Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. Г. Фихтенгольц, Об одном классе волновых решений уравнений тяготения
Эйнштейна, *ТМФ*, 1997, том 110, номер 3, 484–492

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf984>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и
согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.219.149

26 апреля 2023 г., 13:17:02

И. Г. Фихтенгольц*

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ВОЛНОВЫХ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ ТЯГОТЕНИЯ ЭЙНШТЕЙНА

Установлен класс волновых решений уравнений тяготения Эйнштейна. Для рассматриваемого класса волновых решений получен ковариантный закон сохранения.

Пространство с волновой метрикой $g_{\mu\nu}$ можно определить уравнениями тяготения Эйнштейна в области вне масс

$$R_{\mu\nu} = 0 \quad (1)$$

и условиями [1]

$$\begin{aligned} R^{\alpha\beta\cdot\cdot}_{\cdot\cdot\gamma\delta} R^{\gamma\delta\cdot\cdot}_{\cdot\cdot\alpha\beta} &= 0, & R^{\alpha\beta\cdot\cdot}_{\cdot\cdot\gamma\delta} R^{\gamma\delta\cdot\cdot}_{\cdot\cdot\rho\sigma} R^{\rho\sigma\cdot\cdot}_{\cdot\cdot\alpha\beta} &= 0, \\ R^{\alpha\beta\cdot\cdot}_{\cdot\cdot\gamma\delta} R^{*\gamma\delta\cdot\cdot}_{\cdot\cdot\alpha\beta} &= 0, & R^{\alpha\beta\cdot\cdot}_{\cdot\cdot\gamma\delta} R^{\gamma\delta\cdot\cdot}_{\cdot\cdot\rho\sigma} R^{*\rho\sigma\cdot\cdot}_{\cdot\cdot\alpha\beta} &= 0, \end{aligned} \quad (2)$$

где

$$R^{\alpha\beta\cdot\cdot}_{\cdot\cdot\mu\nu} = g^{\alpha\gamma} g^{\beta\delta} R_{\gamma\delta,\mu\nu}, \quad R^{*\alpha\beta\cdot\cdot}_{\cdot\cdot\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\alpha\gamma} g^{\beta\delta} \varepsilon_{\gamma\delta\rho\sigma} R^{\rho\sigma\cdot\cdot}_{\cdot\cdot\mu\nu}. \quad (3)$$

$R_{\alpha\beta,\mu\nu}$ — тензор Римана, соответствующий метрике $g_{\mu\nu}$ рассматриваемого пространства; $R_{\mu\nu}$ — тензор Риччи; $\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} = 1$, когда $\alpha = 0, \beta = 1, \gamma = 2, \delta = 3$ и соответственно для всех четных перестановок индексов $\alpha, \beta, \gamma, \delta$; $\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} = -1$ для всех нечетных перестановок индексов $\alpha, \beta, \gamma, \delta$; $\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} = 0$, когда среди индексов $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ имеются хотя бы два одинаковых. Греческие индексы принимают значения 0, 1, 2, 3. По одинаковым греческим индексам предполагается суммирование от 0 до 3.

Рассмотрим метрики $g_{\mu\nu}$, для которых квадрат интервала ds можно представить в виде

$$ds^2 = g_{00} dx^{02} + g_{11} dx^{12} + g_{22} dx^{22} + 2dx^0 dx^3,$$

компоненты g_{00}, g_{11}, g_{22} — искомые функции переменных x^0, x^1, x^2, x^3 .

Таким образом, при отыскании решения уравнений (1) будем исходить из условий

$$g_{03} = 1, \quad g_{01} = g_{02} = g_{12} = g_{13} = g_{23} = g_{33} = 0 \quad (4)$$

и соответственно

$$\begin{aligned} g^{03} &= 1, & g^{11} &= \frac{1}{g_{11}}, & g^{22} &= \frac{1}{g_{22}}, & g^{33} &= -g_{00}, \\ g^{00} &= g^{01} = g^{02} = g^{12} = g^{13} = g^{23} = 0. \end{aligned} \quad (5)$$

*Новгородский государственный университет

Имеет место следующее утверждение. Если выполнены условия (4) и, кроме того, компоненты g_{11} и g_{22} метрического тензора $g_{\mu\nu}$ не зависят от переменной x^3 , т.е.

$$\frac{\partial g_{11}}{\partial x^3} = 0, \quad \frac{\partial g_{22}}{\partial x^3} = 0, \quad (6)$$

а компонента g_{00} удовлетворяет соотношениям

$$\frac{\partial^2 g_{00}}{\partial x^1 \partial x^3} = 0, \quad \frac{\partial^2 g_{00}}{\partial x^2 \partial x^3} = 0, \quad (7)$$

то решение уравнений (1) удовлетворяет условиям (2) и, значит, решение уравнений Эйнштейна будет волновым.

Для метрики, удовлетворяющей условиям (4)–(7), скобки Кристоффеля имеют вид

$$\begin{aligned} \Gamma_{00}^0 &= -\frac{1}{2} \frac{\partial g_{00}}{\partial x^3}, & \Gamma_{00}^1 &= -\frac{1}{2g_{11}} \frac{\partial g_{00}}{\partial x^1}, & \Gamma_{01}^1 &= \frac{1}{2g_{11}} \frac{\partial g_{11}}{\partial x^0}, & \Gamma_{11}^1 &= \frac{1}{2g_{11}} \frac{\partial g_{11}}{\partial x^1}, \\ \Gamma_{12}^1 &= \frac{1}{2g_{11}} \frac{\partial g_{11}}{\partial x^2}, & \Gamma_{22}^1 &= -\frac{1}{2g_{11}} \frac{\partial g_{22}}{\partial x^1}, & \Gamma_{00}^2 &= -\frac{1}{2g_{22}} \frac{\partial g_{00}}{\partial x^2}, & \Gamma_{02}^2 &= \frac{1}{2g_{22}} \frac{\partial g_{22}}{\partial x^0}, \\ \Gamma_{11}^2 &= -\frac{1}{2g_{22}} \frac{\partial g_{11}}{\partial x^2}, & \Gamma_{12}^2 &= \frac{1}{2g_{22}} \frac{\partial g_{22}}{\partial x^1}, \\ \Gamma_{22}^2 &= \frac{1}{2g_{22}} \frac{\partial g_{22}}{\partial x^2}, & \Gamma_{00}^3 &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{00}}{\partial x^0} + g_{00} \frac{\partial g_{00}}{\partial x^3} \right), \\ \Gamma_{01}^3 &= \frac{1}{2} \frac{\partial g_{00}}{\partial x^1}, & \Gamma_{02}^3 &= \frac{1}{2} \frac{\partial g_{00}}{\partial x^2}, & \Gamma_{03}^3 &= \frac{1}{2} \frac{\partial g_{00}}{\partial x^3}, \\ \Gamma_{11}^3 &= -\frac{1}{2} \frac{\partial g_{11}}{\partial x^0}, & \Gamma_{22}^3 &= -\frac{1}{2} \frac{\partial g_{22}}{\partial x^0}. \end{aligned} \quad (8)$$

Остальные компоненты $\Gamma_{\mu\nu}^\alpha$ (кроме тех, которые могут быть получены из компонент, указанных в (8), перестановкой нижних индексов) равны нулю.

Для компонент тензора Римана $R_{\alpha\beta,\mu\nu}$ применительно к условиям (4)–(7) справедливо равенство

$$\begin{aligned} R_{01,01} &= -\frac{1}{2} \frac{\partial^2 g_{00}}{\partial x^{12}} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g_{11}}{\partial x^{02}} + \frac{1}{4g_{11}} \left(\frac{\partial g_{11}}{\partial x^0} \right)^2 + \frac{1}{4g_{11}} \frac{\partial g_{00}}{\partial x^1} \frac{\partial g_{11}}{\partial x^1} - \\ &\quad - \frac{1}{4g_{22}} \frac{\partial g_{00}}{\partial x^2} \frac{\partial g_{11}}{\partial x^2} - \frac{1}{4} \frac{\partial g_{00}}{\partial x^3} \frac{\partial g_{11}}{\partial x^0}, \\ R_{01,02} &= -\frac{1}{2} \frac{\partial^2 g_{00}}{\partial x^1 \partial x^2} + \frac{1}{4g_{11}} \frac{\partial g_{00}}{\partial x^1} \frac{\partial g_{11}}{\partial x^2} + \frac{1}{4g_{22}} \frac{\partial g_{00}}{\partial x^2} \frac{\partial g_{22}}{\partial x^1}, \\ R_{01,12} &= \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g_{11}}{\partial x^0 \partial x^2} - \frac{1}{4g_{11}} \frac{\partial g_{11}}{\partial x^0} \frac{\partial g_{11}}{\partial x^2} - \frac{1}{4g_{22}} \frac{\partial g_{11}}{\partial x^2} \frac{\partial g_{22}}{\partial x^0}, \\ R_{02,02} &= -\frac{1}{2} \frac{\partial^2 g_{00}}{\partial x^{22}} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g_{22}}{\partial x^{02}} + \frac{1}{4g_{22}} \left(\frac{\partial g_{22}}{\partial x^0} \right)^2 + \frac{1}{4g_{22}} \frac{\partial g_{00}}{\partial x^2} \frac{\partial g_{22}}{\partial x^2} - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{4g_{11}} \frac{\partial g_{00}}{\partial x^1} \frac{\partial g_{22}}{\partial x^1} - \frac{1}{4} \frac{\partial g_{00}}{\partial x^3} \frac{\partial g_{22}}{\partial x^0}, \quad R_{03,03} = -\frac{1}{2} \frac{\partial^2 g_{00}}{\partial x^{3^2}}, \\
R_{02,12} &= -\frac{1}{2} \frac{\partial^2 g_{22}}{\partial x^0 \partial x^1} + \frac{1}{4g_{22}} \frac{\partial g_{22}}{\partial x^0} \frac{\partial g_{22}}{\partial x^1} + \frac{1}{4g_{11}} \frac{\partial g_{11}}{\partial x^0} \frac{\partial g_{22}}{\partial x^1}, \\
R_{12,12} &= -\frac{1}{2} \frac{\partial^2 g_{11}}{\partial x^{2^2}} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g_{22}}{\partial x^{1^2}} + \frac{1}{4g_{11}} \left(\frac{\partial g_{11}}{\partial x^2} \right)^2 + \frac{1}{4g_{22}} \left(\frac{\partial g_{22}}{\partial x^1} \right)^2 + \\
& + \frac{1}{4g_{11}} \frac{\partial g_{11}}{\partial x^1} \frac{\partial g_{22}}{\partial x^1} + \frac{1}{4g_{22}} \frac{\partial g_{11}}{\partial x^2} \frac{\partial g_{22}}{\partial x^2}. \tag{9}
\end{aligned}$$

Остальные компоненты тензора $R_{\alpha\beta,\mu\nu}$ (кроме тех, которые могут быть получены из компонент, указанных в (9), перестановкой нижних индексов) равны нулю.

Для тензора Риччи получаем (см. (5) и (9))

$$\begin{aligned}
R_{00} &= \frac{1}{g_{11}} R_{01,10} + \frac{1}{g_{22}} R_{02,20} + g_{00} R_{03,03}, \\
R_{11} &= \frac{1}{g_{22}} R_{12,21}, \quad R_{22} = \frac{1}{g_{11}} R_{21,12} = \frac{g_{22}}{g_{11}} R_{11}, \\
R_{01} &= \frac{1}{g_{22}} R_{02,21}, \quad R_{02} = \frac{1}{g_{11}} R_{01,12}, \quad R_{03} = R_{03,03}.
\end{aligned} \tag{10}$$

Остальные компоненты тензора $R_{\alpha\beta}$ (кроме тех, которые могут быть получены из компонент, указанных в (10), перестановкой нижних индексов) равны нулю.

В силу (4)–(10) уравнения (1) принимают вид

$$\begin{aligned}
\frac{1}{g_{11}} R_{01,01} + \frac{1}{g_{22}} R_{02,02} &= 0, \quad R_{01,03} = 0, \quad R_{02,03} = 0, \\
R_{03,03} &= 0, \quad R_{01,12} = 0, \quad R_{02,12} = 0, \quad R_{12,12} = 0.
\end{aligned} \tag{11}$$

Таким образом, уравнения тяготения Эйнштейна в области вне масс приводятся согласно (1), (9)–(11) к следующим уравнениям:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{g_{11}} \frac{\partial^2 g_{00}}{\partial x^{1^2}} + \frac{1}{g_{11}} \frac{\partial^2 g_{11}}{\partial x^{0^2}} - \frac{1}{2g_{11}^2} \left(\frac{\partial g_{11}}{\partial x^0} \right)^2 - \frac{1}{2g_{11}^2} \frac{\partial g_{00}}{\partial x^1} \frac{\partial g_{11}}{\partial x^1} + \\
& + \frac{1}{2g_{11}g_{22}} \frac{\partial g_{00}}{\partial x^2} \frac{\partial g_{11}}{\partial x^2} + \frac{1}{2g_{11}} \frac{\partial g_{00}}{\partial x^3} \frac{\partial g_{11}}{\partial x^0} + \frac{1}{g_{22}} \frac{\partial^2 g_{00}}{\partial x^{2^2}} + \frac{1}{g_{22}} \frac{\partial^2 g_{00}}{\partial x^{0^2}} - \\
& - \frac{1}{2g_{22}^2} \left(\frac{\partial g_{22}}{\partial x^0} \right)^2 - \frac{1}{2g_{22}^2} \frac{\partial g_{00}}{\partial x^2} \frac{\partial g_{22}}{\partial x^2} + \frac{1}{2g_{11}g_{22}} \frac{\partial g_{00}}{\partial x^1} \frac{\partial g_{22}}{\partial x^1} + \frac{1}{2g_{22}} \frac{\partial g_{00}}{\partial x^3} \frac{\partial g_{22}}{\partial x^0} = 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 g_{00}}{\partial x^1 \partial x^3} &= 0, & \frac{\partial^2 g_{00}}{\partial x^2 \partial x^3} &= 0, & \frac{\partial^2 g_{00}}{\partial x^{3^2}} &= 0, \\
\frac{\partial^2 g_{11}}{\partial x^0 \partial x^2} - \frac{1}{2g_{11}} \frac{\partial g_{11}}{\partial x^0} \frac{\partial g_{11}}{\partial x^2} - \frac{1}{2g_{22}} \frac{\partial g_{22}}{\partial x^0} \frac{\partial g_{11}}{\partial x^2} &= 0, \\
\frac{\partial^2 g_{22}}{\partial x^0 \partial x^1} - \frac{1}{2g_{22}} \frac{\partial g_{22}}{\partial x^0} \frac{\partial g_{22}}{\partial x^1} - \frac{1}{2g_{11}} \frac{\partial g_{11}}{\partial x^0} \frac{\partial g_{22}}{\partial x^1} &= 0, \\
\frac{\partial^2 g_{11}}{\partial x^{2^2}} + \frac{\partial^2 g_{22}}{\partial x^{1^2}} - \frac{1}{2g_{11}} \left(\frac{\partial g_{11}}{\partial x^2} \right)^2 - \frac{1}{2g_{22}} \left(\frac{\partial g_{22}}{\partial x^1} \right)^2 - \\
- \frac{1}{2g_{11}} \frac{\partial g_{11}}{\partial x^1} \frac{\partial g_{22}}{\partial x^1} - \frac{1}{2g_{22}} \frac{\partial g_{11}}{\partial x^2} \frac{\partial g_{22}}{\partial x^2} &= 0.
\end{aligned} \tag{12}$$

Если компоненты g_{11} и g_{22} – постоянные, то, полагая $g_{11} = g_{22} = -1$, придем согласно системе (12) к четырем уравнениям (см. [2])

$$\frac{\partial^2 g_{00}}{\partial x^{1^2}} + \frac{\partial^2 g_{00}}{\partial x^{2^2}} = 0, \quad \frac{\partial^2 g_{00}}{\partial x^1 \partial x^3} = 0, \quad \frac{\partial^2 g_{00}}{\partial x^2 \partial x^3} = 0, \quad \frac{\partial^2 g_{00}}{\partial x^{3^2}} = 0.$$

В этом случае

$$g_{00} = Au + B_\alpha x^\alpha, \quad g_{11} = g_{22} = -1, \tag{13}$$

A и B_α – функции переменной x^0 и $u = u(x^1, x^2)$ – решение уравнения Лапласа.

Если же хотя бы одна из компонент g_{11} или g_{22} не является постоянной, то согласно системе (12) можно положить

$$\begin{aligned}
g_{00} &= A_1 \ln |a_1 x^1 + b_1| + A_2 \ln |a_2 x^2 + b_2| + Bx^3 + C, \\
g_{11} &= -(a_2 x^2 + b_2)^2, \quad g_{22} = -(a_1 x^1 + b_1)^2,
\end{aligned} \tag{14}$$

где A_1, A_2, B, C – функции переменной x^0 ; a_1, a_2, b_1, b_2 – постоянные, причем $a_1^2 + a_2^2 \neq 0$.

Чтобы убедиться, что решение (4), (14) является волновым, надо показать, что для этого решения выполняются условия (2).

В силу условий (4)–(7), соотношений (9) и уравнений (11) получаем для $R^{\alpha\beta}{}_{\mu\nu}$ и $\overset{*}{R}{}^{\alpha\beta}{}_{\mu\nu}$ (см. (2))

$$\begin{aligned}
R^{\overset{13}{\cdot\cdot}{}_{01}} &= -\frac{1}{g_{11}} R_{01,01}, & R^{\overset{23}{\cdot\cdot}{}_{01}} &= -\frac{1}{g_{22}} R_{01,02}, \\
R^{\overset{13}{\cdot\cdot}{}_{02}} &= -\frac{1}{g_{11}} R_{01,02}, & R^{\overset{23}{\cdot\cdot}{}_{02}} &= -\frac{1}{g_{22}} R_{02,02},
\end{aligned} \tag{15}$$

$$\begin{aligned}
\overset{*}{R}{}^{\overset{13}{\cdot\cdot}{}_{01}} &= -\overset{*}{R}{}^{\overset{23}{\cdot\cdot}{}_{02}} = \frac{1}{g_{11}g_{22}} R_{01,02}, & \overset{*}{R}{}^{\overset{13}{\cdot\cdot}{}_{02}} &= \frac{1}{g_{11}g_{22}} R_{02,02}, \\
\overset{*}{R}{}^{\overset{23}{\cdot\cdot}{}_{01}} &= -\frac{1}{g_{11}g_{22}} R_{01,01}.
\end{aligned} \tag{16}$$

Компоненты $R_{01,01}$, $R_{01,02}$, $R_{02,02}$ определяются равенствами (9), компоненты g_{11} и g_{22} – равенствами (14). Остальные компоненты $R_{\cdot\cdot\cdot\cdot}^{\alpha\beta\cdot\cdot}$ и $\bar{R}_{\cdot\cdot\cdot\cdot}^{\alpha\beta\cdot\cdot}$ (кроме тех, которые могут быть получены из компонент, указанных в (15) и (16), перестановкой индексов) равны нулю.

Из (15) и (16) следует, что

$$R_{\cdot\cdot\cdot\cdot}^{\alpha\beta\cdot\cdot} = R_{\cdot\cdot\cdot\cdot}^{\alpha\beta\cdot\cdot} = R_{\cdot\cdot\cdot\cdot}^{01\cdot\cdot} = R_{\cdot\cdot\cdot\cdot}^{02\cdot\cdot} = 0 \quad \text{для } \alpha = 0, 1, 2, 3; \quad \beta = 0, 1, 2, 3, \quad (17)$$

$$\bar{R}_{\cdot\cdot\cdot\cdot}^{\alpha\beta\cdot\cdot} = \bar{R}_{\cdot\cdot\cdot\cdot}^{\alpha\beta\cdot\cdot} = \bar{R}_{\cdot\cdot\cdot\cdot}^{01\cdot\cdot} = \bar{R}_{\cdot\cdot\cdot\cdot}^{02\cdot\cdot} = 0 \quad \text{для } \alpha = 0, 1, 2, 3; \quad \beta = 0, 1, 2, 3. \quad (18)$$

В силу (15)–(18) приходим к выводу, что $R_{\cdot\cdot\cdot\cdot}^{\alpha\beta\cdot\cdot}$ и $\bar{R}_{\cdot\cdot\cdot\cdot}^{\alpha\beta\cdot\cdot}$ применительно к решению (4), (14) удовлетворяют условиям (2). Таким образом, решение (4), (14) является волновым.

Согласно соотношениям (5) волновое решение (4), (14) удовлетворяет условию $g^{00} = 0$. Следовательно, в волновом решении (4), (14) переменная x^0 не имеет характера времени (см. [2]).

Перейдем в решении (4), (14) от переменной x^0 к переменной x'^0 , положив

$$x'^0 = x^0 + f(x^1, x^2, x^3), \quad x'^i = x^i \quad (i = 1, 2, 3). \quad (19)$$

Согласно (19) имеем

$$g'_{00} = g_{00}, \quad g'_{0i} = g_{0i} - f_i g_{00}, \quad g'_{ik} = g_{ik} - f_i g_{0k} - f_k g_{0i} + f_i f_k g_{00}, \quad (20)$$

где

$$f_i = \frac{\partial f(x^1, x^2, x^3)}{\partial x^i}. \quad (21)$$

Соответственно

$$g'^{00} = g^{00} + 2f_i g^{0i} + f_i f_k g^{ik}, \quad g'^{0i} = g^{0i} + f_k g^{ik}, \quad g'^{ik} = g^{ik}. \quad (22)$$

Латинские индексы принимают значения 1, 2, 3. По одинаковым латинским индексам предполагается суммирование от 1 до 3.

Применительно к условиям (4) получаем (см. (4) и (20))

$$\begin{aligned} g'_{00} &= g_{00}, & g'_{01} &= -f_1 g_{00}, & g'_{02} &= -f_2 g_{00}, & g'_{03} &= 1 - f_3 g_{00}, \\ g'_{11} &= g_{11} + f_1^2 g_{00}, & g'_{12} &= f_1 f_2 g_{00}, & g'_{13} &= -f_1 + f_1 f_3 g_{00}, \\ g'_{22} &= g_{22} + f_2^2 g_{00}, & g'_{23} &= -f_2 + f_2 f_3 g_{00}, & g'_{33} &= -2f_3 + f_3^2 g_{00} \end{aligned} \quad (23)$$

и (см. (5) и (22))

$$\begin{aligned} g'^{00} &= 2f_3 + f_1^2 g^{11} + f_2^2 g^{22} - f_3^2 g_{00}, & g'^{01} &= f_1 g^{11}, & g'^{02} &= f_2 g^{22}, \\ g'^{03} &= 1 - f_3 g_{00}, & g'^{11} &= g^{11}, & g'^{22} &= g^{22}, \\ g'^{33} &= -g_{00}, & g'^{12} &= g'^{13} = g'^{23} = 0. \end{aligned} \quad (24)$$

Из соотношений (24), примененных к функции

$$\tau' = x'^0 - f(x^1, x^2, x^3), \quad (25)$$

непосредственно следует, что

$$g'^{\mu\nu} \tau'_\mu \tau'_\nu = 0, \quad (26)$$

где

$$\tau'_\mu = \frac{\partial \tau'}{\partial x'^\mu}.$$

По одинаковым греческим индексам предполагается суммирование от 0 до 3.

Уравнение $\tau' = 0$ (см. (25)), т.е. уравнение $x'^0 - f(x^1, x^2, x^3) = 0$, является уравнением движущейся поверхности фронта гравитационной волны (см. (23) и (24)); входящие в правые части (23) и (24) функции f_i определяются равенством (21); компоненты тензора $g_{\mu\nu}$ определяются решением (4), (14), при этом в компоненте $g_{00} = g_{00}(x^0, x^1, x^2, x^3)$ надо положить $x^0 = \tau'$ (см. (19) и (25)).

Найдем закон сохранения для пространства, определяемого метрикой (4), (14). Построим тензор (см. [2])

$$h_{\mu\nu} = R_{\mu\alpha, \beta\nu} l^\alpha l^\beta, \quad (27)$$

где $R_{\mu\alpha, \beta\nu}$ — тензор Римана, соответствующий метрике рассматриваемого пространства, l^α — вектор, который применительно к метрике (4), (14) определяется равенствами

$$l^0 = -1, \quad l^1 = 0, \quad l^2 = 0, \quad l^3 = \frac{1}{2}g_{00}. \quad (28)$$

Для

$$l_\alpha = g_{\alpha\beta} l^\beta$$

имеем согласно (4) и (28)

$$l_0 = -\frac{1}{2}g_{00}, \quad l_1 = 0, \quad l_2 = 0, \quad l_3 = -1. \quad (29)$$

Из (28) и (29) с очевидностью следует, что вектор l^α является изотропным.

Применительно к решению (4), (14) получаем (см. (9) и (11))

$$\begin{aligned} R_{01,01} &= \frac{A_1 a_1^2 - A_2 a_2^2}{2(a_1 x^1 + b_1)^2}, & R_{01,02} &= \frac{(A_1 + A_2) a_1 a_2}{2(a_1 x^1 + b_1)(a_2 x^2 + b_2)}, \\ R_{02,02} &= -\frac{A_1 a_1^2 - A_2 a_2^2}{2(a_2 x^2 + b_2)^2}. \end{aligned} \quad (30)$$

Остальные компоненты тензора $R_{\alpha\beta, \mu\nu}$ (кроме тех, которые могут быть получены из компонент, указанных в (30), перестановкой нижних индексов) равны нулю. Равенства (30) справедливы при условии $a_1^2 + a_2^2 \neq 0$. Если же $a_1 = a_2 = 0$, то компоненты $R_{01,01}$, $R_{01,02}$, $R_{02,02}$ определяются непосредственно равенствами (9) и решением (4), (13).

В силу (9), (27) и (28) имеем

$$h_{11} = -R_{01,01}, \quad h_{12} = -R_{01,02}, \quad h_{22} = -R_{02,02}. \quad (31)$$

Остальные компоненты тензора $h_{\mu\nu}$ (кроме компоненты h_{21}) равны нулю.

Для

$$h^{\mu\nu} = g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} h_{\alpha\beta} \quad (32)$$

получаем согласно (9) и (31)

$$h^{11} = \frac{1}{g_{11}^2} h_{11}, \quad h^{12} = \frac{1}{g_{11}g_{22}} h_{12}, \quad h^{22} = \frac{1}{g_{22}^2} h_{22}. \quad (33)$$

Остальные компоненты тензора $h^{\mu\nu}$ (кроме компоненты h^{21}) равны нулю. Компоненты тензора $h_{\mu\nu}$ определяются равенствами (31). Компоненты g_{11} и g_{22} метрического тензора $g_{\mu\nu}$ определяются равенствами (14).

Для тензора $h^{\mu\nu}$ (см. (32) и (33)) имеет место равенство

$$\nabla_\nu h^{\mu\nu} = 0, \quad (34)$$

где ∇_ν означает ковариантную производную по переменной x^ν . В силу (34) для вектора

$$E^\mu = h^{\mu\nu} \nabla_\nu \varphi, \quad (35)$$

где функция φ удовлетворяет уравнению

$$h^{\mu\nu} \nabla_\mu \nabla_\nu \varphi = 0, \quad (36)$$

имеет место равенство

$$\nabla_\mu E^\mu = 0,$$

или

$$\frac{\partial \sqrt{-g} E^\mu}{\partial x^\mu} = 0, \quad (37)$$

g — определитель, составленный из компонент тензора $g_{\mu\nu}$; для метрики (4), (14)

$$g = -g_{11}g_{22}. \quad (38)$$

Равенства (15)–(29), (31)–(38) и связанные с ними утверждения полностью справедливы также и по отношению к решению (4), (13).

Соотношения (35)–(37) дают законы сохранения для пространств, метрики которых определяются решениями (4), (13) и (4), (14).

Найдем применительно к (4), (14) и (33) функцию φ (см. (35), (36)). Согласно (33) и (36) имеем

$$h^{ij} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^i \partial x^j} - \Gamma_{ij}^k h^{ij} \frac{\partial \varphi}{\partial x^k} = 0, \quad i, j, k = 1, 2. \quad (39)$$

В силу (8), (14), (30), (31), (33) и (36) приходим к уравнению

$$\begin{aligned} (A_1 a_1^2 - A_2 a_2^2) & \left[(a_1 x^1 + b_1)^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^{12}} - (a_2 x^2 + b_2)^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^{22}} - \right. \\ & \left. - a_1 (a_1 x^1 + b_1) \frac{\partial \varphi}{\partial x^1} + a_2 (a_2 x^2 + b_2) \frac{\partial \varphi}{\partial x^2} \right] + \\ & + 2(A_1 + A_2) a_1 a_2 \left[(a_1 x^1 + b_1)(a_2 x^2 + b_2) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^1 \partial x^2} - \right. \\ & \left. - a_2 (a_1 x^1 + b_1) \frac{\partial \varphi}{\partial x^1} - a_1 (a_2 x^2 + b_2) \frac{\partial \varphi}{\partial x^2} \right] = 0. \end{aligned} \quad (40)$$

Функция

$$\varphi = C_1 (a_1 x^1 + b_1)^2 (a_2 x^2 + b_2)^2 + C_2, \quad (41)$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные, удовлетворяет уравнению (40).

Таким образом, для пространства, определяемого метрикой (4), (14), сохраняющийся вектор E^μ (35) можно представить в виде

$$E^\mu = \lambda (a_1 x^1 + b_1)(a_2 x^2 + b_2) [(a_2 x^2 + b_2) h^{1\mu} + (a_1 x^1 + b_1) h^{2\mu}]. \quad (42)$$

Здесь $h^{1\mu}$ и $h^{2\mu}$ определяются равенствами (9), (14), (30), (31), (33).

Если же (см. (13)) наряду с условиями (4) имеют место равенства $g_{11} = g_{22} = -1$, то согласно (8) $\Gamma_{ij}^k = 0$ ($i, j, k = 1, 2$) и можно положить (см. [2])

$$\varphi = C_1 x^1 + C_2 x^2 + C_3, \quad (43)$$

где C_1, C_2 и C_3 — постоянные.

Сохраняющийся вектор E^μ (35) в этом случае имеет вид

$$E^\mu = \lambda_1 h^{1\mu} + \lambda_2 h^{2\mu}, \quad (44)$$

причем $h^{0\mu} = 0$ ($\mu = 0, 1, 2, 3$), $h^{i3} = 0$ ($i = 1, 2, 3$) и

$$h^{ij} = h_{ij} \quad (i, j = 1, 2), \quad (45)$$

где h_{ij} определяются равенствами (31), λ_1 и λ_2 — постоянные.

В переменных x'^0, x'^1, x'^2, x'^3 (см. (19)) решению (4), (14) отвечает метрика $g'_{\mu\nu}$ (23) и соответственно $g'^{\mu\nu}$ (24). Для l'^μ (см. (19) и (28)) имеем

$$l'^0 = -1 + \frac{1}{2} f_3 g_{00}, \quad l'^1 = 0, \quad l'^2 = 0, \quad l'^3 = \frac{1}{2} g_{00} \quad (46)$$

и для l'_μ —

$$l'_0 = -\frac{1}{2} g_{00}, \quad l'_1 = \frac{1}{2} f_1 g_{00}, \quad l'_2 = \frac{1}{2} f_2 g_{00}, \quad l'_3 = -1 + \frac{1}{2} f_3 g_{00}. \quad (47)$$

В связи с тем что компоненты тензора $h_{\mu\nu}$ (31) удовлетворяют условиям $h_{0\mu} = 0$ ($\mu = 0, 1, 2, 3$) и $h_{i3} = 0$ ($i = 1, 2, 3$), получаем (см. (4), (5))

$$h'_{\mu\nu} = h_{\mu\nu}. \quad (48)$$

Согласно соотношениям (19), (33) и условиям $h^{0\mu} = 0$ ($\mu = 0, 1, 2, 3$), $h^{i3} = 0$ ($i = 1, 2, 3$) имеем

$$\begin{aligned} h'^{00} &= f_i f_k h^{ik}, & h'^{0k} &= f_i h^{ik}, & h'^{ik} &= h^{ik}, & h'^{\mu 3} &= 0, \\ \mu &= 0, 1, 2, 3; & i &= 1, 2; & k &= 1, 2. \end{aligned} \quad (49)$$

Сохраняющемуся вектору E^μ ($E^0 = E^3 = 0$) в переменных x'^0, x'^1, x'^2, x'^3 (см. (19)) отвечает сохраняющийся вектор E'^μ , компоненты которого определяются равенствами

$$E'^0 = f_i E^i, \quad E'^i = E^i \quad (i = 1, 2, 3). \quad (50)$$

Под сохраняющимся вектором E^μ подразумевается вектор, который удовлетворяет дифференциальному закону сохранения (37). Исходя из теоремы Гаусса и дифференциального закона (37) можно сформулировать соответствующий интегральный закон сохранения (см. [3, 4]).

Сохраняющийся вектор E^μ (35) определяется метрикой $g_{\mu\nu}$ рассматриваемого пространства, тензором $h^{\mu\nu}$ (см. (27)–(34)) и функцией φ , удовлетворяющей уравнению (36).

Вектором E^μ характеризуются существенные аспекты (см. также соотношения (50)) рассматриваемых решений уравнений Эйнштейна.

Список литературы

- [1] *L. Bel.* Colloques internationaux centre national de la recherche scientifique. Paris, 1962.
- [2] *И. Г. Фиктенгольц.* ТМФ. 1993. Т. 97. № 1. С. 143–159.
- [3] *В. А. Фок.* Теория пространства, времени и тяготения. М.: Физматгиз, 1961.
- [4] *Л. Л. Ландау, Е. М. Лифшиц.* Теория поля. М.: Наука, 1988.

Поступила в редакцию 12.V.1996 г.

I. G. Fikhtengol'ts ON SOME WAVE SOLUTIONS CLASS OF EINSTEIN'S GRAVITY EQUATIONS

For Einstein's gravity equations the wave solutions class is found. The corresponding conservation law is obtained.