial x_\mu} \right).$$

Поэтому левую часть первого уравнения системы (8) можно сократить слева на Λ , при этом получаем уравнение, левую часть которого можно представить в виде комбинаций матриц E и S_{12} . Положив коэффициенты в таких комбинациях равными нулю, приходим к системе

$$\begin{aligned} \frac{1}{\theta} \left\{ x_1 \frac{\partial \theta}{\partial x_2} - x_2 \frac{\partial \theta}{\partial x_1} - \alpha \left(x_1 \frac{\partial \theta}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial \theta}{\partial x_2} \right) \right\} - \alpha &= 0, \\ x_1 \frac{\partial \theta_1}{\partial x_2} - x_2 \frac{\partial \theta_1}{\partial x_1} - \alpha \left(x_1 \frac{\partial \theta_1}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial \theta_1}{\partial x_2} \right) - 1 &= 0, \end{aligned} \quad (9)$$

которая равносильна системе (8). Нетрудно убедиться, что системе (9) удовлетворяют функции

$$\begin{aligned}\theta &= (x_1^2 + x_2^2)^{-\frac{1}{2}} = [(bx)^2 + (cx)^2]^{-\frac{1}{2}}, \\ \theta_1 &= \operatorname{arctg} \frac{x_2}{x_1} = \operatorname{arctg} \frac{cx}{bx}.\end{aligned}$$

Уравнения (7) для определения функции $\omega(x)$ имеют вид

$$\begin{aligned}-x_1 \frac{\partial \omega}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial \omega}{\partial x_2} + \alpha \left(x_\mu \frac{\partial \omega}{\partial x_\mu} \right) &= 0, \\ \frac{\partial \omega}{\partial x_0} &= 0, \quad \frac{\partial \omega}{\partial x_1} = 0.\end{aligned}$$

Согласно этому получаем, что

$$\omega = \ln(x_1^2 + x_2^2) + 2 \operatorname{arctg} \frac{x_2}{x_1} = \ln[(bx)^2 + (cx)^2] + 2 \operatorname{arctg} \frac{cx}{bx}.$$

Теорема доказана.

3. КОВАРИАНТНАЯ ФОРМА ЛИНЕЙНОГО АНЗАЦА И СИММЕТРИЙНАЯ РЕДУКЦИЯ СУЯМ

Согласно теореме 2 анзацы, соответствующие подалгебрам L_j ($j = 1, \dots, 24$), имеют линейную форму (4), где

$$\Lambda(x) = \exp\{2\theta_2(S_{01} - S_{13})\} \exp\{\theta_1 S_{12}\} \exp\{-\theta_0 S_{03}\} \exp\{\ln \theta E\}.$$

Отсюда получаем, что

$$\Lambda = \theta \begin{pmatrix} [\cosh \theta_0 + 2\theta_2^2 e^{-\theta_0}] & 2[-\theta_2 \cos \theta_1] & 2[\theta_2 \sin \theta_1] & [\sinh \theta_0 + 2\theta_2^2 e^{-\theta_0}] \\ 2[-\theta_2 e^{-\theta_0}] & [\cos \theta_1] & [-\sin \theta_1] & 2[\theta_2 e^{-\theta_0}] \\ [0] & [\sin \theta_1] & [\cos \theta_1] & [0] \\ [\sinh \theta_0 + 2\theta_2^2 e^{-\theta_0}] & 2[-\theta_2 \cos \theta_1] & 2[\theta_2 \sin \theta_1] & [\cosh \theta_0 - 2\theta_2^2 e^{-\theta_0}] \end{pmatrix},$$

где запись $[f]$ обозначает $[f] = f \cdot I$, I — единичная матрица третьего порядка.

Поэтому анзац (4) можно представить в следующем виде:

$$\begin{aligned}\vec{A}_0 &= \theta [\cosh \theta_0 \vec{B}_0 + \sinh \theta_0 \vec{B}_3 + 2\theta_2^2 e^{-\theta_0} (\vec{B}_0 - \vec{B}_3) + 2\theta_2 (\sin \theta_1 \vec{B}_2 - \cos \theta_1 \vec{B}_1)], \\ \vec{A}_1 &= \theta [\cos \theta_1 \vec{B}_1 - \sin \theta_1 \vec{B}_2 - 2\theta_2 e^{-\theta_0} (\vec{B}_0 - \vec{B}_3)], \\ \vec{A}_2 &= \theta [\sin \theta_1 \vec{B}_1 + \cos \theta_1 \vec{B}_2], \\ \vec{A}_3 &= \theta [\sinh \theta_0 \vec{B}_0 + \cosh \theta_0 \vec{B}_3 + 2\theta_2 e^{-\theta_0} (\vec{B}_0 - \vec{B}_3) + \theta_2 (\sin \theta_1 \vec{B}_2 - \cos \theta_1 \vec{B}_1)].\end{aligned}\tag{10}$$

Нетрудно убедиться, что

$$\begin{aligned}\vec{A}_\mu &= a_\mu \vec{A}_0 + b_\mu \vec{A}_1 + c_\mu \vec{A}_2 + d_\mu \vec{A}_3, \\ \vec{B}_0 &= a_\nu \vec{B}^\nu, \quad \vec{B}_1 = -b_\nu \vec{B}^\nu, \quad \vec{B}_2 = -c_\nu \vec{B}^\nu, \quad \vec{B}_3 = -d_\nu \vec{B}^\nu,\end{aligned}$$

где $a_\mu, b_\mu, c_\mu, d_\mu$ — компоненты с номером μ соответственно векторов a, b, c, d , которые были введены в разделе 2.

Тогда в этих обозначениях линейный анзац (10), а также и анзац (4) можно представить в такой форме:

$$\begin{aligned}\vec{A}_\mu(x) = \theta a_{\mu\nu}(x) \vec{B}^\nu(\omega) = \theta \Big\{ & (a_\mu a_\nu - d_\mu d_\nu) \cosh \theta_0 + (d_\mu a_\nu - d_\nu a_\mu) \sinh \theta_0 + \\ & + 2(a_\mu + d_\mu) [\theta_2 \cos \theta_1 b_\nu - \theta_2 \sin \theta_1 c_\nu + \theta_2^2 e^{-\theta_0} (a_\nu + d_\nu)] + \\ & + (b_\mu c_\nu - b_\nu c_\mu) \sin \theta_1 - (c_\mu c_\nu + b_\mu b_\nu) \cos \theta_1 - \\ & - 2e^{-\theta_0} \theta_2 b_\mu (a_\nu + d_\nu) \Big\} \vec{B}^\nu(\omega).\end{aligned}\quad (11)$$

Значения функций $\theta, \theta_0, \theta_1, \theta_2, \omega$ в анзаце (11) для каждой из подалгебр L_j ($j = 1, \dots, 24$) приведены в теореме 2.

Таким образом, мы записали $\tilde{P}(1, 3)$ -инвариантный анзац для полей $\vec{A}_\mu(x)$ в явно ковариантном виде.

Заметим, что анзац (11) можно получить из анзаца (10), если к функциям $\vec{A}_\mu$ в (10) применить формулы разложения, соответствующие группе Лоренца $AO(1, 3)$ с базисными генераторами (2) (см., например, [14, 15]). Поэтому векторы a, b, c, d можно считать произвольной системой ортонормированных векторов пространства Минковского $R(1, 3)$, т.е. имеют место соотношения

$$\begin{aligned}a_\mu a^\mu &= -b_\mu b^\mu = -c_\mu c^\mu = -d_\mu d^\mu = 1, \\ a_\mu b^\mu &= a_\mu c^\mu = a_\mu d^\mu = b_\mu c^\mu = b_\mu d^\mu = c_\mu d^\mu = 0.\end{aligned}$$

Полученная унифицированная форма (11) $\tilde{P}(1, 3)$ -инвариантных анзацев позволяет осуществить редукцию СУЯМ (1) в общем виде.

ЛЕММА. Анзац (11) редуцирует СУЯМ (1) к системе

$$T_{\mu\nu} = \frac{i}{2} \varepsilon_{\mu\nu\sigma\delta} T^{\sigma\delta}, \quad (12)$$

где

$$\begin{aligned}T_{\mu\nu} &= G_\mu(\omega) \frac{d\vec{B}_\nu(\omega)}{d\omega} - G_\nu(\omega) \frac{d\vec{B}_\mu(\omega)}{d\omega} + H_\mu(\omega) \vec{B}_\nu(\omega) - \\ &- H_\nu(\omega) \vec{B}_\mu(\omega) + S_{\mu\nu\gamma}(\omega) \vec{B}^\gamma(\omega) + e \vec{B}_\mu(\omega) \times \vec{B}_\nu(\omega).\end{aligned}\quad (13)$$

В (13) функции $G_\mu(\omega), H_\mu(\omega), S_{\mu\nu\gamma}(\omega)$ определяются из соотношений

$$\begin{aligned}\theta G_\gamma &= a_{\mu\gamma} \frac{\partial \omega}{\partial x_\mu}, \quad H_\gamma \theta^2 = a_{\mu\gamma} \frac{\partial \theta}{\partial x_\mu}, \\ \theta S_{\delta\sigma\gamma} &= a_\delta^\mu \frac{\partial a_{\mu\gamma}}{\partial x_\nu} a_{\nu\sigma} - a_\sigma^\mu \frac{\partial a_{\mu\gamma}}{\partial x_\nu} a_{\nu\delta}.\end{aligned}$$

Для доказательства леммы достаточно подставить анзац (11) в СУЯМ (1) и полученное выражение свернуть с тензором $a_\sigma^\mu a_\delta^\nu$, используя то, что для $a_{\mu\nu}$ имеет место равенство $a_\nu^\mu a_{\mu\gamma} = g_{\nu\gamma}$.

Согласно лемме построение редуцированных систем для подалгебр L_j свелось к нахождению для каждой из них функций $G_\gamma(\omega)$, $H_\gamma(\omega)$, $S_{\delta\sigma\gamma}(\omega)$. Опустив громоздкие вычисления, мы приводим явный вид указанных функций для каждой из подалгебр L_j в следующем списке:

$$\begin{aligned}
L_1 : \quad & G_\gamma = \epsilon_1(c_\gamma - b_\gamma\omega), \quad H_\gamma = -\epsilon_1 b_\gamma, \quad S_{\delta\sigma\gamma} = 0; \\
L_2 : \quad & G_\gamma = 2(b_\gamma + c_\gamma), \quad H_\gamma = -b_\gamma, \quad S_{\delta\sigma\gamma} = (b_\delta c_\sigma - b_\sigma c_\delta)c_\gamma; \\
L_3 : \quad & G_\gamma = 2\sqrt{\omega}(b_\gamma - \epsilon_2\sqrt{\omega}d_\gamma), \quad H_\gamma = -\epsilon_2 d_\gamma, \quad S_{\delta\sigma\gamma} = \frac{1}{\sqrt{\omega}}(c_\sigma b_\delta - b_\sigma c_\delta)c_\gamma; \\
L_4 : \quad & G_\gamma = 2\sqrt{\omega}(b_\gamma - \epsilon_3\sqrt{\omega}a_\gamma), \quad H_\gamma = -\epsilon_3 a_\gamma, \quad S_{\delta\sigma\gamma} = \frac{1}{\sqrt{\omega}}(c_\sigma b_\delta - b_\sigma c_\delta)c_\gamma; \\
L_5 : \quad & G_\gamma = \epsilon_1(c_\gamma - b_\gamma\omega), \quad H_\gamma = -\epsilon_1 b_\gamma, \\
& S_{\delta\sigma\gamma} = \epsilon_1\alpha^{-1}[b_\sigma(d_\delta a_\gamma - d_\gamma a_\delta) - b_\delta(d_\sigma a_\gamma - d_\gamma a_\sigma)]; \\
L_6 : \quad & G_\gamma = \epsilon_4(1 - \alpha)(a_\gamma - d_\gamma) + \epsilon_5(1 + \alpha)k_\gamma, \quad H_\gamma = -\frac{1}{2}\epsilon_6[\epsilon_5(a_\gamma - d_\gamma) + \epsilon_4 k_\gamma], \\
& S_{\delta\sigma\gamma} = \frac{1}{2}[\epsilon_4(a_\gamma - d_\gamma) - \epsilon_5 k_\gamma](a_\sigma d_\delta - a_\delta d_\sigma); \\
L_7 : \quad & G_\gamma = \omega[\epsilon_5\alpha k_\gamma\omega^{-\frac{1}{\alpha}} + \epsilon_7(1 - \alpha)c_\gamma], \quad H_\gamma = -\epsilon_7 c_\gamma, \\
& S_{\delta\sigma\gamma} = \epsilon_7\alpha^{-1}[c_\sigma(a_\gamma d_\delta - d_\gamma a_\delta) - c_\delta(a_\gamma d_\sigma - d_\gamma a_\sigma)]; \\
L_8 : \quad & G_\gamma = k_\gamma - \epsilon_4(a_\gamma - d_\gamma), \quad H_\gamma = -\frac{1}{2}\epsilon_4(a_\gamma - d_\gamma), \\
& S_{\delta\sigma\gamma} = \frac{1}{2}\epsilon_4[(a_\gamma - d_\gamma)(a_\sigma d_\delta - a_\delta d_\sigma)]; \\
L_9 : \quad & G_\gamma = k_\gamma - 2\epsilon_7 c_\gamma, \quad H_\gamma = -\epsilon_7 c_\gamma, \\
& S_{\delta\sigma\gamma} = \epsilon_7[c_\sigma(a_\gamma d_\delta - d_\gamma a_\delta) - c_\delta(a_\gamma d_\sigma - d_\gamma a_\sigma)]; \\
L_{10} : \quad & G_\gamma = \epsilon_4[(a_\gamma - d_\gamma)\omega + k_\gamma] - 2\epsilon_7 c_\gamma\omega, \quad H_\gamma = -\epsilon_7 c_\gamma, \\
& S_{\delta\sigma\gamma} = \epsilon_4(a_\gamma - d_\gamma)(a_\sigma d_\delta - a_\delta d_\sigma) - \epsilon_7 c_\sigma(a_\gamma d_\delta - d_\gamma a_\delta) + \\
& \quad + \epsilon_7 c_\delta(a_\gamma d_\sigma - d_\gamma a_\sigma); \\
L_{11} : \quad & G_\gamma = \epsilon_7\omega(c_\gamma - b_\gamma\omega), \quad H_\gamma = -\epsilon_7 c_\gamma, \quad S_{\delta\sigma\gamma} = \epsilon_7[c_\sigma(a_\gamma d_\delta - d_\gamma a_\delta) - \\
& \quad - c_\delta(a_\gamma d_\sigma - d_\gamma a_\sigma)] - \epsilon_5 k_\gamma(a_\sigma d_\delta - a_\delta d_\sigma); \\
L_{12} : \quad & G_\gamma = 2(b_\gamma + \beta c_\gamma), \quad H_\gamma = -b_\gamma, \quad S_{\delta\sigma\gamma} = c_\gamma(c_\sigma b_\delta - c_\delta b_\sigma) - \\
& \quad - \alpha[c_\sigma(d_\delta a_\gamma - a_\delta d_\gamma) - c_\delta(d_\sigma a_\gamma - a_\sigma d_\gamma)]; \\
L_{13} : \quad & G_\gamma = \epsilon_4(\alpha - \beta)(a_\gamma - d_\gamma) + \epsilon_5(\alpha + \beta)k_\gamma, \quad H_\gamma = -\frac{1}{2}\epsilon_6[\epsilon_4 k_\gamma + \epsilon_5(a_\gamma - d_\gamma)], \\
& S_{\delta\sigma\gamma} = \frac{1}{2}[\epsilon_4(a_\gamma - d_\gamma) - \epsilon_5 k_\gamma](a_\sigma d_\delta - a_\delta d_\sigma) - \frac{1}{2\alpha}[(\epsilon_4(a_\sigma - d_\sigma) - \\
& \quad - \epsilon_5 k_\sigma)(b_\delta c_\gamma - c_\delta b_\gamma) - (\epsilon_4(a_\delta - d_\delta) - \epsilon_5 k_\delta)(b_\sigma c_\gamma - c_\sigma b_\gamma)];
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
L_{14}: \quad G_\gamma &= k_\gamma - \epsilon_4(a_\gamma - d_\gamma), \quad H_\gamma = -\frac{1}{2}\epsilon_4(a_\gamma - d_\gamma), \\
S_{\delta\sigma\gamma} &= \frac{1}{2}\epsilon_4[(a_\gamma - d_\gamma)(a_\sigma d_\delta - a_\delta d_\sigma) - (a_\sigma - d_\sigma)(b_\delta c_\gamma - c_\delta b_\gamma) + \\
&\quad + (a_\delta - d_\delta)(b_\sigma c_\gamma - c_\sigma b_\gamma)]; \\
L_{15}: \quad G_\gamma &= 2(b_\gamma + \alpha c_\gamma - k_\gamma e^{\frac{1}{2}\omega}), \quad H_\gamma = -b_\gamma, \\
S_{\delta\sigma\gamma} &= c_\gamma(c_\sigma b_\delta - c_\delta b_\sigma) - \alpha[c_\sigma(d_\delta a_\gamma - a_\delta d_\gamma) - c_\delta(d_\sigma a_\gamma - a_\sigma d_\gamma)]; \\
L_{16}: \quad G_\gamma &= 2[(1 - \alpha)b_\gamma + \alpha k_\gamma + \beta c_\gamma], \quad H_\gamma = -b_\gamma, \quad S_{\delta\sigma\gamma} = c_\gamma(c_\sigma b_\delta - c_\delta b_\sigma) - \\
&\quad - k_\gamma(a_\sigma d_\delta - a_\delta d_\sigma) + b_\sigma(d_\delta a_\gamma - a_\delta d_\gamma) - b_\delta(d_\sigma a_\gamma - a_\sigma d_\gamma); \\
L_{17}: \quad G_\gamma &= k_\gamma - 2b_\gamma + 2\alpha c_\gamma, \quad H_\gamma = -b_\gamma, \quad S_{\delta\sigma\gamma} = b_\sigma(d_\delta a_\gamma - a_\delta d_\gamma) - \\
&\quad - b_\delta(d_\sigma a_\gamma - a_\sigma d_\gamma) + c_\gamma(c_\sigma b_\delta - c_\delta b_\sigma); \\
L_{18}: \quad G_\gamma &= k_\gamma + 2c_\gamma, \quad H_\gamma = -b_\gamma, \\
S_{\delta\sigma\gamma} &= b_\sigma(d_\delta a_\gamma - a_\delta d_\gamma) - b_\delta(d_\sigma a_\gamma - a_\sigma d_\gamma) + c_\gamma(c_\sigma b_\delta - c_\delta b_\sigma); \\
L_{19}: \quad G_\gamma &= 2b_\gamma\omega - \epsilon_6\omega\sqrt{\omega}(\epsilon_4 k_\gamma + \epsilon_5(a_\gamma - d_\gamma)), \quad H_\gamma = -b_\gamma, \\
S_{\delta\sigma\gamma} &= \frac{1}{2}\sqrt{\omega}[\epsilon_4(a_\gamma - d_\gamma) - \epsilon_5 k_\gamma](d_\delta a_\sigma - a_\delta d_\sigma) + c_\gamma(b_\delta c_\sigma - c_\delta b_\sigma); \\
L_{20}: \quad G_\gamma &= \epsilon_5\omega \left[(1 + \alpha)k_\gamma\omega^{-\frac{1}{2\alpha}} + \epsilon_8(1 - \alpha)(a_\gamma - d_\gamma)\omega^{\frac{1}{2\alpha}} \right], \\
H_\gamma &= -\frac{1}{2}\epsilon_5 \left[k_\gamma\omega^{-\frac{1}{2\alpha}} + \epsilon_8(a_\gamma - d_\gamma)\omega^{\frac{1}{2\alpha}} \right], \\
S_{\delta\sigma\gamma} &= \epsilon_5 \left[\frac{1}{2\alpha} \left(k_\gamma\omega^{-\frac{1}{2\alpha}} + \epsilon_8(a_\gamma - d_\gamma)\omega^{\frac{1}{2\alpha}} \right) (a_\sigma d_\delta - d_\sigma a_\delta) + \right. \\
&\quad \left. + b_\gamma(k_\delta b_\sigma - k_\sigma b_\delta)\omega^{-\frac{1}{2\alpha}} \right]; \\
L_{21}: \quad G_\gamma &= k_\gamma, \quad H_\gamma = -\epsilon_9[c_\gamma\omega - b_\gamma], \quad S_{\delta\sigma\gamma} = \epsilon_9[(c_\sigma\omega - b_\sigma)(a_\gamma d_\delta - d_\gamma a_\delta) - \\
&\quad - (c_\delta\omega - b_\delta)(a_\gamma d_\sigma - d_\gamma a_\sigma)] + c_\sigma(k_\delta b_\gamma - k_\gamma b_\delta) - c_\delta(k_\sigma b_\gamma - k_\gamma b_\sigma); \\
L_{22}: \quad G_\gamma &= a_\gamma - d_\gamma + \epsilon_5 k_\gamma, \quad H_\gamma = -\frac{1}{2}\epsilon_5 k_\gamma, \\
S_{\delta\sigma\gamma} &= \epsilon_5 \left[b_\gamma(k_\delta b_\sigma - k_\sigma b_\delta) - \frac{1}{2}k_\gamma(a_\delta d_\sigma - d_\delta a_\sigma) \right]; \\
L_{23}: \quad G_\gamma &= \epsilon_7(4b_\gamma - \omega c_\gamma), \quad H_\gamma = -\epsilon_7 c_\gamma, \quad S_{\delta\sigma\gamma} = \frac{1}{2}\epsilon_7[c_\sigma(a_\gamma d_\delta - d_\gamma a_\delta) - \\
&\quad - c_\delta(a_\gamma d_\sigma - d_\gamma a_\sigma)] - \frac{1}{2}k_\gamma(k_\delta b_\sigma - k_\sigma b_\delta); \\
L_{24}: \quad G_\gamma &= \sqrt{|\omega|} \left[\frac{1}{2}k_\gamma + 2\epsilon_{10}(a_\gamma - d_\gamma) \right] - 12\epsilon_{10}\omega b_\gamma, \quad H_\gamma = -4\epsilon_{10}b_\gamma, \\
S_{\delta\sigma\gamma} &= 2\epsilon_{10}[b_\sigma(a_\gamma d_\delta - d_\delta a_\delta) - b_\delta(a_\gamma d_\sigma - d_\gamma a_\sigma)] - \frac{1}{2}k_\gamma(k_\delta b_\sigma - k_\sigma b_\delta).
\end{aligned}$$

Здесь $\epsilon_k = 1$ при $\varphi > 0$, $\epsilon_k = -1$ при $\varphi < 0$. Значения функций φ для каждого k

приведены в таблице.

k	φ	k	φ
1	bx	6	$(ax)^2 - (dx)^2$
2	dx	7	cx
3	ax	8	$(ax)^2 - (bx)^2 - (dx)^2$
4	$ax - dx$	9	$cx\,kx - bx$
5	kx	10	$4\,bx + (kx)^2$

4. О ТОЧНЫХ ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ РЕШЕНИЯХ СУЯМ

Прежде чем перейти к анализу редуцированных систем и построению их точных решений, сделаем следующее замечание. Если в четырехмерном евклидовом пространстве УЯМ и СУЯМ действительны, то в пространстве Минковского УЯМ – система действительных ДУЧП второго порядка, а СУЯМ (1) – система комплексных ДУЧП первого порядка. Поэтому в общем случае самодуальными решениями УЯМ в пространстве Минковского будут комплексные функции, что является нежелательным свойством таких решений.

С другой стороны, СУЯМ (1), а соответственно и редуцированные системы (12), (13) являются недоопределенными системами ДУЧП. Кроме того, симметричная редукция СУЯМ сохраняет их симметричную форму. Это дает возможность ставить вопрос о нахождении их действительных решений.

Очевидно, что необходимым условием построения действительных решений систем (12), (13) является выполнение равенств

$$T_{\mu\nu} = 0, \quad (14)$$

которые приводят нас уже к переопределенной системе ОДУ первого порядка. Накладывая дополнительные условия на функции $\vec{B}_\mu$, нам удалось в некоторых случаях свести системы (14) к интегрируемому виду и получить нетривиальные действительные неабелевы решения СУЯМ (1). Ниже мы подробно останавливаемся именно на этих случаях.

Далее мы используем обозначения $\vec{e}_1 = (1, 0, 0)$, $\vec{e}_2 = (0, 1, 0)$, $\vec{e}_3 = (0, 0, 1)$. Для восстановления явного вида систем (13), (14) берем $a = (1, 0, 0, 0)$, $b = (0, 1, 0, 0)$, $c = (0, 0, 1, 0)$, $d = (0, 0, 0, 1)$.

Случай алгебры L_1 . Положим здесь $\vec{B}_0 = \lambda_0 \vec{B}$, $\vec{B}_3 = \lambda_3 \vec{B}$, где λ_0, λ_3 – произвольные действительные постоянные, причем $\lambda_0^2 + \lambda_3^2 \neq 0$. Система (13), (14) принимает вид

$$\begin{aligned} \epsilon_1 \frac{d\vec{B}}{d\omega} + e\vec{B}_2 \times \vec{B} &= 0, \\ \epsilon_1 \omega \frac{d\vec{B}_2}{d\omega} + \epsilon_1 \frac{d\vec{B}_1}{d\omega} + \epsilon_1 \vec{B}_2 - e\vec{B}_1 \times \vec{B}_2 &= 0, \\ \epsilon_1 \omega \frac{d\vec{B}}{d\omega} + \epsilon_1 \vec{B} + e\vec{B} \times \vec{B}_1 &= 0. \end{aligned} \quad (15)$$

Пусть, далее, в системе (15) $\vec{B} = g_m(\omega)\vec{e}_m$, $\vec{B}_1 = h_m(\omega)\vec{e}_m$, $\vec{B}_2 = f(\omega)\vec{e}_2$, $m = 1, 2, 3$. Тогда первые два уравнения системы (15) приводят к следующей системе для определения функций g_m, h_m, f :

$$\begin{aligned} \epsilon_1 \frac{dg_1}{d\omega} + ef g_3 &= 0, & \epsilon_1 \frac{dh_1}{d\omega} + ef h_3 &= 0, \\ \epsilon_1 \frac{dg_2}{d\omega} &= 0, & \epsilon_1 \omega \frac{df}{d\omega} + \epsilon_1 \frac{dh_2}{d\omega} + \epsilon_1 f &= 0, \\ \epsilon_1 \frac{dg_3}{d\omega} - eg_1 f &= 0, & \epsilon_1 \frac{dh_3}{d\omega} - eh_1 f &= 0. \end{aligned} \quad (16)$$

Положим в (16) $f = C\omega^{-1}$, где C – произвольная постоянная. Тогда $g_2 = C_1$, $h_2 = C_2$, где C_1, C_2 – произвольные постоянные, а для определения функций g_1, g_3, h_1, h_3 получаем две аналогичные системы, решение которых сводится к решению уравнений Эйлера. В частности, система для определения функций g_1, g_3 имеет вид

$$\epsilon_1 \frac{dg_1}{d\omega} + eC\omega^{-1} g_3 = 0, \quad \epsilon_1 \frac{dg_3}{d\omega} - eC\omega^{-1} g_1 = 0,$$

откуда следует уравнение

$$\omega^2 \frac{d^2 g_3}{d\omega^2} + \omega \frac{dg_3}{d\omega} + e^2 C^2 g_3 = 0,$$

общее решение которого –

$$g_3 = C_3 \sin(eC \ln |\omega| + C_4),$$

следовательно,

$$g_1 = \epsilon_1 C_3 \cos(eC \ln |\omega| + C_4).$$

Аналогично получаем

$$h_1 = \epsilon_1 C_5 \cos(eC \ln |\omega| + C_6),$$

$$h_3 = C_5 \sin(eC \ln |\omega| + C_6),$$

здесь C_3, C_4, C_5, C_6 – произвольные постоянные интегрирования.

Наконец, проверив выполнение последнего уравнения системы (15), получаем следующее ее решение:

$$\vec{B}_0 = \lambda_0 \vec{B}, \quad \vec{B}_3 = \lambda_3 \vec{B}, \quad \vec{B} = g_m(\omega)\vec{e}_m, \quad \vec{B}_1 = h_m(\omega)\vec{e}_m, \quad \vec{B}_2 = f(\omega)\vec{e}_2,$$

где

$$\begin{aligned} g_1 &= \mp \epsilon_1 C_3 \cos(eC_1 \ln |\omega| + C_2), \\ g_2 &= C_3, \\ g_3 &= \mp C_3 \sin(eC_1 \ln |\omega| + C_2), \\ h_1 &= \pm \epsilon_1 e^{-1} \sin(eC_1 \ln |\omega| + C_2), \\ h_2 &= -C_1, \\ h_3 &= \mp e^{-1} \cos(eC_1 \ln |\omega| + C_2), \\ f &= C_1 \omega^{-1}, \end{aligned} \quad (17)$$

C_1, C_2, C_3 – произвольные постоянные.

Случай алгебры L_9 . Пусть $\vec{B}_0 = \vec{B}_3 = \vec{B}$, $\vec{B}_1 = \vec{0}$. Тогда система (13), (14) сводится к уравнению

$$2\epsilon_7 \frac{d\vec{B}}{d\omega} + \frac{d\vec{B}_2}{d\omega} + 2\epsilon_7 \vec{B} + e\vec{B} \times \vec{B}_2 = 0. \quad (18)$$

Положим $\vec{B}_2 = f(\omega)\vec{e}_2$, $\vec{B} = g(\omega)\vec{e}_1 + h(\omega)\vec{e}_3$. Тогда из (18) следует система

$$2\epsilon_7 \frac{dg}{d\omega} + 2\epsilon_7 g - e f h = 0, \quad \frac{df}{d\omega} = 0, \quad 2\epsilon_7 \frac{dh}{d\omega} + 2\epsilon_7 h + e f g = 0,$$

общим решением которой являются функции

$$\begin{aligned} f &= C_1, \quad g = e^{-\omega} C_2 \sin\left(\frac{eC_1}{2}\omega + C_3\right), \\ h &= \epsilon_7 e^{-\omega} C_2 \cos\left(\frac{eC_1}{2}\omega + C_3\right), \end{aligned} \quad (19)$$

где C_1, C_2, C_3 – произвольные постоянные интегрирования.

Случай алгебры L_{17} . Положив $\vec{B}_0 = \vec{B}_3 = \vec{B}$, получаем следующую редуцированную систему (14):

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{B}_1}{d\omega} + 2\frac{d\vec{B}}{d\omega} + 2\vec{B} + e\vec{B} \times \vec{B}_1 &= 0, \\ 2\alpha \frac{d\vec{B}}{d\omega} - \frac{d\vec{B}_2}{d\omega} + e\vec{B}_2 \times \vec{B} &= 0, \\ 2\frac{d\vec{B}_2}{d\omega} + 2\alpha \frac{d\vec{B}_1}{d\omega} + 2\vec{B}_2 - e\vec{B}_1 \times \vec{B}_2 &= 0. \end{aligned} \quad (20)$$

Положим в системе (20) $\vec{B}_1 = \lambda_1 \vec{e}_1$, $\vec{B} = f(\omega)\vec{e}_2 + g(\omega)\vec{e}_3$, $\vec{B}_2 = h(\omega)\vec{e}_2 + u(\omega)\vec{e}_3$, где $\lambda_1 \neq 0$ – произвольная постоянная. Тогда для определения функций f, g, h, u получаем систему

$$\begin{aligned} 2\frac{df}{d\omega} + 2f + e\lambda_1 g &= 0, \quad 2\frac{dh}{d\omega} + 2h + e\lambda_1 u = 0, \\ 2\frac{dg}{d\omega} + 2g - e\lambda_1 f &= 0, \quad 2\frac{du}{d\omega} + 2u - e\lambda_1 h = 0, \\ hg - uf &= 0, \quad 2\alpha \frac{df}{d\omega} - \frac{dh}{d\omega} = 0, \quad 2\alpha \frac{dg}{d\omega} - \frac{du}{d\omega} = 0. \end{aligned}$$

Общим решением первых четырех уравнений являются функции

$$\begin{aligned} f &= C_1 e^{-\omega} \cos\left(\frac{\lambda_1 e}{2}\omega + C_2\right), \quad g = C_1 e^{-\omega} \sin\left(\frac{\lambda_1 e}{2}\omega + C_2\right), \\ h &= C_3 e^{-\omega} \cos\left(\frac{\lambda_1 e}{2}\omega + C_4\right), \quad u = C_3 e^{-\omega} \sin\left(\frac{\lambda_1 e}{2}\omega + C_4\right), \end{aligned}$$

где C_1, C_2, C_3, C_4 – произвольные постоянные. Проверив выполнение последних трех уравнений системы, приходим к такому решению системы (20):

$$\vec{B}_0 = \vec{B}_3 = \vec{B} = f\vec{e}_2 + g\vec{e}_3, \quad \vec{B}_2 = h\vec{e}_2 + u\vec{e}_3, \quad \vec{B}_1 = C_3\vec{e}_1,$$

где

$$\begin{aligned} f &= C_1 e^{-\omega} \cos\left(\frac{eC_3}{2}\omega + C_2\right), \\ g &= C_1 e^{-\omega} \sin\left(\frac{eC_3}{2}\omega + C_2\right), \\ h &= 2\alpha C_1 e^{-\omega} \cos\left(\frac{eC_3}{2}\omega + C_2\right), \\ u &= 2\alpha C_1 e^{-\omega} \sin\left(\frac{eC_3}{2}\omega + C_2\right), \end{aligned} \tag{21}$$

C_1, C_2, C_3 – произвольные постоянные, $C_3 \neq 0$.

Случай алгебры L_{18} . Положим в этом случае $\vec{B}_0 = \frac{1}{2}\vec{B}_2 = \vec{B}_3 = \vec{B}$. Тогда система (14) сведется к уравнению

$$\frac{d\vec{B}}{d\omega} + 2\vec{B} + e\vec{B} \times \vec{B}_1 = 0. \tag{22}$$

Пусть в (22) $\vec{B} = \lambda\vec{e}_3$, $\vec{B}_1 = g_m(\omega)\vec{e}_m$, $m = 1, 2, 3$, $\lambda \neq 0$ – произвольная постоянная. Тогда имеют место уравнения

$$\frac{dg_1}{d\omega} - e\lambda g_2 = 0, \quad \frac{dg_2}{d\omega} + e\lambda g_1 = 0, \quad \frac{dg_3}{d\omega} + 2\lambda = 0,$$

общим решением которых являются функции

$$g_1 = C_1 \sin(e\lambda\omega + C_2), \quad g_2 = C_1 \cos(e\lambda\omega + C_2), \quad g_3 = -2\lambda\omega + C_3,$$

где C_1, C_2, C_3 – произвольные постоянные интегрирования. Следовательно, мы построили такое решение уравнения (22):

$$\begin{aligned} \vec{B}_0 &= \frac{1}{2}\vec{B}_2 = \vec{B}_3 = C_4\vec{e}_3, \\ \vec{B}_1 &= C_1 \sin(eC_4\omega + C_2)\vec{e}_1 + C_1 \cos(eC_4\omega + C_2)\vec{e}_2 + (C_3 - 2C_4\omega)\vec{e}_3, \end{aligned} \tag{23}$$

где C_1, C_2, C_3, C_4 – произвольные постоянные интегрирования, $C_4 \neq 0$.

Подставив найденные решения (17), (19), (21), (23) редуцированных уравнений в анзац (10), получаем соответственно действительные точные решения СУЯМ (1):

$$\begin{aligned} 1) \quad \vec{A}_0 &= \lambda_0 |bx|^{-1} \left[\mp \epsilon_1 C_3 \cos(eC_1 \ln |cx(bx)^{-1}| + C_2) \vec{e}_1 + C_3 \vec{e}_2 \mp \right. \\ &\quad \left. \mp C_3 \sin(eC_1 \ln |cx(bx)^{-1}| + C_2) \vec{e}_3 \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\vec{A}_1 &= |bx|^{-1} \left[\pm \epsilon_1 e^{-1} \sin(eC_1 \ln |cx(bx)^{-1}| + C_2) \vec{e}_1 2 - C_1 \vec{e}_2 \mp \right. \\
&\quad \left. \mp e^{-1} \cos(eC_1 \ln |cx(bx)^{-1}| + C_2) \vec{e}_3 \right], \\
\vec{A}_2 &= \epsilon_1 C_1 (cx)^{-1} \vec{e}_2, \\
\vec{A}_3 &= \lambda_3 |bx|^{-1} \left[\mp \epsilon_1 C_3 \cos(eC_1 \ln |cx(bx)^{-1}| + C_2) \vec{e}_1 + C_3 \vec{e}_2 \mp \right. \\
&\quad \left. \mp C_3 \sin(eC_1 \ln |cx(bx)^{-1}| + C_2) \vec{e}_3 \right]; \\
2) \quad \vec{A}_0 &= \vec{A}_3 = (cx)^2 e^{-kx} C_2 \left[\sin\left(\frac{1}{2} eC_1 (kx - 2 \ln |cx|) + C_3\right) \vec{e}_1 + \right. \\
&\quad \left. + \epsilon_7 \cos\left(\frac{1}{2} eC_1 (kx - 2 \ln |cx|) + C_3\right) \vec{e}_3 \right], \\
\vec{A}_1 &= \vec{0}, \quad \vec{A}_2 = C_1 |cx|^{-1} \vec{e}_2; \\
3) \quad \vec{A}_0 &= \vec{A}_3 = e^{-\omega} C_1 \left[\cos\left(\frac{1}{2} eC_3 \omega + C_2\right) \vec{e}_2 + \sin\left(\frac{1}{2} eC_3 \omega + C_2\right) \vec{e}_3 \right], \\
\vec{A}_1 &= [(bx)^2 + (cx)^2]^{-1} \left[(bx) C_3 \vec{e}_1 - 2\alpha C_1 (cx) e^{-\omega} \left(\cos\left(\frac{1}{2} eC_3 \omega + C_2\right) \vec{e}_2 + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \sin\left(\frac{1}{2} eC_3 \omega + C_2\right) \vec{e}_3 \right) \right], \\
\vec{A}_2 &= [(bx)^2 + (cx)^2]^{-1} \left[(cx) C_3 \vec{e}_1 + 2\alpha C_1 (bx) e^{-\omega} \left(\cos\left(\frac{1}{2} eC_3 \omega + C_2\right) \vec{e}_2 + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \sin\left(\frac{1}{2} eC_3 \omega + C_2\right) \vec{e}_3 \right) \right], \\
\omega &= kx - \ln[(bx)^2 + (cx)^2] + 2\alpha \operatorname{arctg} cx(bx)^{-1}; \\
4) \quad \vec{A}_0 &= \vec{A}_3 = C_4 \vec{e}_3; \\
\vec{A}_1 &= [(bx)^2 + (cx)^2]^{-1} \left[C_1 (bx) (\sin(eC_4 \omega + C_2) \vec{e}_1 + \cos(eC_4 \omega + C_2) \vec{e}_2 + \right. \\
&\quad \left. + (C_3 - 2C_4 \omega) \vec{e}_3) - 2C_4 (cx) \vec{e}_3 \right], \\
\vec{A}_2 &= [(bx)^2 + (cx)^2]^{-1} \left[C_1 (cx) (\sin(eC_4 \omega + C_2) \vec{e}_1 + \cos(eC_4 \omega + C_2) \vec{e}_2 + \right. \\
&\quad \left. + (C_3 - 2C_4 \omega) \vec{e}_3) + 2C_4 (bx) \vec{e}_3 \right], \quad \omega = kx + 2 \operatorname{arctg}(cx(bx)^{-1}).
\end{aligned}$$

Значения ϵ_1, ϵ_7 приведены в таблице, α – в списке подалгебр, $\lambda_0, \lambda_3, C_1, C_2, C_3, C_4$ – произвольные действительные постоянные.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе исследована структура $\tilde{P}(1, 3)$ -инвариантных анзацев для вектор-потенциала поля Янга–Миллса. Полученная линейная форма таких анзацев сведена к ковариантному виду, что позволяет значительно упростить процедуру симметричной редукции СУЯМ (1) к системам ОДУ. Показана возможность построения действительных решений СУЯМ (1).

Отметим также тот факт, что анзац (11) можно использовать и для симметричной редукции УЯМ в пространстве Минковского $R(1, 3)$.

Список литературы

- [1] A. Actor. Rev. Mod. Phys. 1979. V. 51. № 3. P. 461.
- [2] М. К. Прасада. Инстантоны и монополи в теориях калибровочных полей Янга–Миллса. В кн.: Геометрические идеи в физике. М.: Мир, 1983. С. 64.
- [3] S. Chakravarty, M. J. Ablowitz, P. A. Clarkson. Phys. Rev. Lett. 1990. V. 65. № 9. P. 1085.
- [4] S. Chakravarty, S. L. Kent, E. T. Newman. J. Math. Phys. 1995. V. 36. № 2. P. 763.
- [5] J. Tafel. J. Math. Phys. 1993. V. 34. № 5. P. 1892.
- [6] M. Kovalyov, M. Légaré, L. Gagnon. J. Math. Phys. 1993. V. 34. № 7. P. 3245.
- [7] T. A. Ivanova, A. D. Popov. Phys. Lett. A. 1995. V. 205. P. 158.
- [8] M. Legaré, A. D. Popov. Phys. Lett. A. 1995. V. 198. P. 195.
- [9] F. Schwarz. Lett. Math. Phys. 1982. V. 6. № 5. P. 355.
- [10] P. Olver. Applications of Lie Groups to Differential Equations. New York: Springer, 1993.
- [11] Л. В. Овсянников. Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978.
- [12] W. I. Fushchych, W. N. Shtelen. Lett. Nuovo Cim. 1983. V. 38. № 2. P. 37.
- [13] W. Fushchych, W. Shtelen, N. Serov. Symmetry Analysis and Exact Solutions of Equation of Nonlinear Mathematical Physics. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1993.
- [14] V. Lahno, R. Zhdanov, W. Fushchych. J. Nonlinear Math. Physics. 1995. V. 2. № 1. P. 51.
- [15] R. Z. Zhdanov, V. I. Lahno, W. I. Fushchych. УМЖ. Т. 47. № 4. С. 456.
- [16] R. Z. Zhdanov, W. I. Fushchych. J. Phys. A: Math. Gen. 1995. V. 28. P. 6253.
- [17] J. Patera, P. Winternitz, H. Zassenhaus. J. Math. Phys. V. 16. № 8. P. 1615.
- [18] В. И. Фущич, Л. Ф. Баранник, А. Ф. Баранник. Подгрупповой анализ групп Галилея, Пуанкаре и редукция нелинейных уравнений. Киев: Наукова думка, 1991.
- [19] В. И. Фущич, Р. З. Жданов. Нелинейные спинорные уравнения: симметрия и точные решения. Киев: Наукова думка, 1992.

Поступила в редакцию 4.IX.1996 г.

V. I. Lahno, W. I. Fushchych

REDUCTION OF THE SELF-DUAL YANG–MILLS EQUATIONS ON SUBGROUPS OF THE EXTENDED POINCARÉ GROUP

We have obtained ansatzes for the vector-potential of the Yang–Mills field in the Minkowski space $R(1, 3)$ invariant under 3-parameter subgroups of the extended Poincaré group $\tilde{P}(1, 3)$. Using these, we carry out symmetry reduction of the self-dual Yang–Mills equations to systems of ordinary differential equations.