Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. П. Незнамов, Комментарий к статье А. Я. Силенко “Уравнение Дирака в представлении Фолди–Ваутхайзена, описывающее взаимодействие релятивистских частиц со спином $1/2$ с электромагнитным полем”, *ТМФ*, 1997, том 110, номер 3, 493–496

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf985>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.227.88.159

26 апреля 2023 г., 17:17:20

В. П. Незнамов

КОММЕНТАРИЙ К СТАТЬЕ А. Я. СИЛЕНКО
“УРАВНЕНИЕ ДИРАКА В ПРЕДСТАВЛЕНИИ
ФОЛДИ–ВАУТХАЙЗЕНА, ОПИСЫВАЮЩЕЕ
ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ РЕЛЯТИВИСТСКИХ ЧАСТИЦ
СО СПИНОМ $1/2$ С ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫМ ПОЛЕМ”¹⁾

В комментируемой статье утверждается, что впервые найдено уравнение Дирака в представлении Фолди–Ваутхайзена, описывающее взаимодействие релятивистских частиц со спином $1/2$ с внешним электромагнитным полем, справедливое в приближении слабого поля и в отличие от предыдущих исследований полученное с учетом производных всех порядков от потенциалов поля.

Взяться за перо автора комментария заставили следующие обстоятельства. Дело в том, что еще в 1988 г. автор опубликовал в научно-техническом сборнике “Вопросы атомной науки и техники (ВАНТ). Сер. теоретическая и прикладная физика” (1988. Вып. 2. С. 21–27) статью “Уравнение Дирака в представлении Фолди–Ваутхайзена (разложение по степеням заряда e)”. В данной статье описан формализм получения уравнения Дирака в представлении Фолди–Ваутхайзена в виде ряда по степеням заряда e при наличии общего внешнего электромагнитного поля (в том числе и зависящего от времени). В явном виде релятивистский гамильтониан H_{FW} выписан вплоть до членов, пропорциональных e^2 (включительно).

Далее, в 1989–1990 г. автор опубликовал в этом периодическом сборнике еще две статьи по этой же тематике: “Квантовая электродинамика в представлении Фолди–Ваутхайзена” (ВАНТ. 1989. Вып. 1. С. 3–7) и “Радиационные поправки к рассеянию электрона во внешнем поле в представлении Фолди–Ваутхайзена” (ВАНТ. 1990. Вып. 1. С. 30–33).

В первой из этих двух статей с помощью гамильтониана H_{FW} построена квантовая электродинамика в представлении Фолди–Ваутхайзена. В низших порядках теории возмущений рассчитан ряд квантово-электродинамических процессов.

В последней статье определены члены разложения гамильтониана H_{FW} , пропорциональные e^3 . В низших порядках теории возмущений выписаны матричные элементы процессов, с помощью которых после проведения перенормировки массы и заряда электрона можно вычислить аномальный магнитный момент электрона, лэмбовский сдвиг атомарных энергетических уровней, вклад в лэмбовский сдвиг поляризации вакуума.

¹⁾ТМФ. 1995. Т. 105. № 1. С. 46–54.

В представлении Фолди–Ваутхайзена отсутствует взаимодействие между реальными электронами и позитронами, и для таких процессов конечные результаты квантово-электродинамических расчетов совпадают с аналогичными результатами в дираковском представлении.

Для учета взаимодействия внешних электрон-позитронных пар в представлении Фолди–Ваутхайзена необходимо введение связи между решениями FW-преобразованных уравнений Дирака для электрона и позитрона. Такая связь введена автором в неопубликованной работе “К теории взаимодействующих полей в представлении Фолди–Ваутхайзена”. Основные результаты работы докладывались на 12-м семинаре по физике высоких энергий и теории поля (Протвино, 3–7 июля 1989 г.). В настоящее время работа оформлена в виде отчета РФЯЦ-ВНИИЭФ.

Таким образом, опубликованные в выпуске ТМФ, т. 105, № 1 результаты А. Я. Силенко являются частным случаем (H_{FW} при наличии слабого статического внешнего электромагнитного поля) более общих (H_{FW} при наличии электромагнитного поля $A_\mu(\vec{x}, t)$), ранее полученных и опубликованных результатов автора.

Немаловажно, что результаты автора проверены в расчетах конкретных процессов квантовой электродинамики. К сожалению, ссылок на работы автора в статье А. Я. Силенко нет.

Теперь обратимся к конкретным результатам работы А. Я. Силенко.

Утверждение А. Я. Силенко, что им впервые получен гамильтониан в представлении Фолди–Ваутхайзена с учетом производных всех порядков от потенциалов внешнего поля, неверно. Кроме работ автора, цитированных выше, можно привести ряд примеров, известных автору. Еще в 1954 г. Кейс получил замкнутое выражение для уравнения Дирака в представлении Фолди–Ваутхайзена при наличии статического внешнего магнитного поля $\vec{B} = \text{rot } \vec{A}$ (Phys. Rev. 1954. V. 95. № 5). В этом случае уравнение Дирака

$$i \frac{\partial \psi_D}{\partial t} = (\vec{\alpha}(\vec{p} - e\vec{A}) + \beta m) \psi_D$$

преобразуется в уравнение

$$i \frac{\partial \psi_{FW}}{\partial t} = \beta \sqrt{(\vec{p} - e\vec{A})^2 - e \cdot \vec{\sigma} \cdot \vec{B} + m^2}, \quad (1)$$

где $\hbar = c = 1$; α^i , β – матрицы Дирака; $\vec{\sigma} = \begin{pmatrix} \vec{\sigma} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \end{pmatrix}$ – четырехмерные матрицы Паули.

В 1977 г. Оше преобразовал уравнение Дирака со статическим электрическим полем в виде

$$i \frac{\partial \psi_D}{\partial t} = (\vec{\alpha} \vec{p} + \beta m + i \lambda \cdot \beta \vec{\alpha} \cdot \vec{\mathcal{E}}) \psi_D$$

в замкнутое выражение в представлении Фолди–Ваутхайзена (Phys. Rev. D. 1977. V. 15. № 8)

$$i \frac{\partial \psi_{FW}}{\partial t} = \beta \sqrt{\vec{p}^2 + \lambda \cdot \beta \cdot \vec{\sigma} (\vec{p} \times \vec{\mathcal{E}} - \vec{\mathcal{E}} \times \vec{p}) - \beta \cdot \lambda \vec{\nabla} \cdot \vec{\mathcal{E}} + \lambda^2 \vec{\mathcal{E}}^2 + m^2}. \quad (2)$$

Сопоставим теперь конечные результаты А. Я. Силенко с результатами, полученными ранее другими авторами. Возьмем, например, уравнение (1) с гамильтонианом

$$H_{FW} = \beta \sqrt{(\vec{p} - e\vec{A})^2 - e \vec{\sigma} \cdot \vec{B} + m^2}. \quad (3)$$

Для сопоставления с гамильтонианом (23) статьи А. Я. Силенко разложим (3) с точностью до линейных по e членов. Следуя Дираку (Лекции по квантовой теории поля. М.: Мир, 1971), запишем $H_{\text{FW}} = \beta(E + C)$, $E = \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}$, C – величина, зависящая от $\vec{A}$ и линейная по e ; тогда

$$\begin{aligned} H_{\text{FW}}^2 &= E^2 + C \cdot E + E \cdot C = E^2 - \vec{p} \cdot e\vec{A} - e\vec{A} \cdot \vec{p} - e\vec{\sigma} \cdot \vec{B}, \\ C \cdot E + E \cdot C &= -\vec{p} \cdot e\vec{A} - e\vec{A} \cdot \vec{p} - e\vec{\sigma} \cdot \vec{B}. \end{aligned}$$

В импульсном представлении

$$\begin{aligned} \langle \vec{p}' | C | \vec{p}'' \rangle &= \left\langle \vec{p}' \left| \frac{-\vec{p} \cdot e\vec{A} - e\vec{A} \cdot \vec{p} - e\vec{\sigma} \cdot \vec{B}}{E' + E''} \right| \vec{p}'' \right\rangle; \\ E' &= \sqrt{\vec{p}'^2 + m^2}, \quad E'' = \sqrt{\vec{p}''^2 + m^2}; \end{aligned}$$

тогда

$$\langle \vec{p}' | H_{\text{FW}} | \vec{p}'' \rangle = \beta E' \delta(\vec{p}' - \vec{p}'') + \beta \left\langle \vec{p}' \left| \frac{-\vec{p} \cdot e\vec{A} - e\vec{A} \cdot \vec{p} - e\vec{\sigma} \cdot \vec{B}}{E' + E''} \right| \vec{p}'' \right\rangle. \quad (4)$$

Аналогично матричный элемент для гамильтониана (23) в статье А. Я. Силенко в присутствии лишь статического магнитного поля, без добавления в уравнение Дирака членов, характеризующих наличие у частицы аномального магнитного момента ($\mu' = 0$), с учетом линейных по e членов в импульсном представлении имеет вид

$$\begin{aligned} \langle \vec{p}' | H_{\text{FW}} | \vec{p}'' \rangle &= \beta E' \delta(\vec{p}' - \vec{p}'') + \beta \left\langle \vec{p}' \left| \frac{-\vec{p} \cdot e\vec{A} - e\vec{A} \cdot \vec{p}}{E' + E''} \right| \vec{p}'' \right\rangle + \\ &+ \beta \left\langle \vec{p}' \left| \left(-\frac{e}{4E'} \cdot \vec{\sigma} \cdot \vec{B} - \vec{\sigma} \cdot \vec{B} \cdot \frac{e}{4E''} \right) \right| \vec{p}'' \right\rangle. \end{aligned} \quad (5)$$

В уравнении (5) члены, пропорциональные $e\vec{\sigma} \cdot \vec{B}$, вообще говоря, отличаются от соответствующих членов в (4) и совпадают лишь в нерелятивистском случае ($E \rightarrow m + \frac{\vec{p}^2}{2m}$; $\vec{p}^2 A^i, \vec{p}^2 B^i \rightarrow 0$).

Сопоставим теперь гамильтониан в представлении Фолди–Ваутхайзена, полученный автором в 1988 г., и гамильтониан в работе А. Я. Силенко в присутствии внешних статических электрического и магнитного полей и $\mu' = 0$ (опять будем учитывать лишь линейные по e члены).

Матричный элемент для гамильтониана автора данной заметки имеет вид

$$\begin{aligned} \langle \vec{p}' | H_{\text{FW}} | \vec{p}'' \rangle &= \beta E' \delta(\vec{p}' - \vec{p}'') + \beta \left\langle \vec{p}' \left| \frac{-\vec{p} \cdot e\vec{A} - e\vec{A} \cdot \vec{p} - e\vec{\sigma} \cdot \vec{B}}{E' + E''} \right| \vec{p}'' \right\rangle + \\ &+ \left\langle \vec{p}' \left| \frac{R'}{R' + R''} \frac{1}{E' + E''} \left((E' + m) A_0 + \frac{\vec{\alpha} \cdot \vec{p}'}{E' + m} A_0 \vec{\alpha} \cdot \vec{p}'' \right) \right| \vec{p}'' \right\rangle + \\ &+ \left\langle \vec{p}' \left| \frac{R''}{R' + R''} \frac{1}{E' + E''} \left(A_0 (E'' + m) + \vec{\alpha} \cdot \vec{p}' A_0 \frac{\vec{\alpha} \cdot \vec{p}''}{E'' + m} \right) \right| \vec{p}'' \right\rangle, \end{aligned} \quad (6)$$

здесь $R = \left(\frac{E+m}{2E}\right)^{1/2}$.

Матричный элемент для гамильтониана А. Я. Силенко имеет вид

$$\begin{aligned}
 \langle \vec{p}' | H_{\text{FW}} | \vec{p}'' \rangle = & \beta E' \delta(\vec{p}' - \vec{p}'') + \beta \left\langle \vec{p}' \left| \frac{-\vec{p} \cdot e \vec{A} - e \vec{A} \cdot \vec{p}}{E' + E''} \right| \vec{p}'' \right\rangle - \\
 & - \beta \left\langle \vec{p}' \left| \left(\frac{e}{4E'} \vec{\sigma} \cdot \vec{B} + \vec{\sigma} \cdot \vec{B} \cdot \frac{e}{4E''} \right) \right| \vec{p}'' \right\rangle + \langle \vec{p}' | e A_0 | \vec{p}'' \rangle + \\
 & + \left\langle \vec{p}' \left| \left(\frac{1}{8E'(E' + m)} (\Delta A_0 - 2\vec{\sigma}(\mathcal{E} \times \vec{p})) + \right. \right. \right. \\
 & \left. \left. + (\Delta A_0 - 2\vec{\sigma}(\vec{\mathcal{E}} \times \vec{p})) \frac{1}{8E''(E'' + m)} \right) \right| \vec{p}'' \right\rangle. \quad (7)
 \end{aligned}$$

Так же как и в предыдущем примере, выражения (6) и (7) совпадают лишь в нерелятивистском случае.

Поступила в редакцию 14.III.1996 г.