Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. В. Власов, А. Ю. Халфин, Безвихревое релятивистское движение, зависящее от одной пространственной переменной, *ТМФ*, 1997, том 110, номер 3, 476–483

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf983>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.23.180.231

26 апреля 2023 г., 18:16:08

Ю. В. Власов*, А. Ю. Халфин

БЕЗВИХРЕВОЕ РЕЛЯТИВИСТСКОЕ ДВИЖЕНИЕ, ЗАВИСЯЩЕЕ ОТ ОДНОЙ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Найдены классы релятивистских безвихревых течений, зависящих от одной пространственной координаты. Рассмотрены приложения к теории ударных волн и многокомпонентной неидеальной жидкости.

1. ВВЕДЕНИЕ

В релятивистской гидродинамике движение, зависящее от одной пространственной переменной, является объектом, доступным для аналитического анализа и обладающим рядом интересных особенностей. Общая постановка задачи для самогравитирующей жидкости исследовалась Ван ден Бергом [1], который нашел соответствующие решения уравнений Эйнштейна. Что касается плоского пространства (с метрическим тензором $g^{\mu\nu} = \text{diag}\{-1, 1, 1, 1\}$), то для него недавно провел анализ Эйдельман [2]. Достоянна внимания следующая закономерность, найденная в работе [2]: движение газа с релятивистской макроскопической скоростью или релятивистским уравнением состояния (в обоих случаях) будет вихревым и трехмерным. Однако это утверждение выполняется лишь при определенных условиях, ибо можно найти класс безвихревых релятивистских движений, зависящих от одной пространственной переменной. Об этом пойдет речь в настоящей работе, где мы рассмотрим идеальную жидкость во внешнем гравитационном поле — случай, промежуточный между условиями, исследованными в [1] и [2]. Изучение безвихревых течений приобретает особенный интерес в свете релятивистской теории сверхтекучести [3, 4]. Поэтому параллельно с обсуждением идеальной жидкости в рамках формализма, развитого в классических работах Синжа [5], Лихневича [6] и Тауба [7] (см. также учебник Ландау и Лифшица [8]), мы будем обращаться к ковариантной теории сверхтекучести, пользуясь методом Картера–Халатникова, который справедлив и для многокомпонентной системы. Если бы безвихревые движения, зависящие от одной пространственной координаты, действительно не существовали, то это коренным образом изменило бы положение дел в теории сверхтекучести: например, пришлось бы отказаться от модели релятивистского квантового вихря [9]. Тем не менее существующий класс релятивистских безвихревых течений гораздо уже своего не-

* Институт теоретической физики им. Л. Д. Ландау, Москва

релятивистского аналога. Это никак нельзя забывать при решении прикладных задач астрофизики.

2. РЕЛЯТИВИСТСКИЕ БЕЗВИХРЕВЫЕ ТЕЧЕНИЯ

Уравнения движения релятивистской сплошной среды следуют из закона сохранения (псевдо) тензора энергии-импульса

$$\nabla_\rho T_\nu^\rho = 0. \quad (1)$$

В современной релятивистской гидродинамике уравнение (1) выводится или в рамках метода потенциалов Клебша, или с помощью конвективного вариационного принципа [10]. С учетом закона сохранения вектора n^ρ числа частиц

$$\nabla_\rho n^\rho = 0 \quad (2)$$

уравнения движения, соответствующие (1), имеют вид

$$n^\rho w_{\rho\nu} = 0, \quad (3)$$

где 2-форма завихренности $w_{\rho\nu} = 2\nabla_{[\rho}\mu_{\nu]} = 2\partial_{[\rho}\mu_{\nu]}$ определяется как внешняя производная 1-формы импульса μ_ν . В ковариантной теории сверхтекучести уравнение (3), записанное для сверхтекучей компоненты, имеет вид [3, 4]

$$w_{\rho\nu} = 0, \quad (4)$$

что фактически является обобщением нерелятивистского условия ($\text{rot } V_s = 0$) потенциальности течения. Условие (4), означающее точность 1-формы μ_ρ , позволяет согласно лемме Пуанкаре записать локальное представление

$$\mu_\rho = m\hbar\nabla_\rho\alpha \quad (5)$$

через градиент фазы бозе-конденсата α (здесь m – масса спаренных частиц). При наличии квантовых вихрей условие (4) (и (5)) нарушается на носителе формы завихренности. Однако замкнутость 2-формы w приводит к инварианту

$$\frac{1}{2\pi} \oint \mu_\nu dx^\nu = \hbar k, \quad (6)$$

выражающему квантование циркуляции [9].

Для классической идеальной жидкости условие безвихревого движения обсуждалось намного ранее Синжем [5], Лихнеровичем [6], Халатниковым (см. ссылку в [8]), Шикиным [11] и Таубом [7]. При этом вместо фазы бозе-конденсата вводится просто скалярная потенциальная функция.

Конечно, в общем случае векторы n^ρ и μ^ν могут быть неколлинеарны, но для идеальной жидкости имеем

$$\mu_\nu = \mu u_\nu, \quad n^\rho = n u^\rho,$$

где μ — химический потенциал, а n — число частиц в сопутствующей системе отсчета. Введем удельную энтальпию

$$i = \mu n = e + P \quad (7)$$

и подставим выражение $T_\nu^\rho = i u^\rho u_\nu - P \delta_\nu^\rho$ для идеальной жидкости в уравнение (1), получаем

$$i \frac{D u^\rho}{ds} + u^\rho \frac{dP}{ds} - P_{;\rho} = 0, \quad (8)$$

где D обозначает ковариантную производную. Для баротропной среды с уравнением состояния $e = e(P)$ введем безразмерную функцию, называемую показателем преломления релятивистской сплошной среды (по аналогии с геометрической оптикой),

$$f = \exp \left\{ \int_0^P \frac{dP}{e(P) + P} \right\}.$$

Тогда уравнение (8) принимает вид

$$f \frac{D u^\rho}{ds} + u^\rho \frac{df}{ds} - f_{;\rho} = 0 \quad (9)$$

или в более короткой форме

$$u^\nu \frac{D C^\rho}{dx^\nu} - f_{;\rho} = 0. \quad (10)$$

Величина $C^\rho = f u^\rho$ называется вектором тока или псевдоскоростью. Она соответствует 1-форме импульса μ_ρ в том смысле, что $f = \mu/m$. Действительно, выражение (10) следует просто из (3) и (7). Безвихревое движение определяется равенством нулю тензора завихренности

$$\Omega_{\rho\nu} = \nabla_{[\rho} C_{\nu]} = 0, \quad (11)$$

а потенциальная функция вводится при этом по аналогии с (4):

$$C_\rho = -\frac{\partial \varphi}{\partial x^\rho}. \quad (12)$$

Нетрудно проверить, что (12) является решением (10).

Итак, мы дали описание безвихревых течений в рамках современной и классической теорий. Из сказанного ясно, что условие безвихревого течения определяется уравнением (4) или (11), при этом можно ввести гладкие потенциальные функции (5) или (12). В отличие от нерелятивистской теории в формулах (4), (11) фигурирует множитель $f = \mu/m$, который в нерелятивистских уравнениях полагается равным единице. На наш взгляд, в работе [2] условие безвихревого движения определяется некорректно: множитель f не учитывается; таким образом, делается вывод о том, что 2-форма $\omega_{\rho\nu} = \nabla_{[\rho} u_{\nu]}$ всегда отлична от нуля в случае зависимости параметров от одной пространственной

переменной. Однако, как мы видим, условие $\nabla_{[\rho} u_{\nu]} = 0$ не определяет безвихревое движение. Отметим еще тот факт, что уравнение (4) выводится для идеальной жидкости, тогда как уравнение (11) остается справедливым для каждой компоненты многосоставной неидеальной жидкости.

3. ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЙ

Учитывая симметричность связности, уравнение (1) удобно переписать в виде двух уравнений:

$$\text{rot } \vec{\mu} = 0, \quad (13)$$

$$\text{grad } \mu_0 = \partial_0 \vec{\mu}. \quad (14)$$

Эти уравнения имеют одинаковую форму как в плоском, так и в искривленном пространстве (первое из них совпадает с известным условием потенциальности, если только обычную скорость заменить пространственной составляющей псевдоскорости, а второе уравнение является обобщением уравнения Бернулли). Легко видеть, что для идеальной жидкости (13)–(14) приводят к уравнениям (10) в форме

$$u^\nu \nabla_\nu \mu_\rho - \partial_\rho \mu = 0.$$

Пусть движение не зависит от двух пространственных координат x^2 и x^3 . Тогда уравнение (14) сводится к

$$\partial_1 \mu_0 = \partial_0 \mu_1. \quad (15)$$

Исследуем стационарные решения. Введем цилиндрические координаты (r, ϕ, z) и рассмотрим вращение со скоростью $v_\phi(r)$ вокруг оси $x^3 = z$. Мы не станем исключать поступательное движение со скоростью $v_z(r)$ и радиальное движение. Из уравнения (15) следует, что

$$\mu_0(r) = -\mu(r) \frac{1}{\sqrt{1 - v^2(r)/c^2}} = \text{const}, \quad v^2 = v_r^2 + v_\phi^2 + v_z^2 \quad (16)$$

(в нерелятивистском пределе это условие переходит в известный интеграл Бернулли). Уравнение же (13) дает

$$v_z(r) = \text{const}, \quad v_\phi(r) = a/r. \quad (17)$$

Радиальная же скорость v_r находится из соотношения (16). В общем случае получается весьма сложное движение. При $v_r = v_z = 0$ решение определяет поле скоростей сверхтекучего квантового вихря. Важно отметить один частный случай: если химический потенциал имеет зависимость, отличную от

$$\mu(r) \propto \sqrt{1 - a^2/(r^2 c^2) - v_z^2/c^2}, \quad (18)$$

то появляется радиальная составляющая скорости. Картер и Ланглуа [12], рассматривая сверхтекучий квантовый вихрь, естественно, радиальную скорость не учитывали и пользовались выражением (18).

Теперь рассмотрим движение в какой-нибудь сферически-симметричной метрике. Условие потенциальности (13) сводится к уравнениям

$$\partial_r(v_\phi r) = 0, \quad \partial_r(v_\theta r) = 0, \quad \partial_\theta(\sin \theta v_\phi) = 0, \quad (19)$$

а вместо выражения (16) имеет место более общая формула

$$\mu_0(r) = \text{const}, \quad \mu^2(r) = -g^{\rho\nu} \mu_\rho \mu_\nu. \quad (20)$$

Рассмотрим движение в экваториальной плоскости. Решение (19) совпадает с выражением (17) для v_ϕ . Подставив его в (20), мы можем найти радиальную скорость $v_r(r)$. Если постулировать, что $v_r(r) = 0$, из (20) находится химический потенциал. В частности, в метрике Шварцшильда с гравитационным радиусом r_g безвихревому движению с нулевой радиальной скоростью соответствует

$$\mu(r) = mc \frac{\sqrt{r^2 c^2 - a^2}}{\sqrt{r(r - r_g)}}, \quad r > r_g > a/c.$$

Наконец, следует сказать и о нестационарном решении уравнения (15), переписав последнее в виде

$$c^2 \mu'_0 + v_1 \dot{\mu}_0 = \dot{v}_1 \mu_0. \quad (21)$$

Если скорость v_1 не зависит от времени, то решением уравнения (21) является функция вида $\mu_0(ct - \frac{v}{c}x)$.

Итак, если в некоторой области пространства, топологически эквивалентной шару, имеется безвихревое движение, описанное выше, то согласно закону сохранения циркуляции (7) это движение всегда остается безвихревым. Для сверхтекучей жидкости это означает невозможность рождения квантовых вихрей односвязной области.

4. БЕЗВИХРЕВЫЕ ТЕЧЕНИЯ ПРИ НАЛИЧИИ РАЗРЫВОВ

Весьма интересно рассмотреть, как влияет на безвихревое течение присутствие разрыва. Единичную пространственноподобную нормаль к гиперповерхности разрыва обозначим через λ^ρ . Будем рассматривать разрыв с плоским фронтом в пространстве Минковского, выбрав $\lambda^\rho = (0, 1, 0, 0)$. Общее выражение тензора энергии-импульса многокомпонентной неидеальной жидкости имеет вид [3, 10, 12]

$$T^\rho_\nu = n^\rho \mu_\nu + j^\rho \chi_\nu + \dots + \Psi g^\rho_\nu, \quad (22)$$

где $n^\rho, j^\rho, \dots$ — токи частиц каждой компоненты, удовлетворяющие законам сохранения типа (2), а Ψ — обобщенная функция давления. Подставляя (22) в уравнение (1), запишем соотношения на разрыве [7], обозначив индексами “+” и “−” состояния по разные стороны разрыва:

$$\begin{aligned} n^\rho_+ \lambda_\rho &= n^\rho_- \lambda_\rho \Rightarrow n^x_+ = n^x_- \equiv n^x, \\ j^\rho_+ \lambda_\rho &= j^\rho_- \lambda_\rho \Rightarrow j^x_+ = j^x_- \equiv j^x, \\ &\dots \\ T^\rho_{+\nu} \lambda_\rho - T^\rho_{-\nu} \lambda_\rho &= 0 \Rightarrow n^x(\mu_{+\nu} - \mu_{-\nu}) + j^x(\chi_{+\nu} - \chi_{-\nu}) + \dots = \\ &= -(\Psi_+ - \Psi_-) \lambda_\nu. \end{aligned} \quad (23)$$

Умножив уравнение (23) на вектор $(1, 0, 0, 0)$, получим

$$n^x(\mu_{+0} - \mu_{-0}) + j^x(\chi_{+0} - \chi_{-0}) + \dots = 0. \quad (24)$$

Пусть перед разрывом существует стационарно безвихревое движение, т.е. согласно уравнению (15) имеем

$$\mu_{-0} = \text{const}, \quad \chi_{-0} = \text{const}, \quad \dots \quad (25)$$

Уравнение (24) определяет типы разрывов. При сильном разрыве (ударной волне) n^x отличен от нуля, поэтому

$$\mu_{+0} = \mu_{-0}, \quad (26)$$

что означает сохранение безвихревого движения соответствующей компоненты. Надо заметить, что ударная волна должна распространяться в направлении, вдоль которого имеется зависимость параметров среды. В противном случае фронт ударной волны искажается и перестает быть плоским, тогда утверждение о сохранении безвихревого движения не применимо. Таким образом, зависимость гидродинамических структур от одной пространственной координаты здесь весьма необходима.

Слабый разрыв определяется отсутствием потока вещества через фронт: $j^x = 0$. При этом за фронтом разрыва может существовать завихренность.

Как следует из уравнений (23) и (24), давление по обе стороны слабого разрыва одинаковое. В случае однокомпонентной идеальной жидкости и существования безвихревых течений по обе стороны слабого разрыва и, если по обе стороны разрыва уравнение состояния одно и то же, то поля скоростей связаны соотношением

$$\sqrt{1 - v_+^2/c^2} = \text{const} \sqrt{1 - v_-^2/c^2}.$$

5. ДВУХКОМПОНЕНТНАЯ НЕИДЕАЛЬНАЯ ЖИДКОСТЬ

Исследуем подробнее неидеальную двухкомпонентную жидкость. Неидеальность проявляется в зависимости давления от величины $b^2 = -\chi^\rho \mu_\rho$, так что векторы тока выражаются через соответствующие 1-формы импульса по формулам [4, 10, 12]

$$n^\rho = B\mu^\rho + A\chi^\rho, \quad j^\rho = A\mu^\rho + C\chi^\rho, \quad A = \partial\Psi/\partial b^2. \quad (27)$$

Возникает вопрос, существует ли такая среда, которая ведет себя как система двух идеальных жидкостей при безвихревом движении? То есть мы хотим выяснить, при каком уравнении состояния Ψ в случае безвихревого движения коэффициент A в (27) тождественно равен нулю. Из физических соображений разумно считать, что $\Psi\{\mu, b, \chi\} = P\{\mu\} + S\{\chi\} + \psi\{b, \chi\}$, где $\chi^2 = -\chi_\rho \chi^\rho$. Итак, мы имеем условие, аналогичное (25):

$$\mu_0 = m_1 = \text{const}, \quad \chi_0 = m_2 = \text{const}. \quad (28)$$

В системе отсчета, связанной с 1-формой μ_ρ , получаем

$$\mu_\rho = \mu_0(-1, 0, 0, 0), \quad \chi_\rho = \chi_0(-1, q), \quad (29)$$

где q — относительная скорость между системами отсчета, связанными с μ_ρ и χ_ρ . В общем случае при ненулевой скорости q коэффициент A также отличен от нуля. Однако согласно (28) и (29) $b^2 = m_1 m_2 = \text{const}$, и в соответствии с (27) мы можем взять, например,

$$\psi\{b, \chi\} = \varphi(2m_1 \chi b^2 - b^4), \quad (30)$$

при котором $A \equiv 0$, хотя $q \neq 0$.

6. ВЫВООДЫ

Итак, перечислим характеристики безвихревых релятивистских движений, зависящих от одной пространственной координаты. Необходимое условие, при котором существуют такие течения, — это (15) или в общем случае (20). Это условие связывает модуль скорости и химический потенциал. Все движения можно разделить на три категории:

1. Если движение происходит вдоль пространственной координаты x^1 , от которой имеется зависимость, то, кроме (15), на движение не налагается никаких ограничений.
2. Если движение происходит в перпендикулярном направлении со скоростью v_z , то это движение будет поступательным: $v_z = \text{const}$.
3. Если вращение происходит вокруг координатной оси, от которой не зависят параметры движения, то скорость вращения определяется условием (17).

Вращение же вокруг оси x^1 никогда не может быть безвихревым: уравнение (13) выполняется только в тривиальном случае $\vec{\mu} = 0$. Это можно сформулировать и на языке теории групп, но для нас важно уже и то, что существует нетривиальное безвихревое релятивистское течение, зависящее от одной пространственной координаты и являющееся суперпозицией вышеуказанных трех типов движений.

При распространении вдоль оси x^1 плоской ударной волны, что видно из (26), безвихревое течение не нарушается. Это, возможно, наиболее яркий пример безвихревых течений, зависящих от одной пространственной координаты. А по разные стороны слабого разрыва завихренность может быть различной.

Обсуждаемое нами безвихревое движение может играть важную роль в динамике релятивистской многокомпонентной неидеальной жидкости. Так, в случае уравнения состояния (30) две компоненты ведут себя как идеальные жидкости. При появлении завихренности начинает проявляться взаимодействие компонент. Впрочем, это справедливо только для двухсоставной системы, уже для трехкомпонентной жидкости безвихревое движение не может скрыть неидеальность. Подчеркнем, что в нерелятивистском пределе величины, описывающие взаимодействие компонент, становятся пренебрежимо малыми [3].

Мы благодарны Л. И. Меньшикову, И. М. Халатникову и И. С. Шикину за полезные советы.

Список литературы

- [1] *N. Van den Bergh.* Gen. Rel. Grav. 1988. V. 20. P. 131.
- [2] *Е. Д. Эйфельман.* ТМФ. 1995. Т. 103. С. 82.
- [3] *B. Carter, I. M. Khalatnikov.* Phys. Rev. D. 1992. V. 45. P. 4536.
- [4] *B. Carter, I. M. Khalatnikov.* Rev. Math. Phys. 1994. V. 6. P. 277.
- [5] *J. Synge.* Proc. Roy. Math. Soc. Ser. II. 1937. V. 43. P. 376.
- [6] *A. Lichnerowicz.* Relativistic hydrodynamics and magnetohydrodynamics. N. Y.: Benjamin, 1967.
- [7] *H. Taub.* Ann. Rev. Fluid Mech. 1978. V. 10. P. 301.
- [8] *Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц.* Гидродинамика. М.: Наука, 1988.
- [9] *U. Ben-Ya'cov.* J. Phys. A. 1994. V. 27. P. 7165.
- [10] *B. Carter.* Proc. R. Soc. Lond. A. 1991. V. 433. P. 45.
- [11] *И. С. Шукун.* ДАН СССР. 1962. Т. 142. С. 564.
- [12] *B. Carter, D. Langlois.* Phys. Rev. D. 1995. V. 52. P. 4640.

Поступила в редакцию 11.I.1996 г.,
после переработки 3.XII.1996 г.

Yu. V. Vlasov, A. J. Khalfin

**IRROTATIONAL RELATIVISTIC MOTION
DEPENDING ON ONE SPACE VARIABLE**

We determine the classes of irrotational relativistic motion that depend on one space coordinate. Applications to shock waves and multi-constituent fluid mechanics are considered.