Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

К. Б. Алкалаев, Двухстолбцовые безмассовые поля высших спинов на пространстве AdS_d , *ТМФ*, 2004, том 140, номер 3, 424–436

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf98>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.127.20

26 апреля 2023 г., 12:30:57

© 2004 г.

К. Б. Алкалаев*

ДВУХСТОЛБЦОВЫЕ БЕЗМАССОВЫЕ ПОЛЯ ВЫСШИХ СПИНОВ НА ПРОСТРАНСТВЕ AdS_d

Рассмотрен частный класс бозонных полей смешанного типа симметрии на пространстве AdS_d , соответствующих произвольным двухстолбцовым диаграммам Юнга. Найдены калибровочно-инвариантные свободные действия, и проанализированы уравнения движения.

Ключевые слова: высшие спины, смешанный тип симметрии, пространства анти-де Ситтера, диаграмма Юнга.

1. ВВЕДЕНИЕ

В данной статье рассматривается проблема явно ковариантной лагранжевой формулировки свободных безмассовых полей смешанного типа симметрии, распространяющихся на фоне d -мерного пространства анти-де Ситтера (AdS_d). Ранее были предложены различные подходы для построения функционалов действия, описывающих свободную динамику произвольного поля смешанного типа симметрии, в пространстве Минковского [1]–[6] и в пространстве AdS_d [7]–[12]. В противоположность плоскому пространству, в котором динамика свободных полей высших спинов в настоящий момент подробно изучена, анализ полевой динамики на фоне пространства AdS_d является более сложным, и на данный момент проанализированы лишь частные примеры полей смешанного типа симметрии. Причина этого в том, что классификация безмассовых полей в пространстве AdS_d существенно отличается от классификации безмассовых полей в пространстве Минковского [8]. С теоретико-полевой точки зрения это означает существенные изменения всей структуры калибровочных симметрий по сравнению с полевой динамикой на плоском фоне [7], [8].

Способ рассмотрения, принятый в данной статье, мотивирован методом, предложенным недавно в работе [12], где поле смешанного типа симметрии рассматривается как калибровочное поле p -формы, принимающей значения в некотором конечномерном представлении алгебры симметрии пространства AdS_d . Метод был проиллюстрирован на различных примерах полей смешанного типа симметрии, имеющих не более чем две

*Физический институт им. П. Н. Лебедева РАН, Москва, Россия. E-mail: alkalaev@lpi.ru

строки в диаграмме Юнга. Целью настоящей работы является применение общего рецепта, данного в работе [12], к безмассовым полям высших спинов, соответствующих произвольным двухстолбцовым диаграммам Юнга.

2. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

Рассмотрим лоренц-ковариантное тензорное поле $\phi^{(s,p)}(x)$ на d -мерном пространстве-времени (Минковского или AdS)¹⁾

$$\phi^{a[s],b[p]}(x) \equiv \phi^{[a_1 \dots a_s], [b_1 \dots b_p]}(x), \quad (1)$$

которое является антисимметричным по обеим группам индексов, удовлетворяет условию симметрии Юнга $\phi^{[a_1 \dots a_s, a_{s+1}][b_2 \dots b_p]}(x) = 0$ и содержит все свои следы. Отметим, что если $s < p$, то из условия симметрии Юнга следует, что поле (1) равно нулю. Тензор $\phi^{(s,p)}(x)$ будем называть полем метрического типа [12].

Считается, что высоты столбцов s и p удовлетворяют следующему неравенству:

$$0 < p \leq s \leq \nu. \quad (2)$$

Значение верхней границы в (2) различно для безмассовых полей в пространствах Минковского и AdS _{d} . Для пространства Минковского $\nu \equiv \nu_{\text{Mink}} = [(d-2)/2]$ является рангом малой группы Вигнера $SO(d-2)$. Для пространства AdS _{d} $\nu \equiv \nu_{\text{AdS}} = [(d-1)/2]$ является рангом вакуумной группы $SO(d-1)$. Отсюда следует неравенство $\nu_{\text{Mink}} \leq \nu_{\text{AdS}}$, позволяющее заключить, что теории безмассовых полей в AdS _{d} при взятии плоского предела могут приводить к дуальным описаниям безмассовых полей в пространстве Минковского²⁾. Если $s > \nu_{\text{AdS}}$ и $0 < p \leq s$, то соответствующая AdS _{d} -теория высших спинов дуальна некоторой частной AdS _{d} -теории с параметрами $\tilde{p}$, $\tilde{s}$, удовлетворяющими условию (2).

Поле метрического типа $\phi^{(s,p)}(x)$ (1) является калибровочным полем с калибровочным законом преобразования, заданным двумя типами параметров, который схематично можно записать как [3]:

$$\delta \phi^{(s,p)} = \partial S^{(s-1,p)} + \partial \Lambda^{(s,p-1)}, \quad (3)$$

в котором тензоры $S^{(s-1,p)}$ и $\Lambda^{(s,p-1)}$ содержат все свои следы и описываются диаграммами Юнга, полученными отрезанием клетки соответственно из первого и последнего столбца поля $\phi^{(s,p)}(x)$.

¹⁾ В данной работе используется сигнатура $(+ - \dots -)$. Обозначения $\underline{m}, \underline{n} = 0, \dots, d-1$ соответствуют мировым индексам, $a, b = 0, \dots, d-1$ – касательным $so(d-1, 1)$ векторным индексам и $A, B = 0, \dots, d$ – касательным $so(d-1, 2)$ векторным индексам. Мы также используем конденсированные обозначения для набора антисимметричных индексов: $a[k] \equiv [a_1 \dots a_k]$. Индексы, обозначенные одной буквой, считаются антисимметризованными: $X^a Y^a \equiv (X^{a_1} Y^{a_2} - X^{a_2} Y^{a_1})/2!$.

²⁾ Под дуальным описанием подразумевается, что поле одного спина может быть описано тензорами различных типов симметрии. Обсуждение дуальных формулировок свободных полей высших спинов в пространстве Минковского содержится в работах [5], [13]–[15].

В дальнейшем мы развиваем калибровочно-инвариантную AdS_d -теорию поля метрического типа $\phi^{(s,p)}(x)$ с произвольными значениями s и p , которые удовлетворяют условию (2). Перед тем как углубиться в описание нашего подхода, обсудим, как можно было бы поступить, чтобы получить AdS_d -теорию, начиная с некоторого лагранжиана $\mathcal{L}$, инвариантного относительно преобразования (3) на плоском фоне. Общее предписание состоит в замене $\partial \rightarrow \mathcal{D}$, где $\mathcal{D}$ есть фоновая лоренц-ковариантная производная, коммутирующая как $[\mathcal{D}, \mathcal{D}] \sim \lambda^2$ (здесь $\lambda^2 = -\Lambda$, где Λ есть космологическая постоянная). Кроме того, в лагранжиан $\mathcal{L}$ следует добавить массовоподобные слагаемые, выраженные в терминах постоянной λ , которые обеспечивают калибровочную инвариантность. Однако, как было указано в работах [7], [8], такая процедура не всегда является непротиворечивой для поля смешанного типа симметрии общего вида: только часть калибровочных симметрий может быть продеформирована в пространстве AdS_d . В рассматриваемом случае симметрия, которая остается в AdS_d , задается калибровочным параметром $\Lambda^{(s,p-1)}$. Тем не менее возможен и противоположный итог процедуры деформации, в котором остается симметрия, задаваемая параметром $S^{(s-1,p)}$. Однако в пространстве AdS_d только теория с калибровочной симметрией $\Lambda^{(s,p-1)}$ может привести после квантования к унитарному безмассовому представлению алгебры $o(d-1, 2)$ со спином $\mathbf{s} = (\underbrace{2, \dots, 2}_s, \underbrace{1, \dots, 1}_p)$ [7]. Отсутствие одной из калибровочных симметрий

на AdS_d приводит к разнице между физическими степенями свободы поля $\phi^{(s,p)}(x)$ на фоне плоской и AdS_d -геометрий. Баланс может быть восстановлен при введении поля Штюкельберга для отсутствующей симметрии $S^{(s-1,p)}$, которое, однако, может быть обращено в нуль в специальной калибровке при $\lambda \neq 0$. Плоский предел таким образом расширенных теорий описывает не одно, а два независимых поля [8], [10].

В рамках нашего подхода мы не ищем непротиворечивой AdS_d -деформации некоторого лагранжиана, описывающего полеву динамику на плоском пространстве. Вместо этого мы начинаем с динамики на фоне пространства AdS_d и затем исследуем ее плоский предел.

Фоновая геометрия пространств Минковского и AdS_d описывается полем репера $h^a = h_{\underline{n}}^a dx^{\underline{n}}$ и спиновой связностью $\omega^{ab} = \omega_{\underline{n}}^{ab} dx^{\underline{n}}$, которые удовлетворяют уравнению

$$[\mathcal{D}_{\underline{m}}, \mathcal{D}_{\underline{n}}] \phi^{a[s], b[p]} = \lambda^2 (s h_{\underline{m}}^a h_{\underline{n}c} \phi^{ca[s-1], b[p]} + p h_{\underline{m}}^b h_{\underline{n}c} \phi^{a[s], cb[p-1]}) - (\underline{m} \leftrightarrow \underline{n}), \quad (4)$$

где

$$\mathcal{D}_{\underline{n}} \phi^{a[s], b[p]} = \partial_{\underline{n}} \phi^{a[s], b[p]} + s \omega_{\underline{n}}^a{}_c \phi^{ca[s-1], b[p]} + p \omega_{\underline{n}}^b{}_c \phi^{a[s], cb[p-1]}, \quad \partial_{\underline{n}} = \frac{\partial}{\partial x^{\underline{n}}}. \quad (5)$$

Кроме того, наложено условие нулевого кручения $\mathcal{D}_{\underline{n}} h_{\underline{m}}^a - \mathcal{D}_{\underline{m}} h_{\underline{n}}^a = 0$. Оно выражает спиновую связность $\omega_{\underline{m}}^{ab}$ через первые производные поля репера $h_{\underline{m}}^a$. При $\lambda^2 > 0$ уравнение (4) описывает пространство-время AdS_d с алгеброй симметрии $o(d-1, 2)$. Пространству-времени Минковского соответствует $\lambda = 0$.

Ковариантным оператором Даламбера является

$$\mathcal{D}^2 \equiv \mathcal{D}^a \mathcal{D}_a \equiv h_{\underline{m}}^a \mathcal{D}_{\underline{m}} (h_{\underline{n}, a} \mathcal{D}^{\underline{n}}), \quad (6)$$

где фоновая лоренц-ковариантная производная задается выражением (5).

В последующем изложении мы используем AdS_d -ковариантные обозначения и работаем с AdS_d -тензорами вида $T^{A[m]}(x)$. Для того чтобы связать лоренц-ковариантную и AdS_d -ковариантную реализации, мы вводим вектор компенсатора $V^A(x)$, нормированный условием $V^A V_A = 1$. Это позволяет отождествить подалгебру Лоренца $so(d-1, 1)$ в AdS -алгебре $so(d-1, 2)$ как стабилизатор компенсатора [16], что приводит к ковариантному разбиению $so(d-1, 2)$ 1-формы связности $\Omega^{AB} = -\Omega^{BA}$ на поле репера E^A и на спиновую связность $\omega^{AB} = -\omega^{BA}$: $E^A = DV^A \equiv dV^A + \Omega^{AB}V_B$, $\omega^{AB} = \Omega^{AB} - 2\lambda E^{[A}V^{B]}$ [16]. В этих обозначениях фоновая AdS_d -геометрия, задаваемая полем $\Omega_0^{AB} = (h^A, \omega_0^{AB})$, определяется условием *нулевой кривизны* [17]

$$R^{AB}(\Omega_0) \equiv d\Omega_0^{AB} + \Omega_0^A{}_C \wedge \Omega_0^{CB} = 0. \quad (7)$$

Действие фоновой ковариантной производной на произвольный AdS_d -тензор имеет вид

$$D_0 T^{A[m]} = dT^{A[m]} + m\Omega_0^A{}_C \wedge T^{C A[m-1]}. \quad (8)$$

3. КАЛИБРОВОЧНЫЕ ПОЛЯ p -ФОРМ

Следуя общему предписанию работы [12], мы описываем двухстолбцовое поле $\phi^{(s,p)}$ (1), распространяющееся в пространстве AdS_d , в терминах калибровочного поля p -формы *реперного типа*

$$e_{(p)}^{a[s]} = e_{[\underline{m}_1 \dots \underline{m}_p]}^{[a_1 \dots a_s]} dx^{\underline{m}_1} \wedge \dots \wedge dx^{\underline{m}_p}. \quad (9)$$

Удобно заменить мировые индексы в (9) касательными:

$$e^{[a_1 \dots a_s]; [b_1 \dots b_p]} \equiv e_{[\underline{m}_1 \dots \underline{m}_p]}^{[a_1 \dots a_s]} h^{\underline{m}_1; b_1} \dots h^{\underline{m}_p; b_p}, \quad (10)$$

где $h_{\underline{m}}^a$ является фоновым полем репера на AdS_d .

При тензорном перемножении мировых и касательных индексов калибровочного поля p -формы реперного типа (9) возникает совокупность компонент

$$e^{a[s]; b[p]} \sim \bigoplus_{i=0}^p \phi^{a[s+i], b[p-i]}. \quad (11)$$

Здесь каждая тензорная компонента $\phi^{a[s+i], b[p-i]}$ соответствует диаграмме Юнга с $(s+i)$ антисимметричными индексами в первом столбце, $(p-i)$ антисимметричными индексами во втором столбце и содержит все свои следы. Удобно каждую компоненту в разложении (11) обозначить как $\phi^{(i)}$. Первая компонента при $i=0$ отождествляется с полем метрического типа $\phi^{(0)} \equiv \phi^{(s,p)}(1)$.

В принципе калибровочного поля p -формы (9) достаточно, для того чтобы построить калибровочно-инвариантный функционал действия, который правильно описывает AdS_d -динамику калибровочного поля $\phi^{(s,p)}$. Однако для того чтобы контролировать

калибровочные симметрии явным образом, следует ввести дополнительные калибровочные поля. В рассматриваемом случае подходящий набор полей — это поля $e_{(p)}^{a[s]}$ и $\omega_{(p)}^{a[s+1]}$, которые мы будем называть физической и вспомогательной p -формами [12].

$(p+1)$ -Формы абелевых кривизн, ассоциированных с физическим и вспомогательным калибровочными полями p -форм, задаются как

$$r_{(p+1)}^{a[s]} = \mathcal{D}e_{(p)}^{a[s]} + h_b \wedge \omega_{(p)}^{a[s]b}, \quad \mathcal{R}_{(p+1)}^{a[s+1]} = \mathcal{D}\omega_{(p)}^{a[s+1]} - (s+1)\lambda^2 h^a \wedge e_{(p)}^{a[s]}. \quad (12)$$

Они инвариантны относительно калибровочных преобразований с параметрами $\Lambda_{(p-1)}^{a[s]}$ и $\xi_{(p-1)}^{a[s+1]}$, являющимися $(p-1)$ -формами:

$$\delta e_{(p)}^{a[s]} = \mathcal{D}\Lambda_{(p-1)}^{a[s]} + h_b \wedge \xi_{(p-1)}^{a[s]b}, \quad \delta \omega_{(p)}^{a[s+1]} = \mathcal{D}\xi_{(p-1)}^{a[s+1]} - (s+1)\lambda^2 h^a \wedge \Lambda_{(p-1)}^{a[s]}. \quad (13)$$

В частности, структура калибровочной инвариантности (13) требует, чтобы кривизны удовлетворяли тождествам Бианки:

$$\mathcal{D}r_{(p+1)}^{a[s]} + h_b \wedge \mathcal{R}_{(p+1)}^{a[s]b} = 0, \quad \mathcal{D}\mathcal{R}_{(p+1)}^{a[s+1]} - (s+1)\lambda^2 h^a \wedge r_{(p+1)}^{a[s]} = 0. \quad (14)$$

Калибровочные преобразования (13) приводимы. Существует набор калибровочных преобразований уровня $l+2$, $0 \leq l \leq p-2$, вида

$$\begin{aligned} \delta \Lambda_{(p-l-1)}^{a[s]} &= \mathcal{D}\Lambda_{(p-l-2)}^{a[s]} + h_b \wedge \xi_{(p-l-2)}^{a[s]b}, \\ \delta \xi_{(p-l-1)}^{a[s+1]} &= \mathcal{D}\xi_{(p-l-2)}^{a[s+1]} - (s+1)\lambda^2 h^a \wedge \Lambda_{(p-l-2)}^{a[s]}. \end{aligned} \quad (15)$$

Роль калибровочных параметров сдвига $\xi_{(p-1)}^{a[s+1]}$ в преобразованиях (13) состоит в том, чтобы скомпенсировать все компоненты физического поля p -формы в (11) при $i > 0$. Это может быть легко достигнуто при разложении калибровочных параметров $\xi_{(p-1)}^{a[s+1]}$, аналогичном (11):

$$\xi_{(p-1)}^{a[s+1];b[p-1]} \sim \bigoplus_{i=0}^{p-1} \xi_{(p-1)}^{a[s+i+1];b[p-i-1]}, \quad (16)$$

в котором тензоры в правой части имеют диаграммные свойства Юнга и содержат все свои следы. Таким образом, путем фиксации калибровки, используя сдвиговые параметры $\xi_{(p-1)}^{a[s+1]}$, калибровочное поле p -формы (9) можно свести к компоненте $\phi^{(0)}$, соответствующей $i = 0$ в разложении (11), которую следует отождествить с полем метрического типа (1). Часть преобразований (13) с производными может быть проанализирована таким же способом. А именно, введем разложение калибровочных параметров $\Lambda_{(p-1)}^{a[s]}$, аналогичное (16):

$$\Lambda_{(p-1)}^{a[s];b[p-1]} \sim \bigoplus_{i=0}^{p-1} \Lambda_{(p-1)}^{a[s+i];b[p-i-1]}, \quad (17)$$

в котором тензоры в правой части имеют диаграммные свойства Юнга и содержат все свои следы. Тогда из (11) и (17) находим, что поле метрического типа $\phi^{(0)} \equiv \phi^{(s,p)}$ преобразуется как (схематически)

$$\delta\phi^{(0)} = \mathcal{D}\Lambda^{(0)}, \quad (18)$$

где калибровочный параметр $\Lambda^{(0)}$ является первой компонентой при $i = 0$ в (17) и имеет тот же тип симметрии Юнга, что и $\Lambda^{(s,p-1)}$ в (3). Как следствие (15) калибровочное преобразование (18) является приводимым вплоть до p -го уровня.

Следует отметить, что наш подход сформулирован таким образом, что только с параметром $\Lambda^{(s,p-1)}$ (3) он приводит к калибровочной симметрии, являющейся правильной симметрией для поля метрического типа $\phi^{(s,p)}$ на фоне AdS_d . Другой тип калибровочной симметрии с параметром $S^{(s,p-1)}$ (3) не имеет места в AdS_d -формулировке, а появляется в плоском пределе $\lambda = 0$. Мы обсудим это явление позже.

На лоренц-ковариантные калибровочные поля p -форм, введенные для того, чтобы описать поле смешанного типа симметрии в AdS_d , можно смотреть как на результат разложения по отношению к группе Лоренца калибровочного поля p -формы, несущей подходящее неприводимое представление AdS_d -алгебры $o(d-1, 2)$ [12]. В нашем случае поля $e_{(p)}^{a[s]}$ и $\omega_{(p)}^{a[s+1]}$ получаются из следующего калибровочного поля AdS_d p -формы:

$$\Omega_{(p)}^{A[s+1]} \sim e_{(p)}^{a[s]} \oplus \omega_{(p)}^{a[s+1]}. \quad (19)$$

С помощью компенсатора, обсуждавшегося в разделе 2, соответствие (19) принимает точный вид

$$\Omega_{(p)}^{A[s+1]} = \omega_{(p)}^{A[s+1]} + \lambda(s+1)V^A e_{(p)}^{A[s]}, \quad (20)$$

дополненный условиями поперечности

$$e_{(p)}^{A[s-1]C} V_C = 0, \quad \omega_{(p)}^{A[s]C} V_C = 0. \quad (21)$$

Появление космологического параметра λ в (20) мотивировано различными массовыми размерностями физического и вспомогательного полей p -форм, так как на уровне уравнений движения вспомогательное поле выражается через первые производные физического поля.

В AdS_d -ковариантном формализме калибровочные преобразования и кривизны при $0 \leq l \leq p-2$ задаются выражениями

$$R_{(p+1)}^{A[s+1]} = D_0 \Omega_{(p)}^{A[s+1]}, \quad \delta \Omega_{(p)}^{A[s+1]} = D_0 \xi_{(p-1)}^{A[s+1]}, \quad \delta \xi_{(p-l-1)}^{A[s+1]} = D_0 \xi_{(p-l-2)}^{A[s+1]}, \quad (22)$$

где

$$R_{(p+1)}^{A[s+1]} \sim r_{(p+1)}^{a[s]} \oplus \mathcal{R}_{(p+1)}^{a[s+1]}, \quad \xi_{(p-l-1)}^{A[s+1]} \sim \Lambda_{(p-l-1)}^{a[s]} \oplus \xi_{(p-l-1)}^{a[s+1]}, \quad (23)$$

и ковариантная производная D_0 берется по отношению к фоновой AdS_d -связности Ω_0 (см. (8)). Тожества Бианки

$$D_0 R_{(p+1)}^{A[s+1]} = 0 \quad (24)$$

являются следствиями условия нулевой кривизны $D_0^2 = 0$ (см. (7)).

Интересно отметить, что в размерностях $d = 7 \pmod{4}$ может быть наложено еще одно условие неприводимости на касательные индексы. Возникает условие дуальности, если касательная $so(d-1, 2)$ диаграмма Юнга является столбцом максимальной высоты $s+1 = (d-1)/2 + 1$, дуальная к которой может быть построена с использованием символа Леви-Чивита,

$$\Omega_{(p) A[s+1]} = \pm \frac{1}{(s+1)!} \epsilon_{A[s+1] B[s+1]} \Omega_{(p)}^{B[s+1]}. \quad (25)$$

Это условие разлагает $\Omega_{(p)}^{A[s+1]}$ на самодуальную и антисамодуальную составляющие и дает следующее соотношение между лоренц-ковариантными полями p -форм:

$$\omega_{(p)}^{a[s+1]} = \pm \frac{\lambda}{s!} \epsilon^{a[s+1] b[s]} e_{(p), b[s]}. \quad (26)$$

Такая кинематическая связь может быть использована для того, чтобы выразить вспомогательное поле через физическое или наоборот. В этом случае уравнения движения будут первого порядка. Отметим, что в размерностях $d = 5 \pmod{4}$ условие дуальности также может быть наложено, однако поле $\Omega_{(p)}^{A[s+1]}$ с необходимостью становится комплексным. Аналогичный феномен обсуждался для массивных антисимметричных тензорных полей на плоском фоне в работе [18] и был назван самодуальностью в нечетных размерностях. В AdS_d -теории роль массы играет космологический параметр λ .

4. ДИНАМИКА

Далее мы строим действия полей высших спинов, которые правильно описывают свободную динамику полей метрического типа $\phi^{(s,p)}$ на фоне пространства AdS_d . В работе [12] было предложено искать свободные действия для полей смешанного типа симметрии в форме Мак Дауэлла–Манзури [19]. В нашем случае наиболее общее действие имеет вид

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_2 = & \frac{\kappa_1}{\lambda^2} \int_{\mathcal{M}_d} H_{A[2p+2]} \wedge R_{(p+1)}^{A[p+1] B[s-p]} \wedge R_{(p+1) B[s-p]}^{A[p+1]} + \\ & + \frac{\kappa_2}{\lambda^2} \int_{\mathcal{M}_d} H_{A[2p+2]} \wedge R_{(p+1)}^{A[p+1] B[s-p-1] C} \wedge R_{(p+1) B[s-p-1]}^{A[p+1]} {}^D V_C V_D, \end{aligned} \quad (27)$$

в котором используется обозначение

$$H_{A[m]} = \epsilon_{A_1 \dots A_m B_{m+1} \dots B_{d+1}} h^{B_{m+1}} \wedge \dots \wedge h^{B_d} V^{B_{d+1}}, \quad (28)$$

а $\kappa_{1,2}$ суть произвольные безразмерные константы. Произвол в выборе $\kappa_{1,2}$ может быть устранен с точностью до общего множителя перед действием (27) путем добавления члена с полной производной

$$\mathcal{O} = \int_{\mathcal{M}_d} d(H_{A[2p+3]} \wedge R_{(p+1)}^{A[p+2] B[s-p-1]} \wedge R_{(p+1) B[s-p-1]}^{A[p+1]} {}^C V_C). \quad (29)$$

Отметим, что вид действия накладывает естественное ограничение $p \leq [(d-2)/2]$, в то время как s не ограничено. Заманчиво предположить, что при $s > \nu_{\text{AdS}}$ действие (27) приводит к дуальным формулировкам двухстолбцовых полей метрического типа в AdS_d .

Вариация действия (27) приводит к уравнениям движения

$$\epsilon^{A[p+1]}{}_{B[p+1]C[d-2p-1]} h^{C_1} \wedge \dots \wedge h^{C_{d-2p-1}} \wedge R^{A[s-p]B[p+1]}{}_{(p+1)} = 0. \quad (30)$$

Для того чтобы прояснить динамическое содержание этих уравнений, удобно проводить анализ в терминах лоренц-ковариантных компонент. Для этого введем разложение тензоров кривизны (12), аналогичное (11),

$$r^{a[s];b[p+1]} \sim \bigoplus_{i=0}^{p+1} r^{a[s+i],b[p-i+1]}, \quad (31)$$

$$\mathcal{R}^{a[s+1];b[p+1]} \sim \bigoplus_{i=0}^{p+1} \mathcal{R}^{a[s+i+1],b[p-i+1]}, \quad (32)$$

в котором тензоры в правых частях имеют диаграммные свойства Юнга и содержат все свои следы. Прямым вычислением можно показать, что уравнения (30) могут быть приведены к виду

$$\begin{aligned} p < s: \quad r^{a[s]}{}_{(p+1)} &= h_{b_1} \wedge \dots \wedge h_{b_{p+1}} T^{a[s],b[p+1]}, \\ p = s: \quad r^{a[s]}{}_{(p+1)} &= 0 \end{aligned} \quad (33)$$

и

$$p \leq s: \quad \mathcal{R}^{a[s+1]}{}_{(p+1)} = h_{b_1} \wedge \dots \wedge h_{b_{p+1}} C^{a[s+1],b[p+1]} \quad (34)$$

с произвольными бесследовыми 0-формами $T^{a[s],b[p+1]}$ и $C^{a[s+1],b[p+1]}$, соответствующими двухстолбцовым диаграммам Юнга. Все остальные компоненты кривизн (31), (32) равны нулю. Следует заметить, что бесследовость для $T^{a[s],b[p+1]}$ требуется только при $\lambda \neq 0$ (это следует из тождеств Бианки):

$$\lambda T^{a[s-1]c,b[p]d} \eta_{cd} = 0. \quad (35)$$

Мы обсудим роль этого условия в конце раздела.

В случае $p = s$, который соответствует физическому полю метрического типа, описываемому прямоугольной диаграммой Юнга, 0-форма C является *примарным* тензором Вейля [12]. Он параметризует те компоненты кривизн, которые не равны нулю на массовой поверхности и не могут быть выражены через производные других компонент кривизны. В случае, когда физическое поле метрического типа описывается непрямоугольной диаграммой Юнга с $p < s$, примарным тензором Вейля является 0-форма T , а 0-форма C есть *вторичный* тензор Вейля, выражающийся через первые производные примарного тензора Вейля T на основе тождеств Бианки [12]. Структура тензоров

Вейля, как первичного, так и вторичного, находится в согласии с диаграммными свойствами инвариантных тензоров кривизны, найденных в работе [6] в рамках нелокальной формулировки динамики свободных полей высших спинов в пространстве Минковского.

Обратимся теперь к подробному анализу уравнений (33), (34). По аналогии с (11) введем разложение p -формы вспомогательного поля

$$\omega^{a[s+1];b[p]} \sim \bigoplus_{i=0}^p \omega^{a[s+i+1],b[p-i]}. \quad (36)$$

Тогда все компоненты $\omega^{(i)}$ вспомогательного поля p -формы (36) могут быть выражены через первые производные компонент $\phi^{(i)}$, $0 \leq i \leq p$, физического поля p -формы, что схематически можно записать как

$$\omega^{(i)} = \mathcal{D}\phi^{(i)} + \mathcal{D}\phi^{(i+1)}, \quad 0 \leq i \leq p. \quad (37)$$

Это выражение следует из того факта, что вспомогательное поле входит в физическую кривизну (12) без производных, и уравнения (33) являются линейными однородными уравнениями по отношению к компонентам вспомогательного поля p -формы. Отметим, что при $p < s$ компонента кривизны $T^{a[s],b[p+1]}$ не равна нулю и не содержит компонент вспомогательного поля p -формы (36). Поэтому число линейных однородных уравнений (33) в точности совпадает с числом компонент вспомогательной p -формы. Другими словами, выражение (33) является связью, которая позволяет выразить вспомогательное поле через производные физические поля.

Как обсуждалось в разделе 3, характерная черта калибровочного параметра $\xi_{(p-1)}^{a[s+1]}$ состоит в том, что он входит в калибровочные преобразования (13) алгебраически для физического поля p -формы и через производную для вспомогательного поля p -формы. Из (16) следует, что калибровочные преобразования (13) могут быть приведены к виду

$$\begin{aligned} \delta\phi^{(i)} &= \xi^{(i-1)}, & 1 \leq i \leq p, \\ \delta\omega^{(j)} &= \mathcal{D}\xi^{(j)} + \mathcal{D}\xi^{(j-1)}, & 0 \leq j \leq p. \end{aligned} \quad (38)$$

Объединяя эти выражения с (37), находим, что, положив равными нулю все избыточные компоненты физического поля p -формы путем фиксации калибровки, можно выразить вспомогательное поле через физическое как

$$\omega^{(0)} = \mathcal{D}\phi^{(0)}. \quad (39)$$

Вследствие соотношений (34) динамические уравнения движения второго порядка на физическое поле метрического типа $\phi^{(s,p)}$ возникают как след компоненты кривизны $\mathcal{R}^{(0)}$ (32)

$$\mathcal{R}^{a[s]c, c b[p]} = 0, \quad (40)$$

в которой вспомогательное поле выражено через первые производные физического согласно (39). Очевидно, что тензор в левой части (40) имеет тот же тип симметрии Юнга, что и поле метрического типа $\phi^{(s,p)}$.

Для того чтобы найти точный вид динамических уравнений движения, мы упрощаем наши вычисления, вводя операторы рождения и уничтожения $\alpha_i^a, \bar{\alpha}_j^b$, $i, j = 1, 2$, определенные на фокковском вакууме

$$\bar{\alpha}_i^c |0\rangle = 0 \quad (41)$$

и удовлетворяющие алгебре

$$\{\bar{\alpha}_i^a, \alpha_j^b\} = \delta_{ij} \eta^{ab}, \quad \{\alpha_i^a, \alpha_j^b\} = 0, \quad \{\bar{\alpha}_i^a, \bar{\alpha}_j^b\} = 0. \quad (42)$$

В обозначениях фокковского пространства поля метрического типа задаются в виде

$$|\phi\rangle = \phi_{[a_1 \dots a_s], [b_1 \dots b_p]} \alpha_1^{a_1} \dots \alpha_1^{a_s} \alpha_2^{b_1} \dots \alpha_2^{b_p} |0\rangle. \quad (43)$$

Следующие обозначения удобны при вычислениях:

$$\begin{aligned} L_{ij} &= \bar{\alpha}_i^a \bar{\alpha}_{ja}, & T_{ij} &= \alpha_i^a \bar{\alpha}_{ja}, & N_{ij} &= \alpha_i^a \alpha_{ja}, \\ D_i &= \alpha_i^a \mathcal{D}_a, & \bar{D}_i &= \bar{\alpha}_i^a \mathcal{D}_a. \end{aligned} \quad (44)$$

Вектор $|\phi\rangle$ удовлетворяет условиям

$$T_{12}|\phi\rangle = 0, \quad T_{11}|\phi\rangle = s_1|\phi\rangle, \quad T_{22}|\phi\rangle = s_2|\phi\rangle, \quad (45)$$

отражающим его диаграммные свойства.

Физическое поле метрического типа (1), выраженное через поле p -формы (9) $|e\rangle = e_{[a_1 \dots a_s]; [b_1 \dots b_p]} \alpha_1^{a_1} \dots \alpha_1^{a_s} \alpha_2^{b_1} \dots \alpha_2^{b_p} |0\rangle$, имеет вид

$$|\phi\rangle = \sum_{k=0}^p (-1)^k \frac{(s-k)!}{k!} \alpha_1^{a_1} \dots \alpha_1^{a_k} \alpha_2^{b_1} \dots \alpha_2^{b_k} \bar{\alpha}_{1b_1} \dots \bar{\alpha}_{1b_k} \bar{\alpha}_{2a_1} \dots \bar{\alpha}_{2a_k} |e\rangle. \quad (46)$$

С помощью операторов (44) вспомогательное поле (39) и калибровочные преобразования (18) приобретают вид

$$|\omega\rangle = D_1|\phi\rangle, \quad (47)$$

$$\delta|\phi\rangle = \left(D_2 - \frac{1}{s-p+1} D_1 T_{21} \right) |\Lambda\rangle. \quad (48)$$

Компонента $i = 0$ в разложении (32) есть

$$|\mathcal{R}^{(0)}\rangle = \left(D_2 - \frac{1}{s-p+1} D_1 T_{21} \right) |\omega\rangle - \lambda^2 (s-p+2) N_{12} |\phi\rangle. \quad (49)$$

Подставляя выражение для вспомогательного поля (47) в кривизну (49) и вычисляя след $L_{12}|\mathcal{R}^{(0)}\rangle = 0$ (40), мы находим уравнение движения

$$(D^2 - D_1 \bar{D}_1 - D_2 \bar{D}_2 - D_1 D_2 L_{12} + \lambda^2 N_{12} L_{12} + \lambda^2 (d(p-1) + 2p - p^2 + s)) |\phi\rangle = 0. \quad (50)$$

Ковариантный оператор Даламбера $\mathcal{D}^2$ задается формулой (6).

В калибровке $\bar{D}_i|\phi\rangle = 0$ и $L_{12}|\phi\rangle = 0$ мы получаем уравнение

$$(\mathcal{D}^2 + \lambda^2(d(p-1) + 2p - p^2 + s))|\phi\rangle = 0. \quad (51)$$

Чтобы сравнить это уравнение с уже известными результатами, мы воспроизводим следующие уравнения высших спинов из работы [7], записанные в ковариантной калибровке, для произвольных безмассовых полей смешанного типа симметрии $\phi^{(h_1, \dots, h_\nu)}$, соответствующих AdS_d -представлениям $D(E_0, \mathbf{s})$ с энергией E_0 , лежащей на границе унитарности, и спином $\mathbf{s} = (h_1, \dots, h_\nu)$:

$$\left(\mathcal{D}^2 - \lambda^2(h_k - k - 1)(h_k - k - 2 + d) + \lambda^2 \sum_{l=1}^{\nu} h_l \right) \phi^{(h_1, \dots, h_\nu)} = 0. \quad (52)$$

Здесь h_l – длины строк соответствующей бесследовой $o(d-1)$ диаграммы Юнга, $\nu \equiv \nu_{\text{AdS}}$ – ранг $o(d-1)$, h_k – длина верхнего прямоугольного блока, k – номер нижней строки в этом блоке, т.е. k – высота блока. Случаю двухстолбцовых диаграмм Юнга соответствуют значения

$$k = p, \quad h_k = 2, \quad h_l = \begin{cases} 2, & 1 \leq l \leq p, \\ 1, & p < l \leq s. \end{cases} \quad (53)$$

Подставляя эти значения в (52), мы действительно приходим к уравнению (51).

Следует отметить, что уравнения (52) справедливы в четных размерностях для любого h_l и в нечетных размерностях при $h_{(d-1)/2} = 0$ [7] и не должны считаться заведомо справедливыми для самодуальных и антисамодуальных представлений, которые появляются при ненулевых значениях $\pm h_{(d-1)/2}$. В нашей формулировке $h_{(d-1)/2}$ может принимать ненулевые значения и входит в теорию только как $|h_{(d-1)/2}|$. Мы считаем, что наши уравнения описывают сумму неприводимых представлений с $-h_{(d-1)/2}$ и $+h_{(d-1)/2}$.

Обсудим теперь плоский предел $\lambda = 0$ полевого уравнения (50). Оказывается, что в дополнение к симметрии, определенной выражением (48), появляется новая симметрия $\delta|\phi\rangle = \partial_1|S\rangle$, в результате чего общие калибровочные преобразования принимают вид

$$\delta|\phi\rangle = \partial_1|S\rangle + \left(\partial_2 - \frac{1}{s-p+1} \partial_1 T_{21} \right) |\Lambda\rangle, \quad (54)$$

в котором фоковский вектор $|S\rangle$ ассоциирован с тензором $S^{(s-1,p)}$ (3) и операторы ∂_i получены из D_i (44) заменой $\mathcal{D}^a \rightarrow \partial^a$. Можно непосредственно убедиться в том, что уравнение (50) действительно является инвариантным относительно калибровочных преобразований (54) с параметром $|S\rangle$ при $\lambda = 0$. Однако простейший способ доказать эту инвариантность состоит в том наблюдении, что вспомогательное поле, будучи выраженным через физическое, является инвариантным выражением по отношению к $\delta|\phi\rangle = \partial_1|S\rangle$. Следовательно, эта дополнительная инвариантность справедлива для уравнений движения на плоском фоне.

Отметим, что, начиная с уравнения движения (50), можно развить расширенную теорию в пространстве AdS_d , которая реализует отсутствующую симметрию $|S\rangle$ как симметрию Штюкельберга [8]. Для этого в уравнении движения (50) следует выполнить сдвиг $|\phi\rangle \rightarrow |\phi\rangle + D_1|\chi\rangle$, где $|\chi\rangle$ имеет совпадающий с $|S\rangle$ тип симметрии Юнга. Помимо своих собственных симметрий с производными поле Штюкельберга $|\chi\rangle$ будет преобразовываться как $\delta|\chi\rangle = \lambda|S\rangle$. Получившееся уравнение движения на поля $|\phi\rangle$ и $|\chi\rangle$ будет инвариантным относительно восстановленной симметрии с параметрами $|\Lambda\rangle$ и $|S\rangle$. Для того чтобы получить уравнение для поля Штюкельберга $|\chi\rangle$, следует произвести тот же самый сдвиг в тензоре $\lambda \text{tr}|T\rangle = 0$ (35). В результате получится уравнение второго порядка для поля Штюкельберга, содержащее слагаемые первого порядка по полю $|\phi\rangle$. После этого роль условия (35) становится совершенно ясной. Это есть дифференциальное условие (тождество Нётер) для остаточной симметрии с параметром $|S\rangle$ (более детальное обсуждение содержится в [8]). В плоском пределе уравнения становятся диагональными по отношению к полям $|\phi\rangle$ и $|\chi\rangle$ и описывают сумму двух независимых полей высших спинов.

5. ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

В данной работе мы описали поля высших спинов в пространстве AdS_d , соответствующие произвольным двухстолбцовым диаграммам Юнга. Наш подход является частной реализацией общей схемы для произвольного поля смешанного типа симметрии, предложенной в работе [12]. Метод использует набор p -форм с антисимметричными касательными индексами, имеющих различную динамическую интерпретацию. Различают физическое и вспомогательное поля, причем вспомогательное поле выражается через физическое с помощью своих уравнений движения. Система обладает правильной калибровочной симметрией в пространстве AdS и приводит к дополнительной симметрии в плоском пределе $\lambda = 0$.

В заключение отметим, что плоский предел функционала действия (27) может приводить к дуальным описаниям полей высших спинов в пространстве Минковского [5], [13]–[15]. Частным примером является поле в AdS_5 , заданное трехклеточной диаграммой Юнга типа “крюка”. В плоском пределе безмассовое поле типа “крюка” распадается на пару безмассовых полей спина 2, что объясняется тем фактом, что все безмассовые поля в пятимерном пространстве Минковского исчерпываются полностью симметричными полями. Как легко видеть из уравнения (50) (см. также работу [12]), эти безмассовые поля спина 2 формулируются в терминах дуальных переменных [1], [13], [15]. В частности, тензоры кривизны (33) и (34) становятся связанными преобразованием дуальности [13].

Благодарности. Я признателен М. А. Васильеву и О. В. Шейнкману за полезные обсуждения. Я благодарен О. В. Шейнкману за внимательное прочтение рукописи статьи и полезные замечания. Работа поддержана грантами РФФИ № 02-02-16944, МАС РФФИ № 03-02-06462, НШ 1578.2003.2 и фондом Ландау (Юлих, Германия).

Список литературы

- [1] *T. Curtright.* Phys. Lett. B. 1985. V. 165. P. 304.
- [2] *C. S. Aulakh, I. G. Koh, S. Ouvry.* Phys. Lett. B. 1986. V. 173. P. 284.
- [3] *J. M. F. Labastida, T. R. Morris.* Phys. Lett. B. 1986. V. 180. P. 101; *J. M. F. Labastida.* Phys. Rev. Lett. 1987. V. 58. P. 531; Nucl. Phys. B. 1989. V. 322. P. 185.
- [4] *W. Siegel, B. Zwiebach.* Nucl. Phys. B. 1987. V. 282. P. 125; *Č. Burdik, A. Pashnev, M. Tsulaia.* Mod. Phys. Lett. A. 2001. V. 16. P. 731; hep-th/0101201; Nucl. Phys. B. Proc. Suppl. 2001. V. 102. P. 285; hep-th/0103143.
- [5] *X. Bekaert, N. Boulanger.* Commun. Math. Phys. 2004. V. 245. P. 27; hep-th/0208058; Phys. Lett. B. 2003. V. 561. P. 183; hep-th/0301243.
- [6] *P. de Medeiros, C. Hull.* JHEP. 2003. V. 0305. P. 019; hep-th/0303036.
- [7] *R. R. Metsaev.* Phys. Lett. B. 1995. V. 354. P. 78; Phys. Lett. B. 1998. V. 419. P. 49; hep-th/9802097; Arbitrary spin massless bosonic fields in d -dimensional anti-de Sitter space. Talk given at International Seminar on Supersymmetries and Quantum Symmetries, Dedicated to the Memory of Victor I. Ogievetsky (Dubna, Russia, 22–26 July 1997); hep-th/9810231.
- [8] *L. Brink, R. R. Metsaev, M. A. Vasiliev.* Nucl. Phys. B. 2000. V. 586. P. 183; hep-th/0005136.
- [9] *R. R. Metsaev.* Phys. Lett. B. 2002. V. 531. P. 152; hep-th/0201226; *T. Biswas, W. Siegel.* JHEP. 2002. V. 0207. P. 005; hep-th/0203115.
- [10] *Yu. M. Zinoviev.* On massive mixed symmetry tensor fields in Minkowski space and (A)dS. hep-th/0211233.
- [11] *Yu. M. Zinoviev.* First order formalism for mixed symmetry tensor fields. hep-th/0304067.
- [12] *K. B. Alkalaev, O. V. Shaynkman, M. A. Vasiliev.* On the frame-like formulation of mixed-symmetry massless fields in $(A)dS_d$. hep-th/0311164.
- [13] *C. Hull.* JHEP. 2001. V. 0109. P. 027; hep-th/0107149.
- [14] *P. de Medeiros, C. Hull.* Commun. Math. Phys. 2003. V. 235. P. 255; hep-th/0208155.
- [15] *N. Boulanger, S. Cnockaert, M. Henneaux.* JHEP. 2003. V. 0306. P. 060; hep-th/0306023.
- [16] *K. Stelle, P. West.* Phys. Rev. D. 1980. V. 21. P. 1466; *C. R. Preitschopf, M. A. Vasiliev.* The superalgebraic approach to supergravity. In: Proc. 31th Intern. Ahrenshoop Symp. on the Theory of Elementary Particles (Buckow, September 2–6, 1997). Eds. H. Dorn, D. Lüst, G. Weigt. Berlin: Wiley-VCH, 1998. P. 496; hep-th/9805127.
- [17] *M. A. Vasiliev.* Higher spin gauge theories: star-product and AdS space. In: Many Faces of the Superworld. Yuri Golfand Memorial Volume. Ed. M. Shifman. Singapore: World Scientific, 2000. P. 533; hep-th/9910096; Int. J. Mod. Phys. D. 1996. V. 5. P. 763; hep-th/9611024.
- [18] *P. K. Townsend, K. Pilch, P. van Nieuwenhuizen.* Phys. Lett. B. 1984. V. 136. P. 38; Addendum. V. 137. P. 443.
- [19] *V. E. Lopatin, M. A. Vasiliev.* Mod. Phys. Lett. A. 1988. V. 3. P. 257; *S. W. MacDowell, F. Mansouri.* Phys. Rev. Lett. 1977. V. 38. P. 739; Erratum. P. 1376; *F. Mansouri.* Phys. Rev. D. 1977. V. 16. P. 2456.

Поступила в редакцию 12.I.2004 г.