Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Л. А. Пальцев, Об уравнениях переноса при медленных течениях многоатомного газа во внешнем магнитном поле, *ТМФ*, 1997, том 110, номер 3, 459–469

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf982>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.239.49.27

26 апреля 2023 г., 16:29:44

Л. А. Пальцев*

ОБ УРАВНЕНИЯХ ПЕРЕНОСА ПРИ МЕДЛЕННЫХ ТЕЧЕНИЯХ МНОГОАТОМНОГО ГАЗА ВО ВНЕШНЕМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

Методами квантовой кинетической теории получены уравнения переноса при медленных течениях многоатомного газа во внешнем переменном во времени магнитном поле. Показано, что медленно изменяющиеся во времени локальные макроскопические переменные подчиняются системе зацепляющихся уравнений. Получены оператор Вигнера и тензор напряжений в барнеттовском приближении. Определены зависящие от частоты магнитного поля коэффициенты переноса.

Известно [1–4], что уравнения газовой динамики как для одноатомного, так и для многоатомного газа в постоянном внешнем магнитном поле, пространственная неоднородность которых характеризуется малым параметром $\mu = a\tau/l$, получаются из кинетических уравнений методом Чепмена–Энскога или методом Боголюбова, только когда $\mu \ll u/a \ll 1/\mu$. Здесь обозначены характерные относительная скорость между молекулами через a , время свободного пробега молекул τ , масштаб пространственной неоднородности газа l и локальная средняя скорость молекул u . Неравновесные состояния газа в этом случае описываются функцией распределения или оператором Вигнера, которые вне кнудсеновского слоя зависят от пространственных координат и времени только через газодинамические переменные, которые подчиняются замкнутой системе уравнений. Отметим, что в этих методах локальные макроскопические переменные целиком определяются нулевым по μ приближением для функции распределения или оператора Вигнера.

Что касается неравновесных состояний пространственно неоднородных одноатомного и многоатомного газов при $\mu \ll 1$, но при $u \lesssim \mu a$ или $u \gtrsim a/\mu$, то в этих случаях нельзя воспользоваться указанными выше методами решения кинетических уравнений. В частности, при $u \lesssim \mu a$ возникает проблема определения локальной средней скорости молекул как газодинамической переменной – функции, медленно изменяющейся за время свободного пробега молекул.

Течения многоатомного газа со скоростью u по порядку величины меньше μa реализуются в эффекте Скотта [5, 6]. Они рассматривались при объяснении эффекта термомагнитной разности давлений (см., например, [7]). Так, при относительном перепаде температур $T^* = \Delta T/T$ между коаксиальными цилиндрами в эффекте Скотта и между стенками плоского канала в эффекте термомагнитной разности давлений имеем скорость $u \simeq \mu \kappa^2 a T^*$ и число Рейнольдса $Re = \kappa^2 T^*$, где κ – параметр несферичности

* Центральный аэрогидродинамический институт им. Н. Е. Жуковского

межмолекулярного взаимодействия [8]. Отметим, что здесь в отличие от случая, когда $u \gg \mu a$, скорость температурного скольжения оказывается одного порядка по величине со средней скоростью в основном поле течения.

При $\kappa \simeq 1$ и $T^* \simeq 1$ в этих эффектах могут быть реализованы течения с локальной средней скоростью $u \simeq \mu a$ и числом Рейнольдса $Re \simeq 1$. Возможные эффекты при стационарных течениях одноатомных газов и плазмы с такими скоростью и числом Рейнольдса (медленные неизотермические течения) рассматривались в ряде работ, обзор которых дан в [9], и в работе [10]. Однако при вычислении сил, действующих на обтекаемые тела в [9], и момента сил в эффекте Скотта в [11] использовались уравнения газовой динамики в барнеттовском приближении, полученные методом Чепмена–Энскога.

В данной работе кинетическое уравнение для оператора Вигнера, описывающего неравновесные состояния многоатомного газа во внешнем переменном во времени магнитном поле с частотой $\omega \simeq 1/\tau$, решается при $u/a \simeq \mu \ll 1$ методом, предложенным в работе [12], который можно рассматривать как не традиционное изложение метода Боголюбова. Показано, что медленно изменяющиеся во времени локальные макроскопические переменные – коэффициенты разложения плотности числа молекул, локальной температуры и локальной средней скорости молекул в ряд по μ – подчиняются системе зацепляющихся уравнений. Получены уравнения этой системы, оператор Вигнера и тензоры вязких и температурных напряжений в барнеттовском приближении. Определены коэффициенты теплопроводности и вязкости, а также кинетические коэффициенты линейных и нелинейных температурных напряжений, зависящие от частоты магнитного поля.

1. Рассмотрим пространственно неоднородный многоатомный газ во внешнем магнитном поле $\mathbf{B}(t) = \mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_1 \cos \omega t + \mathbf{B}_2 \sin \omega t$, частота которого ω , а также частоты внутримолекулярных процессов ω_k ($k = 0, 1, 2$), обусловленные взаимодействием молекулы с постоянными полями с напряженностью $\mathbf{B}_k$ и равные $1/\tau$ по порядку величины. Представим, как и в [13], гамильтониан, например, j -й молекулы в виде суммы операторов $H(j)$ и $\Delta H(j)$, соответствующих внутримолекулярным процессам с частотами, большими или равными $1/\varepsilon\tau$ и меньшими или равными $1/\tau$, где ε – параметр разреженности газа. В этом случае неравновесные состояния газа описываются оператором Вигнера $f(1, t)$, который является функцией распределения в фазовом пространстве поступательного движения молекулы $(\mathbf{r}, \mathbf{p}_1)$ и оператором в пространстве собственных векторов $|1\rangle$ оператора $H(1)$, соответствующих энергии E_1 . Для этого оператора, следуя [13], получаем в приближении парных столкновений кинетическое уравнение

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} + \frac{i}{\hbar} [\Delta H(1; \mathbf{B}(t)); f_1] + \frac{\mu}{m} p_1^k \nabla_k f_1 = J(1; f) = \int d2 I(12) f_1 f_2, \quad (1.1)$$

здесь $f_j = U_j f(j, t) U_j^{-1}$, где $U_j = \exp(iH(j)t/\hbar)$;

$$\Delta H(1; \mathbf{B}(t)) = \sum_{11'} \Delta(E_1 - E_{1'}) |1\rangle \Delta H(1) \langle 1'|,$$

где $\sum_j$ – сумма по квантовым числам состояния $|j\rangle$, $\Delta(E) = 1$ при $E = 0$ и $\Delta(E) = 0$ при E , отличном от нуля; $\nabla_k = \partial/\partial r^k$; $[\dots; \dots]$ – коммутатор; m – масса молекулы; по повторяющимся индексам проводится суммирование; локальный интеграл парных

столкновений $J(1; f)$ и соответственно двухчастичный супероператор $I(12)$ определяются в (1.2) в работе [14]; $\int dj \dots = \text{Tr} \int d\mathbf{p}_j \dots$, где $\text{Tr}_{(j)}$ – след по состояниям $|j\rangle$. Параметр μ в (1.1) поставлен только для указания порядка вклада соответствующего члена в изменение операторов Вигнера за время свободного пробега молекул.

Плотность числа молекул $n = n(\mathbf{r}, t)$, плотность внутренней (поступательной и внутренней) энергии молекул $E = E(\mathbf{r}, t)$ и локальная средняя скорость молекул $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ определяются формулами

$$\begin{aligned} n &= \langle 1 \rangle, \\ E &= \langle \varepsilon(p) \rangle - \frac{1}{2} \rho u^2, \\ \mathbf{u} &= \frac{1}{\rho} \langle \mathbf{p} \rangle, \end{aligned} \quad (1.2)$$

где $\langle a \rangle = \int d1 a(1) f(1, t)$, $\varepsilon_j(p) = p_j^2/2m + H(j)$, $\rho = mn$.

Из (1.1) с учетом (1.2) получаем уравнения переноса массы, энергии и импульса

$$\begin{aligned} \frac{\partial n}{\partial t} &= -\mu u^* \nabla_j n u^j, \\ \frac{\partial E}{\partial t} &= -\mu \left(\nabla_j Q^j - u^* u^j \nabla_k P^{jk} + \frac{1}{2} (u^* u)^2 \nabla_j \rho u^j \right), \\ \frac{\partial u^j}{\partial t} &= -\frac{\mu}{\rho u^*} (\nabla_k P^{jk} + \mu u^* u^j \nabla_k \rho u^k), \end{aligned} \quad (1.3)$$

где плотность потока энергии $Q^j = Q^j(\mathbf{r}, t)$ и тензор плотности потока импульса $P^{jk} = P^{jk}(\mathbf{r}, t)$ определяются формулами

$$\begin{aligned} Q^j &= \frac{1}{m} \langle p^j \varepsilon(p) \rangle, \\ P^{jk} &= \frac{1}{m} \langle p^j p^k \rangle. \end{aligned} \quad (1.4)$$

В (1.3) параметр μ и характерная относительная средняя скорость молекул $u^* = u/a$ поставлены только для указания порядка вклада соответствующих членов в изменение n , E и $\mathbf{u}$ за время свободного пробега.

При $\mu \ll 1$ и фиксированной $u^* \gg \mu$, решая кинетическое уравнение (1.1) в случае постоянного магнитного поля методом Чепмена–Энскога или методом Боголюбова в традиционном изложении, мы можем найти тензор напряжений и поток тепла – диссипативную часть потока – и получить замкнутую систему уравнений газовой динамики в любом приближении по μ (см., например, эти уравнения в барнеттовском приближении в [4]). Однако при $u^* \simeq \mu \ll 1$, как следует из последнего уравнения системы (1.3), локальную среднюю скорость молекул нельзя в общем случае рассматривать как газодинамическую переменную – функцию, медленно изменяющуюся за время свободного пробега молекул, и, следовательно, нельзя воспользоваться указанными выше методами решения кинетического уравнения (1.1). В данной работе для решения кинетического уравнения (1.1) при $u^* \simeq \mu \ll 1$ воспользуемся методом, предложенным в работе [12].

Следуя [12], определим оператор Вигнера, плотность числа молекул, плотность энергии и локальную среднюю скорость молекул как функции $t_0 = t$, $t_1 = t/\mu$, $t_2 = t/\mu^2$, $\dots$, где t измеряется в масштабе времени свободного пробега молекул. Будем искать решение уравнений (1.1) и (1.3) в виде

$$\begin{aligned} f_1 &= f^{(0)}(1) + \mu f^{(1)}(1) + \mu^2 f^{(2)}(1) + \dots, \\ x &= x^{(0)} + \mu x^{(1)} + \mu^2 x^{(2)} + \dots, \end{aligned} \quad (1.5)$$

здесь $x = (n, E, \mathbf{u})$, $f^{(s)}(1) = f^{(s)}(1, t_0, t_1, \dots)$ и аналогично для $x^{(s)} = (n^{(s)}, E^{(s)}, \mathbf{u}^{(s)})$, определяемых через $f^{(s)}(1)$ по формулам (1.2), где учитывается, что $\mathbf{u}^{(0)} = 0$. Ниже вместо плотности энергии введем локальную температуру $T = T(\mathbf{r}, t)$, измеряемую в энергетических единицах, которую определим по формуле

$$E = \left(\frac{3}{2}T + e \right) n = \mathcal{E}nT,$$

где средняя энергия на молекулу $e = T^2 d \ln Z / dT$, $Z = \text{Tr} \exp(-H(1)/T)$.

Учитывая правило дифференцирования сложной функции и (1.5), из (1.3) и (1.1) находим

$$\begin{aligned} \frac{\partial x(s; 0)}{\partial t} &= X^{(s)}, \\ \frac{df_k(1; s, 0)}{dt} + iL(k; \omega)f_k^{(s)}(1) - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{s-1} \sum_{l=1}^2 \int d2 I(12) f_0^{(j)}(l) f_k^{(s-j-1)}(3-l) &= \\ = \sum_{l=1}^2 \int d2 I(12) f_0^{(0)}(l) f_k^{(s)}(3-l), \quad s = 0, 1, 2, \dots, \end{aligned} \quad (1.6)$$

где

$$\begin{aligned} \frac{\partial a(s-j, j)}{\partial t} &= \frac{\partial a^{(s-j)}}{\partial t_j} + \frac{\partial a^{(s-j-1)}}{\partial t_{j+1}} + \dots + \frac{\partial a^{(0)}}{\partial t_s}, \\ \frac{da(s-j, j)}{dt} &= \frac{\partial a(s-j, j)}{\partial t} + \frac{1}{m} p_1^k \nabla_k a^{(s-j-1)}; \\ f_k^{(s)}(1) &= \exp(ik\omega t_0) f_k^{(s)}(1), \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots; \\ L(k; \omega) f_k(1) &= k\omega f_k(1) + \frac{1}{\hbar} \sum_{q=-1}^1 [\Delta H(1; \mathbf{B}_q); f_{k-q}(1)], \\ \mathbf{B}_q &= \delta_{q0} \mathbf{B}_0 + \frac{q}{2} (q\mathbf{B}_1 + i\mathbf{B}_2); \end{aligned}$$

источники $X^{(s)}$ находим из (1.3), учитывая (1.5).

Согласно [12] уравнения для медленно изменяющихся во времени локальных макроскопических переменных – коэффициентов разложения плотности числа молекул, локальной температуры и локальной средней скорости молекул и вигнеровских операторов, определяющих плотности потоков импульса и энергии, получаем из условия отсутствия секулярных членов в $x^{(s)}$ и $f_k^{(s)}(1)$ при $s = 0, 1, \dots$.

2. В нулевом приближении из (1.6) находим, что $n^{(0)}$ и $T^{(0)}$ не зависят от “быстрого” времени t_0 . Аналогично [15], учитывая (1.2) и (1.5), получаем $f_k^{(0)}(1, t_1) = \delta_{k0} f_T(1)$, где оператор Максвелла–Больцмана имеет вид

$$f_T(1) = n \exp(-\varepsilon_1(p)/T) / Z(2\pi mT)^{3/2},$$

здесь и везде ниже $n = n^{(0)}$ и аналогично для T ; функция $a(t_j)$ есть $a(t_0, t_1, \dots)$ при $t_0 \rightarrow \infty, \dots, t_{j-1} \rightarrow \infty$.

В первом приближении из условия отсутствия секулярных членов в $x^{(1)}$ находим, что n и T не зависят от t_1 , $n^{(1)}$ не зависит от t_0 , поток энергии $Q^{(0)j}(t_1) = 0$, тензор напряжений $P^{(0)ij}(t_1) = \delta_{ij}p$, где давление $p = nT$ должно удовлетворять условию

$$\nabla_j p = 0. \quad (2.1)$$

Введем вигнеровские операторы

$$\varphi_k^{(s)}(1, t_j) = \rho_1^{-1} f_k^{(s)}(1, t_j) \rho_1^{-1}, \quad s = 1, 2, \dots, \quad (2.2)$$

где $\rho_j = [f_T(j)]^{1/2}$. Для операторов (2.2) при $s = 1$ из (1.6), следуя [12], получаем уравнение

$$\delta_{k0} a^j(1) \nabla_j \ln T = I_B(k; \omega) \varphi_k^{(1)}(t_1), \quad (2.3)$$

где $a^j(1) = \frac{1}{m} p_1^j (\varepsilon_1 - 1)$, $\varepsilon_1 = \varepsilon_1(p)/T - \mathcal{E}$, $I_B(k; \omega) = I - iL(k; \omega)$; линейный диссипативный супероператор I (см., например, (1.3) в [16]), нуль-пространство которого состоит из инвариантов столкновения, определяется в гильбертовом пространстве вигнеровских операторов и динамических переменных со скалярным произведением

$$(\varphi, \psi) = \int d1 \varphi^\dagger(1) \rho_1 \psi(1) \rho_1, \quad (2.4)$$

где $\varphi^\dagger(1)$ – оператор, эрмитово сопряженный оператору $\varphi(1)$.

Из (2.3), учитывая (1.2) и (1.5), находим

$$\begin{aligned} \varphi_k^{(1)}(1, t_1) &= \delta_{k0} \Phi^{(1)}(t_1) - A_k^j(1) \nabla_j \ln T, \\ \Phi^{(s)}(t_j) &= n^{(s)}(j) + \varepsilon_1 T^{(s)}(j) + \mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{u}^{(s)}(j)/T, \end{aligned} \quad (2.5)$$

здесь и везде ниже $n^{(s)}(j) = n^{(s)}(t_j)/n$, $T^{(s)}(j) = T^{(s)}(t_j)/T$ и $\mathbf{u}^{(s)}(j) = \mathbf{u}^{(s)}(t_j)$; оператор $A_k^j(1)$, диагональный в представлении функций $|1\rangle$ по квантовым числам, определяющим энергию E_1 , является решением уравнения

$$\delta_{k0} a^j(1) = R_B(k; \omega) A_k^j, \quad (2.6)$$

удовлетворяющим условию $(p^i, A_0^j) = 0$, где скалярное произведение определено в (2.4).

В (2.6) линейный супероператор имеет вид

$$R_B(k; \omega) = R + iL(k; \omega),$$

где R – супероператор Вальдмана–Снайдера [8] при нулевой локальной средней скорости.

В этом приближении поток энергии и тензор напряжений следующие:

$$\begin{aligned} Q^{(1)j}(t_1) &= p(\mathcal{E} + 1)u^j(1) - \lambda^{ji}(\omega)\nabla_i T, \\ P^{(1)ij}(t_1) &= \delta_{ij}pp^{(1)}(1), \end{aligned} \quad (2.7)$$

здесь и везде ниже $\mathbf{u}^j(l) = \mathbf{u}^{(1)j}(l)$; зависящий от частоты магнитного поля тензорный коэффициент теплопроводности

$$\lambda^{ji}(\omega) = n(a^j, A_0^i), \quad (2.8)$$

а поправка к давлению $p^{(1)}(j) = n^{(1)}(j) + T^{(1)}(j)$. Заметим, что в кинетике многоатомного газа зависящие от частоты магнитного поля коэффициенты переноса рассматривались впервые в работе [17] (см. также [4]).

Во втором приближении из (1.6) получаем следующие условия отсутствия секулярных членов в $x^{(2)}$:

$$\frac{\partial x(1, 1)}{\partial t} = -\nabla_j X^{(1)j}, \quad (2.9)$$

здесь

$$\begin{aligned} x^{(0)}/n &= (1, \mathcal{E}, 0), \\ x^{(1)}/n &= \left(n^{(1)}(1), T[\mathcal{E}n^{(1)}(1) + C_V T^{(1)}(1)], mu^k(1) \right), \\ X^{(1)j} &= \left(nu^j(1), Q^{(1)j}(t_1), P^{(1)kj}(t_1) \right), \end{aligned}$$

где теплоемкость на молекулу $C_V = \frac{d(\mathcal{E}T)}{dT}$, поток энергии и тензор напряжений даны в (2.7).

Учитывая, что n и T не зависят от t_1 , из (2.9), следуя [12], получаем во втором приближении следующие уравнения переноса массы и энергии и условие для давления:

$$\begin{aligned} \frac{\partial n}{\partial t_2} &= -\nabla_j (nu^j(2)), \\ \frac{\partial E}{\partial t_2} &= -\nabla_j (Eu^j(2)) - p\nabla_j u^j(2) + \nabla_j (\lambda^{ji}(\omega)\nabla_i T), \\ \nabla_j p^{(1)}(2) &= 0, \end{aligned} \quad (2.10)$$

где $E = nT\mathcal{E}$.

В этом приближении из условия отсутствия секулярных членов в $f_k^{(2)}(1, t_1)$ для вигнеровского оператора $\varphi_k^{(2)}(1, t_1)$ (см. (2.5)) получаем уравнение

$$\rho_1^{-1} \frac{df_k(1, 1)}{dt} \rho_1^{-1} - I \left\{ \varphi_0^{(1)}(t_1), \varphi_k^{(1)}(t_1) \right\} = I_B(k; \omega) \varphi_k^{(2)}(t_1), \quad (2.11)$$

здесь $f_k^{(0)}(1) = \delta_{k0} f_T(1)$, $f_k^{(1)}(1) = \rho_1 \varphi_k^{(1)}(1, t_1) \rho_1$ (см. (2.5)); нелинейный оператор имеет вид

$$I \{ \varphi_0, \varphi_k \} = \frac{1}{2} \rho_1^{-1} \sum_{j=1}^2 \int d2 I(12) f_0^{(1)}(j) f_k^{(1)}(3-j) \rho_1^{-1}.$$

Заметим, что

$$2I\{a, \varphi_k\} = -I_B(k; \omega) \Delta(a) \varphi_k + \rho_1^{-1} [(\Delta(a) - a) \rho_1 I_B(k; \omega) \varphi_k \rho_1] \rho_1^{-1}$$

при $a(j) = (\varepsilon_j, \mathbf{p}_j)$, где $\Delta(\varepsilon_j) c(j) = (\varepsilon_j + T \frac{\partial}{\partial T}) c(j)$, $\Delta(p_j^i) c(j) = \left(p_j^i - mT \frac{\partial}{\partial p_j^i}\right) c(j)$.

Исключая производные по времени в (2.11) с помощью уравнений (2.9) и учитывая (1.5), получаем

$$\begin{aligned} \varphi_k^{(2)}(1, t_1) = & \delta_{k0} \left[\Phi^{(2)}(t_1) - \frac{1}{2} C_V T^{(1)2} - \frac{mu^2}{2T} + \right. \\ & + \mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{u} \frac{p^{(1)}}{T} + \varepsilon_1 (n^{(1)} T^{(1)} - T^{(1)2}) + \frac{1}{2} \left(\varepsilon_1 T^{(1)} + \frac{\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{u}}{T} \right)^2 \Big] - \\ & - A_k^j(1) \nabla_j T^{(1)} - (\nabla_j \ln T) \left[T^{(1)} \Delta(\varepsilon) + \frac{u^i}{T} \Delta(p_1^i) \right] A_k^j(1) - \\ & - \frac{1}{2} B_k^{ij}(1) \left(\nabla_i u^j + \nabla_j u^i \right) + A_{1k}^{ij}(1) \nabla_i \nabla_j T + \frac{1}{T} A_{2k}^{ij}(1) \nabla_i T \nabla_j T, \end{aligned} \quad (2.12)$$

где $\Phi^{(2)}(t_1)$ определяется в (2.5), $n^{(1)} = n^{(1)}(1)$ и аналогично для $T^{(s)}$ и $\mathbf{u}^{(s)}$ при $s = 1, 2$; тензорные второго ранга операторы $B_k^{ij}(1)$ и $A_{lk}^{ij}(1)$, диагональные в представлении функций $|1\rangle$ по квантовым числам, определяющим энергию E_1 , являются решениями уравнений

$$\begin{aligned} \delta_{k0} b^{ij}(1) &= R_B(k; \omega) B_k^{ij}, \\ a_{lk}^{ij}(1) &= R_B(k; \omega) A_{lk}^{ij}, \quad l = 1, 2, \end{aligned} \quad (2.13)$$

удовлетворяющими условиям $(c, B_0^{ii}) = 0$, $(c, A_{l0}^{ii}) = 0$, $c = \{1, \varepsilon_1\}$.

В (2.13) одночастичные операторы равны

$$\begin{aligned} b^{ij}(1) &= \frac{1}{mT} p_1^i p_1^j - \delta_{ij} \left(1 + \frac{\varepsilon_1}{C_V} \right), \\ a_{1k}^{ij}(1) &= \frac{1}{mT} p_1^i A_k^j(1) - \delta_{k0} \lambda^{ij}(\omega) \frac{\varepsilon_1}{pC_V}, \\ a_{2k}^{ij}(1) &= \frac{1}{mT} p_1^i [\Delta(\varepsilon_1) - 1] A_k^j(1) - \delta_{k0} \frac{d\lambda^{ij}(\omega)}{dT} \frac{\varepsilon_1}{pC_V} + \frac{1}{T} I\{A_0^i, A_k^j\}, \end{aligned}$$

где использованы обозначения к (2.11).

В этом приближении из (1.3) с учетом (1.5) и (2.12) получаем следующие барнеттовские поправки к плотности потока энергии и тензорной плотности потока импульса:

$$\begin{aligned} Q^{(2)j}(t_1) &= (p^{(1)}(1) + n^{(1)} \mathcal{E} + T^{(1)}(1) C_V) p u^j(1) + (p + E) u^{(2)j}(1) - \\ & - \lambda^{ji}(\omega) T \nabla_i T^{(1)}(1) - T T^{(1)}(1) \frac{d\lambda^{ji}(\omega)}{dT} \nabla_i T, \\ P^{(2)ij}(t_1) &= \delta_{ij} p p^{(2)}(1) + \rho u^i(1) u^j(1) + \Pi^{ij}(t_1) + \Pi_T^{ij}. \end{aligned} \quad (2.14)$$

В (2.14) коэффициент теплопроводности $\lambda^{ji}(\omega)$ определяется в (2.8), барнеттовская поправка к давлению $p^{(2)}(1)$ и тензоры вязких $\Pi^{ij}(t_1)$ и температурных Π_T^{ij} напряжений следующие:

$$\begin{aligned} p^{(2)}(1) &= n^{(2)}(1) + n^{(1)}(1)T^{(1)}(1) + T^{(2)}(1), \\ \Pi^{ij}(t_1) &= -\eta^{ijkl}(\omega)(\nabla_k u^l + \nabla_l u^k), \\ \Pi_T^{ij} &= 2\Delta_1^{ijkl}(\omega)\nabla_k \nabla_l T + \frac{2}{T}\Delta_2^{ijkl}(\omega)\nabla_k T \nabla_l T, \end{aligned} \quad (2.15)$$

где зависящие от частоты магнитного поля тензорные четвертого ранга коэффициент вязкости $\eta^{ijkl}(\omega)$ и кинетические коэффициенты температурных напряжений $\Delta_s^{ijkl}(\omega)$ определяются формулами

$$\begin{aligned} \eta^{ijkl}(\omega) &= \frac{n}{2m}(p^i p^j, B_0^{kl}), \\ \Delta_s^{ijkl}(\omega) &= \frac{n}{2m}(p^i p^j, A_{s0}^{kl}), \quad s = 1, 2. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Отметим здесь, что медленно изменяющиеся во времени (временной масштаб τ/μ^2) неравновесные состояния многоатомного газа во внешнем магнитном поле в локально-равновесном приближении описываются оператором Максвелла–Больцмана, зависящим от пространственных координат и времени через n и T , для которых получено только одно уравнение (2.1). В диссипативном навье–стоксовском приближении эти состояния описываются оператором (см. (2.5))

$$f(1) = f_T(1)(1 + \mu\varphi_0^{(1)}(1, t_2)),$$

зависящим, кроме n и T , также от $n^{(1)}(2)$, $T^{(1)}(2)$ и $\mathbf{u}^{(1)}(2)$, для которых получены только четыре уравнения (см. (2.1) и (2.10)). В частности, в этой системе уравнений отсутствует уравнение для локальной средней скорости $\mathbf{u}^{(1)}(2)$, которое можно получить только из третьего приближения.

В третьем приближении из (1.6) находим следующие условия отсутствия секулярных членов в $x^{(3)}$:

$$\frac{\partial x(2; 1)}{\partial t} = -\nabla_j X^{(2)j}, \quad (2.17)$$

здесь $x^{(0)}$ и $x^{(1)}$ определены в обозначениях к (2.9),

$$\begin{aligned} x^{(2)}/n &= \left\{ n^{(2)}(1), T \left[\mathcal{E} p^{(2)}(1) + (C_V - \mathcal{E}) n^{(1)}(1) T^{(1)}(1) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{1}{2} T^{(1)2}(1) T \frac{dC_V}{dT} \right], \frac{m}{n} J^{(2)k}(t_1) \right\}, \\ X^{(2)j} &= \left(J^{(2)j}(t_1), Q^{(2)j}(t_1), P^{(2)kj}(t_1) \right), \end{aligned}$$

где плотность потока молекул $J^{(2)j}(t_1) = n[u^{(2)j}(1) + n^{(1)}(1)u^j(1)]$; барнеттовские поправки к потоку энергии и тензору напряжений даны в (2.14).

Аналогичным образом из (1.6) можно найти вигнеровский оператор $\varphi^{(3)}(1, t_1)$ и получить супербарнеттовские поправки к потоку энергии $Q^{(3)}(1, t_1)$ и к тензору напряжений $P^{(3)kj}(t_1)$. Заметим, что вигнеровский оператор в этом приближении зависит, кроме указанных выше локальных макроскопических переменных, также от $n^{(3)}(1)$, $T^{(3)}(1)$ и $\mathbf{u}^{(3)}(1)$.

Учитывая, что тензор температурных напряжений (см. (2.15)) не зависит от t_1 , следуя [12], для медленно изменяющейся во времени локальной средней скорости $u^j = u^{(1)j}(2)$ из (2.17) получаем уравнение

$$\rho \left(\frac{\partial u^j}{\partial t_2} + u^k \nabla_k u^j \right) = -p \nabla_j p^{(2)}(2) + \nabla_k \left[\eta^{jkil}(\omega) (\nabla_i u^l + \nabla_l u^i) \right] - 2 \nabla_k \left(\Delta_1^{jkil}(\omega) \nabla_i \nabla_l T \right) - 2 \nabla_k \left(\frac{1}{T} \Delta_2^{jkil}(\omega) \nabla_i T \nabla_l T \right). \quad (2.18)$$

Что касается уравнений для $n^{(1)}(2)$ и $T^{(1)}(2)$, то, как следует из (2.17), в эти уравнения входят $n^{(2)}(2)$, $T^{(2)}(2)$ и $\mathbf{u}^{(2)}(2)$, уравнения для которых можно получить только из четвертого приближения.

Таким образом, при $u^* \simeq \mu$, ограничиваясь при описании неравновесных состояний многоатомного газа коэффициентами разложения в ряд по μ только первых пяти моментов от оператора Вигнера (1.2), мы не получаем, в отличие от газодинамического приближения (см. приложение), замкнутого описания этих состояний в каждом конкретном приближении, и локальные макроскопические переменные подчиняются системе зацепляющихся уравнений.

Конкретные результаты, касающиеся поля течения, а также сил и моментов сил, действующих на обтекаемые тела, при $u^* \simeq \mu$ можно получить только в тех случаях, когда полученная выше система уравнений расцепляется. Это возможно, например, в тех случаях, когда достаточно знать с заданной точностью только некоторые из локальных макроскопических переменных или функций от этих переменных. В частности, в стационарных течениях при определении сил и моментов сил, обусловленных только вязкими и температурными напряжениями, поправки к давлению $p^{(1)}$ и $p^{(2)}$ можно рассматривать как независимые переменные. Тогда для n , T , $\mathbf{u}$, $p^{(1)}$ и $p^{(2)}$ из (2.1), (2.9) и (2.18) получаем замкнутую систему уравнений, из которой в случае одноатомного газа следует система уравнений, предложенная в [9].

Для описания неравновесных состояний многоатомного газа при медленных течениях в каналах или около изолированных тел, кроме системы зацепляющихся уравнений, необходимо также знать условия для локальных макроскопических переменных на поверхностях обтекаемых газом тел. Эти условия будут обсуждаться в следующей работе при рассмотрении эффекта термомагнитной разности давлений и эффекта Скотта с учетом нелинейных температурных напряжений.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Следуя [12], рассмотрим неравновесные состояния многоатомного газа в переменном во времени магнитном поле при $\mu \ll u^* \ll \frac{1}{\mu}$. В этом случае в нулевом приближении получаем, что $n^{(0)}$ и $T^{(0)}$ и отличная от нуля $\mathbf{u}^{(0)}$ не зависят от “быстрого” времени t_0 , $f^{(0)}(1, t_1) = f_T^{(*)}(1)$, где $f_T^{(*)}(1)$ получаем из $f_T(1)$ заменой оператора энергии $\varepsilon_1(p)$ оператором $\varepsilon_1(p) - \mathbf{u}^{(0)} \cdot (\mathbf{p}_1 - \frac{1}{2} m \mathbf{u}^{(0)})$.

В первом приближении получаем уравнение Эйлера

$$\begin{aligned}\frac{\partial n}{\partial t_1} &= -\nabla_j(nu^j), \\ \frac{\partial E}{\partial t_1} &= -\nabla_j(Eu^j) - p\nabla_j u^j, \\ \frac{\partial \rho u^j}{\partial t_1} &= -\nabla_k(\rho u^j u^k) - \nabla_j p,\end{aligned}\tag{П.1}$$

здесь и ниже $n = n^{(0)}$ и аналогично для температуры T , плотности энергии $E = nT\mathcal{E}$, давления $p = nt$, скорости $\mathbf{u}$ и плотности $\rho = mn$. В этом приближении для вигнеровского оператора $\varphi_k^{(1)}(1, t_1) = \rho_1^{-1} f_k^{(1)}(1, t_1) \rho_1^{-1}$, где $\rho_j = [f_T^{(*)}(j)]^{1/2}$, получаем следующее выражение:

$$\varphi_k^{(1)}(1, t_1) = \delta_{k0} \Phi^{(1)}(t_1) - A_k^j(1) \nabla_j \ln T - \frac{1}{2} B_k^{ij}(1) (\nabla_i u^j + \nabla_j u^i),\tag{П.2}$$

здесь $\Phi^{(1)}(t_1)$ определяется в (2.5), векторный $A_k^j(1)$ и тензорный второго ранга $B_k^{ij}(1)$ операторы являются решениями уравнения (2.6) и первого уравнения в (2.13), где R – супероператор Вальдмана–Снайтера при отличной от нуля локальной средней скорости молекул.

Во втором приближении получаем уравнения переноса

$$\begin{aligned}\frac{\partial n(1; 1)}{\partial t} &= -\frac{1}{m} \nabla_j J^{(1)j}, \\ \frac{\partial E(1; 1)}{\partial t} &= -\nabla_j Q^{(1)j} - p \nabla_j u^{(1)j} - P^{(1)ij} \nabla_j u^i, \\ \frac{\partial J^i(1; 1)}{\partial t} &= -\nabla_j P^{(1)ij}.\end{aligned}\tag{П.3}$$

В (П.3) использовали обозначения из (1.6), потоки массы $J^{(s)i} = J^{(s)i}(\mathbf{r}, t_1)$ при $s = 0, 1$ и энергии $Q^{(1)j} = Q^{(1)j}(\mathbf{r}, t_1)$, а также тензор напряжений $P^{(1)ij} = P^{(1)ij}(\mathbf{r}, t_1)$ определяются формулами

$$\begin{aligned}J^{(0)i} &= \rho u^i, \\ J^{(1)i} &= \rho(n^{(1)} u^i + u^{(1)i}), \\ Q^{(1)j} &= (E + p)u^{(1)j} - \lambda^{ji}(\omega) \nabla_i T, \\ P^{(1)ij} &= \delta_{ij} p p^{(1)} + \rho(n^{(1)} u^i u^j + u^{(1)i} u^j + u^{(1)j} u^i) - \\ &\quad - \eta^{ijkl}(\omega) (\nabla_k u^l + \nabla_l u^k),\end{aligned}\tag{П.4}$$

где $p^{(1)} = n^{(1)} + T^{(1)}$, $n^{(1)} = n^{(1)}(t_1)/n$, $T^{(1)} = T^{(1)}(t_1)/T$ и $\mathbf{u}^{(1)} = \mathbf{u}^{(1)}(t_1)$. В частности, при условиях Чепмена–Энскога, когда $n^{(1)} = 0$, $T^{(1)} = 0$, $\mathbf{u}^{(1)} = 0$, оператор $\Phi^{(1)}(t_1)$ обращается в нулевой оператор, и из (П.4) находим

$$\begin{aligned}J^{(0)i} &= \rho u^i, \quad J^{(1)i} = 0, \\ Q^{(1)j} &= -\lambda^{ji}(\omega) \nabla_i T, \\ P^{(1)ij} &= -\eta^{ijkl}(\omega) (\nabla_k u^l + \nabla_l u^k).\end{aligned}$$

С учетом определения производной по времени из (П.1)–(П.4) получаем уравнения Навье–Стокса и вигнеровский оператор, в которые входят зависящие от частоты внешнего магнитного поля тензорные коэффициенты теплопроводности и сдвиговой и объемной вязкостей операторы $A_k^j(1)$ и $B_k^{ij}(1)$.

Аналогичным образом рассматривая высшие приближения, получим систему уравнений переноса и оператор Вигнера с зависящими от частоты магнитного поля коэффициентами переноса. Как легко видеть, в каждом конкретном приближении здесь для локальных макроскопических переменных, определяющих зависимость оператора Вигнера от пространственных координат и времени, получаем замкнутую систему уравнений переноса.

Список литературы

- [1] С. Чепмен, Т. Каулинг. Математическая теория неоднородных газов. М.: Изд-во ин. лит., 1960.
- [2] Н. Н. Боголюбов. Избранные труды в трех томах. Т. 2. Киев: Наукова думка, 1970.
- [3] Дж. Ферцигер, Г. Капер. Математическая теория процессов переноса в газах. М.: Мир, 1976.
- [4] A. C. Levi, F. R. McCourt, J. Hajdu. Physica. 1969. V. 42. № 2. P. 347.
- [5] G. G. Scott, H. W. Sturmer, R. M. Williamson. Phys. Rev. A. 1967. V. 158. № 1. P. 117.
- [6] G. G. Scott, H. W. Sturmer, M. E. Larchez. Phys. Rev. A. 1970. V. 2. № 3. P. 792.
- [7] В. А. Борман, С. Ю. Крылов, Б. И. Николаев. ЖЭТФ. 1979. Т. 76. № 5. С. 1551.
- [8] H. Moraal. Phys. Rep. 1975. V. 17C. № 5. P. 226.
- [9] М. Н. Козан, В. С. Галкин, О. Г. Фридлендер. УФН. 1976. Т. 119. № 1. С. 111.
- [10] С. М. Дикман, Л. П. Путаевский. ЖЭТФ. 1980. Т. 78. № 5. С. 1752.
- [11] A. C. Levi, F. R. McCourt, J. J. M. Beenakker. Physica. 1969. V. 42. № 3. P. 363.
- [12] E. A. Frieman. J. Math. Phys. 1963. V. 4. № 3. P. 410.
- [13] Л. А. Пальцев. ТМФ. 1988. Т. 77. № 3. С. 412.
- [14] Л. А. Пальцев. ТМФ. 1986. Т. 66. № 2. С. 302.
- [15] A. Tir. Physica. 1971. V. 51. № 3. P. 493.
- [16] Л. А. Пальцев. ТМФ. 1986. Т. 66. № 3. С. 445.
- [17] В. Д. Борман, Л. А. Максимов, Б. И. Николаев. ЖЭТФ. 1967. Т. 52. № 5. С. 1305.

Поступила в редакцию 5.IX.1996 г.

L. A. Paltsev

ON TRANSPORT EQUATIONS IN SLOW FLOWS OF POLYATOMIC GAS IN EXTERNAL MAGNETIC FIELD

The transport equations in slow flows of polyatomic gas in external time-varying magnetic field are obtained by means of quantum kinetic theory methods. It is shown that local macroscopic variables are subjected to the chain of equations. The Wigner's operator and the stress tensor are obtained in Burnett's approximation. The transport coefficients depending on magnetic field frequency are defined.