Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. И. Кириллов, Производящие функционалы S -матрицы и функций Швингера в WN-анализе. I, *ТМФ*, 1997, том 111, номер 1, 3–14

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf986>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.80.253.173

26 апреля 2023 г., 15:37:35

А. И. Кириллов*

ПРОИЗВОДЯЩИЕ ФУНКЦИОНАЛЫ S -МАТРИЦЫ И ФУНКЦИЙ ШВИНГЕРА В WN-АНАЛИЗЕ. I

Показано, что производящие функционалы S -матрицы и функций Швингера являются U -функционалами бесконечномерного анализа в пространствах с гауссовой мерой. Продемонстрировано применение этого результата при снятии регуляризаций.

ВВЕДЕНИЕ

Известны два математически строгих подхода к решению проблем, возникающих из-за сингулярной природы основных объектов квантовой теории поля. Первый – это метод перенормировок [1]. Он применяется в рамках теории возмущений. Второй подход – аксиоматический метод Боголюбова [2]. Его основным объектом является производящий функционал S -матрицы. В данной работе установлено свойство этого функционала, которое следует из условия унитарности. Оказывается, что производящий функционал функций Швингера также обладает таким свойством. Как следствие возникает возможность применять к основным функционалам квантовой теории поля методы математического анализа в пространствах с гауссовыми мерами, т.е. так называемого WN-анализа (от английских слов White Noise) [3, 4]. Цель данной статьи – исследовать эффективность этих методов.

Статья организована следующим образом. В разделах 1 и 2 рассматриваются производящие функционалы элементов S -матрицы и функций Швингера, соответственно. Показано, что эти функционалы удовлетворяют неравенствам, из которых следует, что они являются так называемыми U -функционалами WN-анализа. Основы WN-анализа и свойства U -функционалов кратко изложены в разделе 3. В разделе 4 описано применение методов WN-анализа для регуляризации функционалов. Во второй части данной статьи WN-анализ будет применяться для исследования функций Швингера.

1. ПРОИЗВОДЯЩИЙ ФУНКЦИОНАЛ ЭЛЕМЕНТОВ S -МАТРИЦЫ

Для того чтобы не обременять изложение деталями непринципиального характера, мы ограничимся рассмотрением упрощенной модели, в которой фигурируют только

*Московский энергетический институт, Высший колледж математической физики Независимого Московского университета, Москва, 105835, Красноказарменная, 14. E-mail: vm@mpei-rt.msk.su

нейтральные скалярные частицы одного типа. Обозначим через

$$S_{m,n}(\bar{p}_1, \dots, \bar{p}_m; \bar{q}_1, \dots, \bar{q}_n) = (\Psi_{\text{in}}(\bar{p}_1, \dots, \bar{p}_m), \Psi_{\text{out}}(\bar{q}_1, \dots, \bar{q}_n))$$

элемент S -матрицы, который описывает переход in-частиц с импульсами $\bar{p}_1, \dots, \bar{p}_m \in \mathbb{R}^3$ в out-частицы с импульсами $\bar{q}_1, \dots, \bar{q}_n \in \mathbb{R}^3$. Матричный элемент $S_{m,n}$ — это комплекснозначная обобщенная функция умеренного роста, симметричная по переменным $\bar{p}_1, \dots, \bar{p}_m$ и $\bar{q}_1, \dots, \bar{q}_n$ в отдельности. Оператор рассеяния $\hat{S}$ выражается через матричные элементы $S_{m,n}$ следующим образом:

$$\begin{aligned} \hat{S} = 1 + \sum_{m,n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{m!n!}} \int_{\mathbb{R}^{3(m+n)}} K_{m,n}(\bar{p}_1, \dots, \bar{p}_m; \bar{q}_1, \dots, \bar{q}_n) \times \\ \times \prod_{j=1}^m \hat{a}^+(\bar{p}_j) d\bar{p}_j \prod_{k=1}^n \hat{a}^-(\bar{q}_k) d\bar{q}_k, \end{aligned} \quad (1)$$

здесь

$$\begin{aligned} K_{m,n}(\bar{p}_1, \dots, \bar{p}_m; \bar{q}_1, \dots, \bar{q}_n) = \sum_{j=0}^{m \wedge n} \frac{(-1)^j}{j! \sqrt{(m-j)!(n-j)!}} \times \\ \times S_{m-j,n-j}(\bar{p}_1, \dots, \bar{p}_{m-j}; \bar{q}_1, \dots, \bar{q}_{n-j}) \prod_{l=1}^j \delta(\bar{p}_{m-j+l} - \bar{q}_{n-j+l}), \end{aligned} \quad (2)$$

$m \wedge n = \min(m, n)$, $\hat{a}^+$ и $\hat{a}^-$ — операторы рождения и уничтожения, для которых

$$\begin{aligned} [\hat{a}^-(\bar{q}), \hat{a}^+(\bar{p})] = \delta(\bar{q} - \bar{p}), \\ \Psi_{\text{in}}(\bar{p}_1, \dots, \bar{p}_m) = (m!)^{-1/2} \hat{a}^+(\bar{p}_1) \dots \hat{a}^+(\bar{p}_m) \Omega, \end{aligned}$$

Ω — вакуумное состояние.

Оператор in-поля $\hat{\varphi}$, ассоциированный с рассматриваемыми частицами, выражается через $\hat{a}^+$ и $\hat{a}^-$ следующим образом:

$$\begin{aligned} \hat{\varphi}(x) = \hat{\varphi}^+(x) + \hat{\varphi}^-(x), \\ \hat{\varphi}^{\pm}(x) = (2\pi)^{-3/2} \int_{\mathbb{R}^4} dk e^{\pm i k x} \delta(k^2 - \mu^2) \hat{\varphi}^{\pm}(k), \\ \hat{\varphi}^{\pm}(x) = (2\pi)^{-3/2} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{d\bar{k}}{\sqrt{2\omega(\bar{k})}} e^{\pm i k x} \hat{a}^{\pm}(\bar{k}), \end{aligned}$$

где $kx = k^0 x^0 - \bar{k}\bar{x}$, $k^0 = \omega(\bar{k}) = (\bar{k}^2 + \mu^2)^{1/2}$ и μ — масса частиц.

Обратно,

$$\hat{a}^{\pm}(\bar{k}) = \mp i (2\pi)^{-3/2} (2\omega)^{-1/2} \int_{\mathbb{R}^3} d\bar{x} e^{\mp i k x} \overleftrightarrow{\partial}_0 \hat{\varphi}(x), \quad (3)$$

где $\partial_0 = \partial/\partial x^0$ и $A \overleftrightarrow{\partial}_0 B = A \partial_0 B - (\partial_0 A) B$.

Используя (3), можно выразить оператор $\hat{S}$ через операторы поля $\hat{\varphi}$ и представить формулу (1) в виде

$$\hat{S} = 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^{3n}} A_n(x_1, \dots, x_n) \prod_{j=1}^n \frac{\overleftrightarrow{\partial}}{\partial x_j^0} \prod_{k=1}^n \hat{\varphi}(x_k) d\bar{x}_k, \quad (4)$$

где

$$\begin{aligned} A_n(x_1, \dots, x_n) = & i^n (2\pi)^{-3n/2} \sum_{m=1}^{n-1} (-1)^m \int_{\mathbb{R}^{3n}} K_{m,n-m}(\bar{p}_1, \dots, \bar{p}_m; \bar{q}_1, \dots, \bar{q}_{n-m}) \times \\ & \times \prod_{j=1}^m \frac{e^{-ip_j x_j}}{\sqrt{2\omega(\bar{p}_j)}} d\bar{p}_j \prod_{k=1}^{n-m} \frac{e^{iq_k x_{k+m}}}{\sqrt{2\omega(\bar{q}_k)}} d\bar{q}_k. \end{aligned} \quad (5)$$

Суммирование в (4) начинается с $n = 2$, поскольку из-за стабильности вакуумного и одночастичных состояний $A_1 = 0$ (см., например, [5, гл. I.3.1]).

Поскольку оператор $\hat{\varphi}$ удовлетворяет уравнению

$$(\partial_0^2 - \Delta + \mu^2) \hat{\varphi} = 0,$$

слагаемые в (4) не зависят от переменных x_j^0 . Поэтому (4) можно представить в виде

$$\hat{S} = 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^{4n}} T_n(x_1^0, \dots, x_n^0) A_n(x_1, \dots, x_n) \prod_{j=1}^n \frac{\overleftrightarrow{\partial}}{\partial x_j^0} \prod_{k=1}^n \hat{\varphi}(x_k) dx_k, \quad (6)$$

где каждая функция T_n такова, что

$$\int_{\mathbb{R}^n} T_n(x_1^0, \dots, x_n^0) dx_1^0 \dots dx_n^0 = 1.$$

ЗАМЕЧАНИЕ. В формуле (6) операторы $\overleftrightarrow{\partial}/\partial x_j^0$ не действуют на функции T_n .

Выберем функции T_n гладкими и симметричными. Тогда в (6) допустимо интегрирование по частям. Оно дает формулу

$$\hat{S} = 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^{4n}} B_n(x_1, \dots, x_n) \prod_{j=1}^n \hat{\varphi}(x_j) dx_j, \quad (7)$$

в которой

$$B_n(x_1, \dots, x_n) = (-1)^n \prod_{j=1}^n \left(\frac{\partial}{\partial y_j} + 2 \frac{\partial}{\partial x_j^0} \right) A_n(x_1, \dots, x_n) T(y_1, \dots, y_n) \Big|_{y_j=x_j^0}. \quad (8)$$

Очевидно, что только симметричная часть функций B_n вносит вклад в (7). Поэтому вся необходимая нам информация о B_n содержится в функционале

$$S_0(f) = 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^{4n}} B_n(x_1, \dots, x_n) \prod_{j=1}^n f(x_j) dx_j, \quad (9)$$

определенном на некотором пространстве вещественных пробных функций. Следующая теорема показывает, что $S_0(f)$ определен, по крайней мере, на пространстве быстроубывающих функций $\mathcal{S}(\mathbb{R}^4)$.

ТЕОРЕМА 1. В силу унитарности оператора $\widehat{S}$ справедливы неравенства

$$\left| \int_{\mathbb{R}^{4n}} B_n(x_1, \dots, x_n) \prod_{j=1}^n f(x_j) dx_j \right| \leq \mathcal{B} \|T_n\|_{C^1} 3^n \|f\|_*^n (n!)^{-1/2}, \quad (10)$$

где $\mathcal{B}$ – некоторая положительная постоянная,

$$\|T_n\|_{C^1} = \sup \left\{ |T_n(x_1^0, \dots, x_n^0)| + \sum_{j=1}^n \left| \frac{\partial}{\partial x_j^0} T_n(x_1^0, \dots, x_n^0) \right| \right\}$$

и

$$\|f\|_* = \sup_{x \in \mathbb{R}^4} (1 + |x|^2)^3 [|f(x)| + |\Delta f(x)|].$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из (5) и (2) следует, что $\forall g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^4)$

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^{4n}} A_n(x_1, \dots, x_n) \prod_{j=1}^n g(x_j) dx_j &= i^n \sum_{m=1}^{n-1} (-1)^m \sum_{j=0}^{m \wedge n} \frac{(-1)^j \|\tilde{g}\|_L^{2j}}{j! \sqrt{(m-j)! (n-m-j)!}} \times \\ &\times \int_{\mathbb{R}^{3(n-2j)}} S_{m-j, n-m-j}(\bar{p}_1, \dots, \bar{p}_{m-j}; \bar{q}_1, \dots, \bar{q}_{n-m-j}) \times \\ &\times \prod_{r=1}^{m-j} \frac{\tilde{g}(p_r)}{\sqrt{2\omega(\bar{p}_r)}} d\bar{p}_r \prod_{s=1}^{n-m-j} \frac{\tilde{g}(-q_s)}{\sqrt{2\omega(\bar{q}_s)}} d\bar{q}_s, \end{aligned} \quad (11)$$

здесь

$$\tilde{g}(p) = (2\pi)^{-2} \int_{\mathbb{R}^4} e^{ipx} g(x) dx$$

и

$$\|\tilde{g}\|_L^2 = \int_{\mathbb{R}^3} |\tilde{g}(\omega(\bar{k}), \bar{k})|^2 \frac{d\bar{k}}{2\omega(\bar{k})}. \quad (12)$$

Из унитарности оператора $\widehat{S}$ следует, что

$$\left| \int_{\mathbb{R}^{3(k+l)}} S_{k,l}(\bar{p}_1, \dots, \bar{p}_m; \bar{q}_1, \dots, \bar{q}_n) \prod_{r=1}^k \frac{\tilde{g}(p_r)}{\sqrt{2\omega(\bar{p}_r)}} d\bar{p}_r \prod_{s=1}^l \frac{\tilde{g}(-q_s)}{\sqrt{2\omega(\bar{q}_s)}} d\bar{q}_s \right| \leq \|\tilde{g}\|_L^{k+l}. \quad (13)$$

Сопоставляя (11) и (13), получаем неравенство

$$\left| \int_{\mathbb{R}^{4n}} A_n(x_1, \dots, x_n) \prod_{j=1}^n g(x_j) dx_j \right| \leq C_n \|\tilde{g}\|_L^n, \quad (14)$$

в котором

$$C_n = \sum_{m=1}^{n-1} \sum_{j=0}^{m \wedge (n-m)} \frac{1}{j! \sqrt{(m-j)! (n-m-j)!}}. \quad (15)$$

Для оценки C_n воспользуемся следующей формулой для Γ -функции Эйлера и ее логарифмической производной ψ :

$$\frac{d}{dz} \log \Gamma(z) \Gamma(u-z) = \psi(z) - \psi(u-z) = \int_0^1 \frac{t^{u-z-1} - t^{z-1}}{1-t} dt.$$

Очевидно, что $\Gamma(z)\Gamma(u-z)$ достигает минимума в точке $u/2$, поэтому

$$\Gamma(z)\Gamma(u-z) \geq \Gamma(u/2)^2,$$

откуда при $z = m-j+1$, $u = n-2j+2$ получаем

$$(m-j)!(n-m-j)! \geq \Gamma(n/2-j+1)^2.$$

Следовательно,

$$j! \sqrt{(m-j)!(n-m-j)!} \geq \Gamma(j+1)\Gamma(n/2-j+1) \geq \Gamma(n/4+1)^2.$$

Теперь с учетом (15) имеем

$$C_n \leq \frac{n^2}{2} \Gamma(n/4+1)^{-2}.$$

По формуле Стирлинга для некоторой положительной постоянной C находим

$$C_n \leq C 3^n (n!)^{-1/2}.$$

Из (12) следует, что

$$\begin{aligned} \|\tilde{g}\|_L &\leq a \sup_{p \in \mathbb{R}^3} |\omega(\bar{p})^2 \tilde{g}(\omega(\bar{p}), \bar{p})| \leq a \sup_{p \in \mathbb{R}^4} |\omega(\bar{p})^2 \tilde{g}(p)| \leq \\ &\leq b \sup_{x \in \mathbb{R}^4} (1 + |x|^2)^3 [|g(x)| + |\Delta g(x)|]. \end{aligned} \quad (16)$$

Сопоставляя (8), (14) и (16), получаем (10). Теорема 1 доказана.

Выберем функции T_n так, чтобы для некоторого $Q > 0$ и каждого $n \in \mathbb{N}$ выполнялось неравенство

$$3^n \|T_n\|_{C^1} \leq Q^n.$$

Тогда (10) можно представить в виде

$$\left| \int_{\mathbb{R}^{4n}} B_n(x_1, \dots, x_n) \prod_{j=1}^n f(x_j) dx_j \right| \leq B Q^n \|f\|_*^n (n!)^{-1/2}. \quad (17)$$

Это неравенство приводит к следующим важным свойствам функционала (9):

- 1) ряд (9) сходится для любой f из пополнения $\mathcal{S}_*(\mathbb{R}^4)$ пространства $\mathcal{S}(\mathbb{R}^4)$ по норме $\|\cdot\|_*$;
- 2) $\forall f \in \mathcal{S}_*(\mathbb{R}^4)$ функция $u \in \mathbb{R} \rightarrow S_0(u \cdot f)$ аналитически продолжается на всю комплексную плоскость $\mathbb{C}$;
- 3) существуют $C > 0$ и $K > 0$ такие, что $\forall f \in \mathcal{S}_*(\mathbb{R}^4)$, $\forall z \in \mathbb{C}$

$$|S_0(zf)| \leq C \exp[K|z|^2 \|f\|_*^2].$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Неравенство (17) и утверждения 1–3 справедливы для любого ограниченного оператора в фоковском пространстве. Следовательно, эти результаты дополняют теоремы Березина [6, гл. I.2.10] и Обаты [4, гл. 4.4 и 4.5] о нормальных формах ограниченных операторов.

Обсудим теперь связь между $S_0(f)$ и тем функционалом, о котором говорится в аксиомах Боголюбова.

В аксиомах Боголюбова производящий функционал элементов S -матрицы имеет тот же вид, что и $S_0(f)$, т. е.

$$S(f) = 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^{4n}} S_n(x_1, \dots, x_n) \prod_{j=1}^n f(x_j) dx_j. \quad (18)$$

Однако коэффициенты S_n в (18) должны удовлетворять условиям унитарности, причинности и инвариантности [7, гл. 4.3.3], поэтому

$$R_n(x_1, \dots, x_n) = S_n(x_1, \dots, x_n) - B_n(x_1, \dots, x_n) \neq 0,$$

т.к. коэффициенты B_n неинвариантны относительно временных сдвигов. Всюду далее предполагается, что поправки R_n таковы, что коэффициенты S_n удовлетворяют неравенству типа (17). Тогда боголюбовский функционал $S(f)$ обладает свойствами 1–3.

2. ПРОИЗВОДЯЩИЙ ФУНКЦИОНАЛ ФУНКЦИЙ ШВИНГЕРА

Обозначим через $\widehat{\varphi}_W$ оператор квантового поля, интерполирующего между асимптотическими полями $\widehat{\varphi}$ и $\widehat{S}\widehat{\varphi}\widehat{S}^{-1}$. Функции Вайтмана

$$W_n(x_1, \dots, x_n) = (\Omega, \widehat{\varphi}_W(x_1) \dots \widehat{\varphi}_W(x_n) \Omega)$$

можно аналитически продолжить в евклидову область чисто мнимых значений времени $\tau_1 = ix_1^0, \dots, \tau_n = ix_n^0$. Сужения $\mathfrak{S}_n$ таких продолжений на области, в которых $(\tau_k, \bar{x}_k) \neq (\tau_j, \bar{x}_j)$ ($k \neq j$), называются (несовпадающими) функциями Швингера. В этом смысле

$$\mathfrak{S}_n(x_1, \dots, x_n) = W_n((ix_1^0, \bar{x}_1), \dots, (ix_n^0, \bar{x}_n)).$$

Каждая функция Швингера $\mathfrak{S}_n$ является обобщенной функцией умеренного роста, определенной на подпространстве $\mathcal{S}_{\neq}(\mathbb{R}^{4n})$ пространства $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{4n})$, состоящем из функций с носителями в области $\{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{4n} : x_j \neq x_k\}$. Более того, согласно сильной аксиоме регулярности $E0''$ Остервальдера и Шредера [8] каждая функция Швингера $\mathfrak{S}_n$ может быть распространена на все пространство $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{4n})$ таким образом, чтобы для некоторой непрерывной нормы $\|\cdot\|_q$ на $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{4n})$ для некоторых $B > 0$, $L > 0$ любой функции $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{4n})$ и любого $n \in \mathbb{N}$ выполнялось неравенство

$$\left| \int_{\mathbb{R}^{4n}} \mathfrak{S}_n(x_1, \dots, x_n) \prod_{j=1}^n f(x_j) dx_j \right| \leq BL^n \|f\|_q^n (n!)^{1/2+r}. \quad (19)$$

Доказано, что r равно нулю в моделях $P(\varphi)_2$ [9], Хоег-Крона [10] и в модели типа $\sin$ -Гордон при произвольной размерности пространства-времени [11]. Если $r = 0$, то производящий функционал функций Швингера

$$G_0(f) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_{\mathbb{R}^{4n}} \mathfrak{S}_n(x_1, \dots, x_n) \prod_{j=1}^n f(x_j) dx_j \quad (20)$$

имеет свойства 1–3 (см. раздел 1), в которых $\|\cdot\|_* = \|\cdot\|_q$.

Если в (19) $r > 0$, то следует заменить определение (20) следующим:

$$G_r(f) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n!)^{1+r}} \int_{\mathbb{R}^{4n}} \mathfrak{S}_n(x_1, \dots, x_n) \prod_{j=1}^n f(x_j) dx_j.$$

Такой функционал обладает свойствами 1–3.

3. ОСНОВЫ WN-АНАЛИЗА

Предметом WN-анализа [3, 4] (см. также [12]) являются элементы гильбертова пространства $(L^2) = L^2(\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d), \gamma)$, где $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ – пространство Соболева–Шварца вещественных обобщенных функций умеренного роста и γ – так называемая WN-мера, определяемая ее преобразованием Фурье:

$$f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \rightarrow \int_{\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)} e^{i\langle \varphi, f \rangle} d\gamma(\varphi) = e^{-\|f\|^2/2}.$$

Здесь $\langle \cdot, \cdot \rangle$ обозначает спаривание $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ с $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ и $\|\cdot\|$ – норму в $L^2(\mathbb{R}^d)$. Пространства основных функций $(\mathcal{S})$ и распределений $(\mathcal{S})'$ в WN-анализе образуют вместе с (L^2) тройку Гельфанда $(\mathcal{S}) \subset (L^2) \subset (\mathcal{S})'$. По определению пространство $(\mathcal{S})$ содержит функцию $\Phi: \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d) \rightarrow \mathbb{C}$ тогда и только тогда, когда существует последовательность $F_0 \in \mathbb{C}$, $F_1: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}, \dots$, $F_n: \mathbb{R}^{nd} \rightarrow \mathbb{C}, \dots$, удовлетворяющая следующим четырем условиям:

- 1) $\forall n \in \mathbb{N}$ функции $\operatorname{Re} F_n$ и $\operatorname{Im} F_n$ принадлежат $\bigcap_{p \in \mathbb{N}} \mathcal{D}((\hat{A}^p)^{\otimes n})$, где $\mathcal{D}((\hat{A}^p)^{\otimes n})$ – область определения $(\hat{A}^p)^{\otimes n}$ в $L^2(\mathbb{R}^{nd})$ и $\hat{A}$ – замыкание оператора $1 - \Delta + x^2$ в $L^2(\mathbb{R}^d)$;
- 2) $\forall n \in \mathbb{N}$ функция F_n симметрична по n аргументам;
- 3) для любого натурального числа p

$$\sum_{n=0}^{\infty} n! \left\{ \|(\hat{A}^p)^{\otimes n} \operatorname{Re} F_n\|_{L^2(\mathbb{R}^{nd})}^2 + \|(\hat{A}^p)^{\otimes n} \operatorname{Im} F_n\|_{L^2(\mathbb{R}^{nd})}^2 \right\} < \infty;$$

- 4) для γ -почти всех $\varphi \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$

$$\Phi(\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \langle \varphi^{\otimes n}, \operatorname{Re} F_n \rangle + i \langle \varphi^{\otimes n}, \operatorname{Im} F_n \rangle \right\}, \quad (21)$$

где $:\varphi^{\otimes 0}: = 1$, $:\varphi^{\otimes 1}: = \varphi \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ и

$$:\varphi^{\otimes n}: = :\varphi^{\otimes(n-1)}:\widehat{\otimes}\varphi - (n-1):\varphi^{\otimes(n-2)}:\widehat{\otimes}\tau \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^{nd}) \quad \text{при } n \geq 2, \quad (22)$$

здесь $\widehat{\otimes}$ обозначает симметрическое тензорное произведение и τ – спаривание, т.е. $\langle \tau, f \otimes g \rangle = \langle f, g \rangle$.

Элементами пространства $(\mathcal{S})$ являются, например, функции бесконечномерного аргумента $\varphi \rightarrow \langle \varphi, f \rangle^k$ ($k = 1, 2, \dots$) и $\varphi \rightarrow \exp[z\langle \varphi, f \rangle]$ ($z \in \mathbb{C}$) при любой $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.

Пространство обобщенных функций $(\mathcal{S})'$ в WN-анализе – это пространство, топологически сопряженное к $(\mathcal{S})$ относительно билинейной формы $\langle\langle \cdot, \cdot \rangle\rangle$, сужение которой на $(L^2) \times (\mathcal{S})$ совпадает со скалярным произведением в (L^2) . Элементы пространства $(\mathcal{S})'$ называются *распределениями Хиды*. Например, пространству $(\mathcal{S})'$ принадлежат так называемые WN-мономы

$$:\dot{B}(x_1) \dots \dot{B}(x_n): = \langle \varphi, \delta_{x_1} \rangle \dots \langle \varphi, \delta_{x_n} \rangle,$$

где δ_{x_k} – δ -функция Дирака, сосредоточенная в точке x_k , и $k = 1, \dots, n$. Нетрудно проверить, что $\forall \Phi \in (\mathcal{S})$

$$\langle\langle :\dot{B}(x_1) \dots \dot{B}(x_n):, \Phi \rangle\rangle = n! F_n(x_1, \dots, x_n),$$

здесь F_n – та же самая функция, что и в разложении (21).

Из (22) следует, что $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$

$$:\langle \varphi, f \rangle^n: = \langle :\varphi^{\otimes n}:, f^{\otimes n} \rangle = \sum_{m=0}^{[n/2]} \frac{n!}{m!(n-2m)!} (-\|f\|^2/2)^m \langle \varphi, f \rangle^{n-2m}.$$

Поэтому $\forall z \in \mathbb{C}$, $\forall f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$

$$:e^{z\langle \varphi, f \rangle}: = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} :\langle \varphi, f \rangle^n: = e^{z\langle \varphi, f \rangle - z^2 \|f\|^2/2}.$$

Операция $:$ предполагается линейной и непрерывной. Она называется в WN-анализе *виковым упорядочением*. Такое название естественно, поскольку нетрудно проверить, что $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall f_1, \dots, f_n \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$

$$:\langle \varphi, f_1 \rangle \dots \langle \varphi, f_n \rangle: = \prod_{k=1}^n \left(\langle \varphi, f_k \rangle - \frac{\partial}{\partial f_k} \right) 1, \quad (23)$$

где $\partial/\partial f_k$ обозначает производную по направлению f_k , т.е.

$$\frac{\partial \Phi}{\partial f}(\varphi) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\Phi(\varphi + tf) - \Phi(\varphi)}{t}.$$

Заметим теперь, что в (23) $\langle \varphi, f_k \rangle - \partial/\partial f_k$ – операторы рождения $\hat{a}^+(f_k)$ и функция $\varphi \rightarrow 1$ – вакуумный вектор Ω при функциональной реализации фоковского пространства. Соответственно $\langle \varphi, f_k \rangle - \partial/\partial f_k$ – оператор поля $\hat{\varphi}(f_k)$. Поэтому (23) есть не что иное, как конкретное представление равенства

$$:\hat{\varphi}(f_1) \dots \hat{\varphi}(f_n): \Omega = \hat{a}^+(f_1) \dots \hat{a}^+(f_n) \Omega,$$

в котором $:$ обозначает виково упорядочение квантовой теории поля.

В WN-анализе важную роль играет так называемое S -преобразование, которое определяется для всякого распределения Хиды $\Phi \in (\mathcal{S})'$ как функция

$$f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \rightarrow U[\Phi](f) = \langle \langle \Phi, :e^{\langle \cdot, f \rangle} : \rangle \rangle. \quad (24)$$

S -преобразования распределений называются U -функционалами.

Операция, обратная к S -преобразованию, – это некоторое обобщение викова упорядочения. Подробнее о нем пойдет речь во второй части статьи. Здесь заметим только, что при определенных условиях справедливы формулы

$$:\Phi(\varphi): = \int_{\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)} \Phi(\varphi + i\psi) d\gamma(\psi)$$

или

$$:\Phi: = e^{-\Delta/2} \Phi,$$

где

$$\Delta \Phi = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial f_n^2}$$

– бесконечномерный аналог оператора Лапласа.

В [9] показано, что отображение $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \rightarrow \Phi(f) \in \mathbb{C}$ является U -функционалом тогда и только тогда, когда оно имеет свойства 1–3, о которых говорилось в разделе 1. Таким образом мы приходим к главному выводу данной статьи: *производящие функционалы $S_0(f)$, $G_r(f)$ и предположительно $S(f)$ являются U -функционалами*, т.е. они представляют собой S -преобразования некоторых распределений Хиды.

В следующем разделе мы обсудим применение полученного результата в задаче о регуляризации.

4. СТРУКТУРА РАСПРЕДЕЛЕНИЙ ХИДЫ И РЕГУЛЯРИЗАЦИИ

Подобно обобщенным функциям умеренного роста, распределения Хиды являются обобщенными производными обычных функционалов $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d) \rightarrow \mathbb{C}$. Именно, для всякого $\Phi \in (\mathcal{S})'$ существуют $p \in \mathbb{N}$ и $\mathcal{F} \in L^2(\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d), \gamma)$ такие, что $\forall Q \in (\mathcal{S})$

$$\langle \langle \Phi, Q \rangle \rangle = \int_{\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)} \mathcal{F}(\varphi) \Gamma(\hat{A}^p) Q(\varphi) d\gamma(\varphi). \quad (25)$$

Здесь $\Gamma(\hat{A}^p)$ обозначает оператор, определяемый равенством

$$\Gamma(\hat{A}^p):e^{z\langle\varphi,f\rangle}: = :e^{z\langle\varphi,\hat{A}^p f\rangle}:, \quad (26)$$

справедливым $\forall z \in \mathbb{C}$ и $\forall f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.

Функция $\mathcal{F}$ в (25) выражается через U -функционал распределения Φ . Чтобы в этом убедиться, заметим, что в силу (24), (25) и тождества (26) с $z = i$ справедливо равенство

$$U[\Phi](if) = \int_{\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)} \mathcal{F}(\varphi):e^{i\langle\varphi,\hat{A}^p f\rangle}: d\gamma(\varphi). \quad (27)$$

Функция

$$g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \rightarrow U[\Phi](i\hat{A}^{-p}g)$$

является так называемым преобразованием Фурье–Винера от $\mathcal{F}$ (см., например, [13, гл. II.5]). По формуле обратного преобразования находим, что

$$\mathcal{F}(\varphi) = \lim_{\hat{P} \rightarrow \hat{I}} \int_{\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)} U[\Phi](i\hat{A}^{-p}\hat{P}\psi):e^{-i\langle\psi,\hat{P}\varphi\rangle}: d\gamma(\psi).$$

Здесь при вычислении предела оператор $\hat{P}$ пробегает проекторы пространства $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ на подпространства из $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.

Вид функции $\mathcal{F}$ зависит от степени оператора $\hat{A}$ в (27). Чем больше p , тем более гладкой является $\mathcal{F}$. Мы выберем такое p , при котором $\mathcal{F}$ непрерывна. Тогда достаточно знать $\mathcal{F}$ в точках из $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. Эти значения получаются по формуле

$$\mathcal{F}(f) = \int_{\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)} U[\Phi](i\hat{A}^{-p}\psi):e^{-i\langle\psi,f\rangle}: d\gamma(\psi), \quad (28)$$

которую можно использовать для контроля процесса снятия регуляризаций при построении производящих функционалов функций Швингера.

Такие функционалы обычно ищутся в виде некоторых пределов регуляризованных функционалов

$$G^{\text{reg}}(f) = \mathcal{N} \int_{\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)} \exp \left[i\langle\varphi,f\rangle - \int_{\mathbb{R}^d} \mathcal{L}_{\text{int}}^{(\text{reg})}(\varphi(x)) dx \right] d\mu_{\text{free}}(\varphi), \quad (29)$$

когда регуляризации, которые делают подынтегральное выражение осмысленным, устраняются. В (29) μ_{free} обозначает меру Нельсона для свободного поля, $\mathcal{L}_{\text{int}}^{(\text{reg})}$ – регуляризованный евклидов лагранжиан взаимодействия и $\mathcal{N}$ – нормировочный множитель, необходимый для того, чтобы $G^{\text{reg}}(0)$ было равно 1.

Выше было показано, что $G_0(f)$ является U -функционалом. Поскольку μ_{free} – гауссова мера, WN-анализ применим к $G^{\text{reg}}(f)$. Можно показать, что при стандартных регуляризациях $G^{\text{reg}}(f)$ – тоже U -функционал. Обозначим через $\mathcal{G}(\varphi)$ и $\mathcal{G}^{\text{reg}}(\varphi)$ функции из $L^2(\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d), \gamma)$, связанные с $G_0(f)$ и $G^{\text{reg}}(f)$ формулами типа (25) и (27). Тогда справедливо следующее утверждение:

ТЕОРЕМА 2. Пусть для любой функции $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$

$$G^{\text{reg}}(f) \rightarrow G_0(f),$$

причем $G^{\text{reg}}(f)$ и $G_0(f)$ удовлетворяют неравенствам

$$\begin{aligned} |G^{\text{reg}}(zf)| &\leq C \exp[K|z|^2 \|f\|_p^2], \\ |G_0(zf)| &\leq C \exp[K|z|^2 \|f\|_p^2], \end{aligned}$$

где $\|\cdot\|_p$ – норма на $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, при которой $\mathcal{G}(\varphi)$ и $\mathcal{G}^{\text{reg}}(\varphi)$ непрерывны.

Тогда $\forall f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$

$$\mathcal{G}^{\text{reg}}(f) \rightarrow \mathcal{G}(f).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из формулы (28) следует, что

$$\mathcal{G}^{\text{reg}}(f) = \int_{\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)} G^{\text{reg}}(i\hat{A}^{-p}\psi) : e^{-i\langle \psi, f \rangle} : d\gamma(\psi)$$

и

$$\mathcal{G}(f) = \int_{\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)} G_0(i\hat{A}^{-p}\psi) : e^{-i\langle \psi, f \rangle} : d\gamma(\psi).$$

При снятии регуляризации подынтегральное выражение в $\mathcal{G}^{\text{reg}}$ стремится к $G_0(i\hat{A}^{-p}\psi)$ в каждой точке $\psi \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ и не превосходит по абсолютной величине функцию

$$C \exp[K\|\hat{A}^{-p}\psi\|_p^2],$$

которая интегрируема по мере $d\gamma$. Следовательно, применима теорема Лебега о мажорированной сходимости. Теорема 2 доказана.

Теорема 2 показывает, что хотя мы не можем наблюдать сходимость подынтегральных выражений в (29), выражения типа

$$\mathcal{N}\Gamma(\hat{A}^{-p}) \exp \left[- \int_{\mathbb{R}^d} \mathcal{L}_{\text{int}}^{(\text{reg})}(\varphi(x)) dx \right]$$

должны сходиться при достаточно большом значении p . Ситуация такая же, как и в теории обобщенных функций Соболева–Шварца, в которой, например,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \frac{\sin Lx}{\pi x} dx \longrightarrow f(0) \quad \text{при } L \rightarrow \infty,$$

т.е. формально $\sin(Lx/\pi x) \rightarrow \delta(x)$. Чтобы наблюдать эту сходимость, следует рассмотреть первообразные, для которых в обычном смысле

$$\lim_{L \rightarrow \infty} \int_0^x \frac{\sin \pi Ly}{\pi y} dy = \frac{1}{2} \frac{x}{|x|}$$

при всех $x \neq 0$.

В заключение автор благодарит О.В. Зимину за помощь при подготовке рукописи к печати.

Данная работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 96-01-00726).

Список литературы

- [1] *Н. Н. Боголюбов.* Докл. АН СССР. 1952. Т. 82. С. 217.
- [2] *Н. Н. Боголюбов.* Изв. АН СССР. Сер. физ. 1955. Т. 19. С. 237.
- [3] *Т. Хидэ.* Броуновское движение. М.: Наука, 1987.
- [4] *N. Obata.* White Noise Calculus and Fock Space. Springer-Verlag, 1994.
- [5] *О. И. Завьялов.* Перенормированные диаграммы Фейнмана. М.: Наука, 1979.
- [6] *Ф. А. Березин.* Метод вторичного квантования. М.: Наука, 1986.
- [7] *Н. Н. Боголюбов, А. А. Логунов, И. Т. Тодоров.* Основы аксиоматического подхода в квантовой теории поля. М.: Наука, 1969.
- [8] *K. Osterwalder, R. Schrader.* Commun. Math. Phys. 1975. V. 42. P. 281.
- [9] *J. Potthoff, L. Streit.* J. Funct. Anal. 1991. V. 101. P. 212.
- [10] *S. Albeverio, T. Hida, J. Potthoff, L. Streit.* Phys. Lett. B. 1989. V. 217. P. 511.
- [11] *А. И. Кириллов.* ТМФ. 1994. Т. 98. С. 12.
- [12] *Ю. М. Березанский, Ю. Г. Кондратьев.* Спектральные методы в бесконечномерном анализе. Киев: Наукова думка, 1988.
- [13] *Ю. Л. Далецкий, С. В. Фомин.* Меры и дифференциальные уравнения в бесконечномерных пространствах. М.: Наука, 1983.

Поступила в редакцию 9.XII.1996 г.

A. I. Kirillov

GENERATING FUNCTIONALS OF S -MATRIX AND SCHWINGER FUNCTIONS IN WN-ANALYSIS. I

It is shown that the generating functionals of S -matrix and Schwinger functions are U -functionals of the White Noise Analysis. This result is applied to the regularization of the generating functionals.