Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. Е. Степанов, О групповом подходе к изучению уравнений Эйнштейна и Максвелла, *ТМФ*, 1997, том 111, номер 1, 32–43

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf988>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.166.219.16

26 апреля 2023 г., 16:23:58

С. Е. Степанов*

О ГРУППОВОМ ПОДХОДЕ К ИЗУЧЕНИЮ УРАВНЕНИЙ ЭЙНШТЕЙНА И МАКСВЕЛЛА

На основе классической задачи элементарной теории представлений ортогональной группы о разложении тензорного произведения представлений на неприводимые компоненты в статье проведена частичная классификация уравнений Эйнштейна. Выделен и изучен неизвестный еще класс уравнений Максвелла релятивистской электродинамики. Получены поточечно неприводимые разложения тензоров энергии-импульса и электромагнитного поля, и дана физическая интерпретация компонент разложения.

ВВЕДЕНИЕ

Одной из наиболее важных формул общей теории относительности является формула разложения тензора кривизны R (см. [1, с. 41–49]) на неприводимые компоненты:

$$R = \frac{Sk}{n(n-1)} \text{id} + \frac{2}{n-2} \text{Ric}_0 + W, \quad (1)$$

где

$$\text{Ric}_0 = \text{Ric} - \frac{Sk}{n(n-1)} \text{id}$$

— бесследовая часть тензора Риччи, Sk — скалярная кривизна, W — тензор Вейля. Формула (1) есть следствие того, что расслоение, сечением которого является тензор кривизны, в силу свойств симметрии является приводимым относительно естественного действия группы Лоренца и, следовательно, разлагается в сумму неприводимых компонент.

В настоящей статье мы приведем примеры разложения на неприводимые компоненты других тензоров общей теории относительности — тензора энергии-импульса T , тензора электромагнитного поля F , а также их ковариантных производных.

В основе статьи лежат лекции автора, прочитанные на VII Международной школе-семинаре по современным проблемам теоретической и математической физики (Казань, 22 июня — 2 июля 1995 г.).

*Владимирский государственный педагогический университет

1. НЕПРИВОДИМЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ОРТОГОНАЛЬНОЙ ГРУППЫ

1.1. В этом пункте мы рассмотрим классическую задачу элементарной теории представлений ортогональной группы о разложении тензорного произведения представлений на неприводимые компоненты.

Пусть E – n -мерное вещественное векторное пространство ($n > 1$). *Тензором* на E типа (k, l) называется линейная по каждому своему аргументу действительная функция $F(v_1^*, \dots, v_k^*, v_1, \dots, v_l)$ от l векторных ($v_i \in E$) и k ковекторных ($v_j^* \in E^*$) аргументов.

Естественные линейные операции над полилинейными функциями заданного типа (k, l) превращают их совокупность в линейное пространство, обозначаемое $T^{(k,l)}E$. В частности, $T^{(1,0)}E = E^*$ и $T^{(0,1)}E = E$.

Операция тензорного умножения превращает пространство $T(E) = \sum_{k,l} T^{(k,l)}E$ в биградуированную некоммутативную ассоциативную алгебру, которая называется *тензорной алгеброй пространства E* .

Группа $GL(E)$ линейных преобразований пространства E естественным образом действует в $T^{(k,l)}E$ как группа автоморфизмов. А именно, если $A \in GL(E)$, то

$$A(v_1^* \otimes \dots \otimes v_k^* \otimes v_1 \otimes \dots \otimes v_l) = ({}^{\text{tr}}A^{-1}v_1^*) \otimes \dots \otimes ({}^{\text{tr}}A^{-1}v_k^*) \otimes (Av_1) \otimes \dots \otimes (Av_l)$$

для $v_i^* \in E^*$ и $v_j \in E$. На этом основании тензорное пространство $T^{(k,l)}E$ рассматривается как *пространство представления линейной группы $GL(E)$* .

Пусть q – невырожденная квадратичная форма на E некоторой сигнатуры. Тогда q определяет отождествление E с E^* . Обозначим через $O(q)$ группу линейных преобразований A , имеющих инвариантом квадратичную форму q : $q(Av, Aw) = q(v, w)$. Группу $O(q)$ принято называть ортогональной. Если A принадлежит ортогональной группе $O(q)$, задаваемой формой q , то ${}^{\text{tr}}A^{-1} = A$ и, значит, $O(q)$ -модули E и E^* изоморфны. Поэтому будем рассматривать только тензорные степени пространства E и при этом полагать $E^{(k)} = \otimes^k E$. На $E^{(k)}$ имеется скалярное произведение, индуцированное квадратичной формой q . А именно,

$$\langle v_1 \otimes \dots \otimes v_k, w_1 \otimes \dots \otimes w_k \rangle = \prod_{i=1}^k q(v_i, w_i).$$

В $E^{(k)}$ действует также ортогональная группа $O(q)$ по закону

$$A(v_1 \otimes \dots \otimes v_k) = A(v_1) \otimes \dots \otimes A(v_k),$$

что позволяет рассматривать $E^{(k)}$ в качестве *пространства представлений ортогональной группы $O(q)$* .

Напомним, что представление группы G линейных преобразований в векторном пространстве V называется неприводимым, если всякое инвариантное относительно всех линейных преобразований группы подпространство L из V совпадает либо с нулевым подпространством, либо со всем V .

Чтобы найти все неприводимые относительно действия группы $O(q)$ подпространства $E^{(k)}$, надо воспользоваться двумя теоремами Вейля об инвариантах [2, с. 205; 3, с. 156].

ТЕОРЕМА 1.1. *Инвариантные относительно $O(q)$ ненулевые линейные формы на $\otimes^k E$ существуют только при четных k . В этом случае они порождаются следующими элементарными формами:*

$$f_{\sigma, \tau}: v_1 \otimes \cdots \otimes v_{2r} \rightarrow \prod_{i=1}^r q(v_{\sigma(i)}, v_{\tau(i)}),$$

где σ и τ – инъективные отображения множества $\{1, \dots, r\}$ в $\{1, \dots, 2r\}$, образы которых не пересекаются.

ТЕОРЕМА 1.2. *Пусть L – такое векторное подпространство тензорной алгебры $T(E)$ пространства E , что пространство $O(q)$ -инвариантных квадратичных форм на L одномерно. Тогда L неприводимо относительно $O(q)$.*

1.2. В качестве примера применим теорию Вейля для нахождения максимального числа неприводимых относительно $O(q)$ подпространств $E^{(2)}$. Заметим, что

$$E^{(2)} = \text{Im}(\text{Alt}) \oplus \text{Ker}(\text{Alt}) = \Lambda^2 E \oplus S^2 E,$$

где $\text{Alt}: E^{(2)} \rightarrow \Lambda^2 E$ – оператор альтернирования. Здесь компоненты прямой суммы ортогональны, что проверяется непосредственно. Докажем, что пространство $\Lambda^2 E$ неприводимо относительно действия $O(q)$. Для этого надо доказать, что пространство $O(q)$ -инвариантных квадратичных форм на $\Lambda^2 E$ одномерно. Для построения этих форм надо воспользоваться всевозможными свертками для ω из $\Lambda^2 E$:

$$\omega(e_i, e_j) \otimes \omega(e_k, e_l),$$

для произвольного “ортонормированного” относительно q базиса $\{e_1, \dots, e_n\}$. Поскольку для всех перестановок σ множества $\{i, j\}$ справедливо соотношение

$$\omega(e_{\sigma(i)}, e_{\sigma(j)}) = (-1)^\sigma \omega(e_i, e_j),$$

где $(-1)^\sigma = \pm 1$ в зависимости от четности перестановки σ , то соответствующие квадратичные формы принимают вид

$$A(\omega) = \sum_{i, j=1, \dots, n} (-1)^\sigma \omega(e_i, e_j)$$

и, следовательно, $\Lambda^2 E$ неприводимо.

Применим теперь теорему Вейля для нахождения неприводимых относительно $O(q)$ подпространств пространства симметрических 2-тензоров $S^2 E$ на E .

Обозначим через $S_0^2 E$ подпространство в $S^2 E$, состоящее из элементов с нулевым относительно q следом. Тогда $O(q)$ -инвариантные квадратичные формы суть

$$B(\omega) = \sum_{i, j=1, \dots, n} [\omega(e_i, e_j)]^2, \quad C(\omega) = \sum_{i, j=1, \dots, n} \omega(e_i, e_i) \omega(e_j, e_j).$$

Таким образом, в разложении $S^2 E$ имеется не более двух неприводимых подпространств, и разложение имеет вид

$$E^{(2)} = \Lambda^2 E \oplus S^2 E; \quad S^2 E = \mathbb{R}q \oplus S_0^2 E.$$

Здесь $\mathbb{R}$ означает след, индуцированный q и представляющий собой линейное отображение $\text{tr}_q: S^2 E \rightarrow \mathbb{R}$, определяемое так:

$$\text{tr}_q \omega = \sum_{i=1, \dots, n} \omega(e_i, e_i).$$

2. СЕМЬ КЛАССОВ УРАВНЕНИЙ ЭЙНШТЕЙНА

2.1. Пространство-время общей теории относительности представляет собой гладкое четырехмерное многообразие M , снабженное метрикой g сигнатуры Лоренца $(- + + +)$. В области V локальной системы координат $\{x^0, x^1, x^2, x^3\}$ метрика g задается своими компонентами $g_{ij} = g(\partial_i, \partial_j)$, где $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x^i}$. С их помощью, в свою очередь, задаются символы Кристоффеля

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} g^{ke} (\partial_i g_{ej} + \partial_j g_{ei} + \partial_e g_{ij})$$

связности Леви-Чивита на M и оператор ковариантного дифференцирования ∇ этой связности

$$\nabla_X = X^i \partial_i + \Gamma_{ik}^j X^k$$

в направлении векторного поля $X = X^i \partial_i$.

Тензор Риччи Ric связности Леви-Чивита находится из тождеств

$$\text{Ric}(\partial_i, \partial_j) = R_{ij} = R_{ikj}^k,$$

где R_{iej}^k — компоненты тензора кривизны R и

$$X^e R_{eij}^k = \nabla_i \nabla_j X^k - \nabla_j \nabla_i X^k.$$

В общей теории относительности лоренцева метрика g интерпретируется как гравитационный потенциал и связана уравнением поля

$$\text{Ric} - \frac{1}{2} S k \cdot g = T \quad (2.1)$$

с распределением массы-энергии, которая порождает гравитационное поле.

Стоящее в правой части уравнения тензорное поле — известный тензор энергии-импульса материи T . Тензор энергии-импульса симметричный и бездивергентный, т.е. его компоненты $T_{ij} = T(\partial_i, \partial_j)$ удовлетворяют условиям

$$T_{ij} = T_{ji} \quad \text{и} \quad g^{ik} \nabla_i T_{kj} = 0, \quad (2.2)$$

где $(g^{jk}) = (g_{jk})^{-1}$. Используя свойства этого тензора, проведем классификацию полевых уравнений (2.1).

2.2. Для решения поставленной задачи применим теорию Вейля для нахождения числа неприводимых относительно действия $O(q)$ подпространств пространства Ω из $E^{(3)}$ такого, что

$$\Omega = \left\{ \omega \mid \omega(a, b, c) = \omega(a, c, b); \sum_{i=1, \dots, n} \omega(e_i, e_i, c) = 0 \right\}$$

для произвольных a, b, c и ортонормированного базиса $\{e_1, \dots, e_n\}$ из E . Определим три подпространства Ω следующим образом:

$$\begin{aligned} \Omega_1 &= \{ \omega \mid \omega(a, b, c) + \omega(b, c, a) + \omega(c, a, b) = 0 \}, \\ \Omega_2 &= \{ \omega \mid \omega(a, b, c) = \omega(b, a, c) \}, \\ \Omega_3 &= \{ \omega \mid \omega(a, b, c) = (n^2 + n - 2)^{-1} \times \\ &\quad \times [(n+1)\omega_{23}(a)q(b, c) - \omega_{23}(b)q(a, c) - \omega_{23}(c)q(a, b)] \} \end{aligned}$$

для $\omega_{23}(a) = \sum_{i=1, \dots, n} \omega(a, e_i, e_i)$ и произвольных a, b, c из E . Непосредственно проверяется, что пространство Ω является ортогональной суммой подпространств Ω_1, Ω_2 и Ω_3 . Более того, эти подпространства неприводимы относительно действия группы $O(q)$. Последнее следует из того, что пространство $O(q)$ -инвариантных квадратичных форм на Ω имеет размерность 3. Точнее, это пространство порождается следующими формами:

$$\begin{aligned} A(\omega) &= \sum_{i, j, k=1, \dots, n} \omega^2(e_i, e_j, e_k), \\ B(\omega) &= \sum_{i, j, k=1, \dots, n} \omega(e_i, e_j, e_k) \omega(e_k, e_i, e_j), \\ C(\omega) &= \sum_{i=1, \dots, n} \left[\sum_{j=1, \dots, n} \omega(e_i, e_j, e_j) \right]^2. \end{aligned}$$

Полагая $E = T_x M$ и $q = g_x$, нетрудно усмотреть, что тензорное поле ∇T – сечение расслоения $\Omega(M)$, слой которого в каждой точке x пространства-времени (M, g) является рассмотренным тензорным пространством Ω . Следствием этого будет разложение ∇T на три части, соответствующие неприводимым компонентам действия группы $O(q)$. Этому поточечно неприводимому разложению ∇T соответствует “грубая” классификация уравнений Эйнштейна $T = \text{Ric} - 2^{-1} S k \cdot g$, когда к одному классу относятся уравнения, для которых ∇T – сечение одного из инвариантных подрасслоений $\Omega_1(M), \Omega_2(M), \Omega_3(M)$ или их прямых сумм. Пополним список классов еще одним, для которого ∇T являются сечениями подрасслоения $\Omega_1(M) \cap \Omega_2(M) \cap \Omega_3(M)$. Справедлива следующая

ТЕОРЕМА 2.1. *Инвариантным образом выделяются семь классов уравнений Эйнштейна $T = \text{Ric} - 2^{-1}Sk \cdot g$, для каждого из которых ковариантные производные ∇T тензоров энергии-импульса T являются сечениями соответствующих инвариантных подрасслоений $\Omega_1(M)$, $\Omega_2(M)$, $\Omega_3(M)$, $\Omega_1(M) \cap \Omega_2(M) \cap \Omega_3(M)$ и их прямых сумм.*

Например, решения уравнений Эйнштейна в случае, когда ∇T является сечением инвариантного подрасслоения $\Omega_1(M)$, надо искать среди лоренцевых метрик постоянной скалярной кривизны. Это следует из характеристических уравнений

$$(\nabla_X T)(Y, Z) + (\nabla_Y T)(Z, X) + (\nabla_Z T)(X, Y) = 0$$

данного подрасслоения после взятия следа.

При этом тензор Риччи Ric метрики должен определять первые квадратичные интегралы движения для геодезических (см., например, [1, с. 340]).

Решениями же уравнений Эйнштейна, для которых ∇T является сечением инвариантного подрасслоения $\Omega_2(M)$, будут лоренцевы метрики с бездивергентной кривизной ($d^*R = 0$). Для доказательства этого факта достаточно рассмотреть след дифференциального тождества Бианки

$$(\nabla_X R)(Y, Z) + (\nabla_Y R)(Z, X) + (\nabla_Z R)(X, Y) = 0$$

и воспользоваться характеристическими условиями, определяющими это подрасслоение, $(\nabla_X T)(Y, Z) = (\nabla_Y T)(X, Z)$. Заметим, что к многообразиям (M, g) с $d^*R = 0$ относятся конформно-плоские ($W = 0$) пространства-времени (M, g) постоянной скалярной кривизны $Sk = \text{trace}_g \text{Ric}$.

И наконец, лоренцевы метрики уравнений Эйнштейна в случае, когда ∇T является сечением подрасслоения $\Omega_3(M)$, должны иметь тензор Риччи, подчиняющийся уравнениям

$$(\nabla_Z \text{Ric})(X, Y) = \frac{1}{18}(4Z(Sk)g(X, Y) + X(Sk)g(Z, Y) + Y(Sk)g(Z, X))$$

для любых X, Y и Z из TM .

3. ДВА КЛАССА УРАВНЕНИЙ МАКСВЕЛЛА

3.1. Рассмотрим тензор F электромагнитного поля пространства-времени (M, g) . Обозначим через F_{ij} компоненты F относительно локальной системы координат $\{x^0, x^1, x^2, x^3\}$ на M . Известно, что 2-форма $\omega = \frac{1}{2}F_{ij}dx^i \wedge dx^j$ электромагнитного поля является замкнутой, что равносильно условию

$$(\nabla_X F)(Y, Z) + (\nabla_Y F)(Z, X) + (\nabla_Z F)(X, Y) = 0.$$

Кроме этого, рассматривают еще два взаимоисключающих условия на 2-форму ω . В первом случае рассматривают бездивергентную электромагнитную форму ω , что соответствует уравнениям Максвелла в “пустом” пространстве: $d^*F = 0$. Во втором

случае, наоборот, требуют, чтобы $d^*F \neq 0$. Этому случаю соответствуют уравнения Максвелла при наличии заряда

$$(d^*F)(X) = 4\pi g(X, J)$$

для 4-вектора тока J .

Если применить здесь теорию представления ортогональной группы, то станет очевидным и с математической точки зрения наличие таких взаимоисключающих случаев.

3.2. Используем теорию Вейля для нахождения максимального числа неприводимых относительно действия $O(q)$ подпространств пространства Ψ из $E^{(3)}$ такого, что

$$\Psi = \{ \psi \mid \psi(a, b, c) + \psi(b, c, a) + \psi(c, a, b) = 0; \quad \psi(a, b, c) + \psi(a, c, b) = 0 \}$$

для любых a, b, c из E . Определим два подпространства Ψ следующим образом:

$$\begin{aligned} \Psi_1 &= \{ \psi \mid \psi(a, b, c) = (n-1)^{-1} [\psi_{12}(c)q(a, b) - \psi_{12}(b)q(a, c)] \}, \\ \Psi_2 &= \left\{ \psi \mid \psi_{12}(c) = \sum_{i=1, \dots, n} \psi(e_i, e_j, c) = 0 \right\} \end{aligned}$$

для любых a, b, c и ортонормированного базиса $\{e_1, \dots, e_n\}$ на E . Непосредственно проверяется, что пространство Ψ является ортогональной суммой Ψ_1 и Ψ_2 . Более того, эти пространства неприводимы относительно действия группы $O(q)$, поскольку пространство $O(q)$ -инвариантных квадратичных форм двумерно и порождается следующими формами:

$$A(\psi) = \sum_{i=1, \dots, n} \left[\sum_{j=1, \dots, n} \psi(e_j, e_j, e_i) \right]^2, \quad B(\psi) = \sum_{i, j, k=1, \dots, n} \psi(e_i, e_j, e_k)^2.$$

Полагая $E = T_x M$ и $q = g_x$, рассмотрим поточечно $O(q)$ -неприводимое разложение ковариантной производной ∇F тензора электромагнитного поля F четырехмерного пространства-времени. Поскольку тензор F задает на (M, g) замкнутую 2-форму, то ∇F является сечением векторного расслоения $\Psi(M)$, слой которого в каждой точке пространства-времени является тензорным пространством Ψ . Следствием этого будет разложение ∇F на две части, соответствующие неприводимым компонентам действия группы $O(q)$. Тогда уравнениям Максвелла в свободном от заряда пространстве ($d^*F = 0$) соответствует случай, когда ∇F является сечением инвариантного подрасслоения $\Psi_2(M)$. Случай же, когда ковариантная производная ∇F тензора электромагнитного поля F является сечением инвариантного подрасслоения Ψ_1 , приводит к уравнениям

$$(\nabla_X F)(Y, Z) = \frac{4\pi}{3} [g(X, Z)g(J, Y) - g(X, Y)g(J, Z)], \quad (3.1)$$

которые будем называть специальными уравнениями Максвелла. Из уравнений (3.1) автоматически следуют уравнения Максвелла при наличии заряда ($d^*F = 4\pi J$).

Воспользуемся тождествами Риччи (см. [4, с. 43]) для тензора F , причем выпишем их в координатной форме:

$$\nabla_i \nabla_j F_{ke} - \nabla_j \nabla_i F_{kl} = -F_{ml} R_{kij}^m - F_{km} R_{lij}^m. \quad (3.2)$$

Подставим в эти тождества выражения для ∇F из (3.1), а затем найдем след. Результатом будут уравнения

$$\nabla_i J_j = \frac{3}{8\pi} (F^{ke} R_{klij} - R_i^m F_{jm}), \quad (3.3)$$

из которых с очевидностью следует закон сохранения заряда ($d^*J = 0$). Анализ уравнений (3.3) позволяет заключить, что справедлива

ТЕОРЕМА 3.1. *Пространство-время, в котором тензор электромагнитного поля F подчиняется специальным уравнениям Максвелла, будет эйнштейновым тогда и только тогда, когда 4-вектор тока J будет киллинговым.*

Нетрудно проверить, что дважды ковариантное симметричное тензорное поле G с компонентами

$$G_{ij} = \frac{1}{4\pi} \left[g^{kl} F_{ik} F_{je} - \frac{1}{2} (F^{kl} F_{kl}) g_{ij} \right]$$

удовлетворяет уравнению $\nabla(kG_{ij}) = 0$. А поэтому, если t – тангенциальное векторное поле на аффинно параметризованной геодезической, то $G_{ij} t^i t^j$ – квадратичный первый интеграл движения для геодезических (см., например, [1, с. 340]). Далее, непосредственные расчеты показывают, что тензор энергии-импульса электромагнитного поля

$$T_{ij} = \frac{1}{4\pi} \left[F_{im} F_j^m - \frac{1}{4} (F^{kl} F_{kl}) g_{ij} \right]$$

есть бесследовая часть тензора G , а потому (см. [1, с. 339–340]) он является конформным тензором Киллинга. Следовательно, имеет место

ТЕОРЕМА 3.2. *Если тензор электромагнитного поля F в пространстве-времени подчиняется специальным уравнениям Максвелла, то тензор энергии-импульса электромагнитного поля T является конформно-киллинговым, а тензорное поле $G = T + \frac{1}{8\pi} |F|^2 g$ задает квадратичный первый интеграл движения для геодезических.*

Рассмотрим уравнения (3.1) в пространстве де Ситтера, которое имеет постоянную кривизну εr^{-2} , где $\varepsilon = 1$ или $\varepsilon = -1$ в зависимости от рода пространства. Поэтому тензор кривизны R имеет вид (см. [5, с. 115, 362])

$$R(X, Y)Z = \varepsilon r^{-2} [g(Y, Z)X - g(X, Z)Y]. \quad (3.4)$$

В этом случае уравнения (3.3) переписутся так:

$$g(\nabla_X J, Y) = 3\varepsilon^{-2} (4\pi)^{-1} F(X, Y). \quad (3.5)$$

Условием интегрируемости системы уравнений (3.1) и (3.5) служат (см. [4, с. 43]) тождества Риччи (3.2) и

$$\nabla_k \nabla_l J_i - \nabla_l \nabla_k J_i = -J_m R_{ikl}^m. \quad (3.6)$$

Простая подстановка выражений ∇F , ∇J и ∇R из (3.1), (3.3) и (3.4) в условиях интегрируемости (3.2) и (3.6) обращает их в тождества. Следовательно, доказана

ТЕОРЕМА 3.3. *В пространствах-времени де Ситтера специальные уравнения Максвелла являются вполне интегрируемыми и тензор электромагнитного поля F имеет следующий вид: $F(X, Y) = 4\pi\varepsilon(3r^2)^{-1}g(\nabla_X J, Y)$ для 4-вектора тока J и произвольных X и Y из TM .*

В заключение рассмотрим плоское пространство-время с лоренцевой системой координат. Очевидно, что уравнения (3.3) переписутся теперь так:

$$\partial_i J_j = 0.$$

Тогда интегралы уравнений (3.1) имеют вид

$$F_{ab} = \frac{4\pi}{3}(C_a x_b - C_b x_a + C_{ab})$$

для $J = (C_0, C_1, C_2, C_3)$ и произвольных постоянных C_a и $C_{ab} = -C_{ba}$. Справедлива следующая

ТЕОРЕМА 3.4. *Интегралы движения специального уравнения Максвелла в плоском пространстве-времени с лоренцевой системой координат $\{x^0, x^1, x^2, x^3\}$ имеют вид*

$$F_{ab} = \frac{4\pi}{3}(c_a x_b - C_b x_a + C_{ab})$$

для произвольных постоянных C_a и $C_{ab} = -C_{ba}$.

Принимая классические обозначения, введем в рассмотрение векторы напряженности электрического и магнитного полей $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$, полагая (см. [6, с. 111])

$$\mathbf{E} = \{F_{10}, F_{20}, F_{30}\} \quad \text{и} \quad \mathbf{H} = \{F_{23}, F_{31}, F_{12}\}.$$

Если, кроме того, принять x^0 за время t , то

$$\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \{-C_1, -C_2, -C_3\} \quad \text{и} \quad \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = \{0, 0, 0\}.$$

4. РАЗЛОЖЕНИЕ НА НЕПРИВОДИМЫЕ КОМПОНЕНТЫ ТЕНЗОРОВ ЭНЕРГИИ-ИМПУЛЬСА И ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ

4.1. Рассмотрим n -мерное ($n \geq 4$) лоренцево многообразие M с векторным полем ξ , $\|\xi\| = i$, нигде не обращающимся в нуль. Такое многообразие также принято называть пространством-временем (см., например, [5, с. 13]). В этом случае каждое касательное пространство $E = T_x M$ представляет собой ортогональную сумму “вертикального пространства” $V = \text{span}\{\xi_x\}$ и “горизонтального пространства” H , состоящего из векторов, ортогональных ξ_x .

Обозначим через $v: T_x M \rightarrow V$ и $h: T_x M \rightarrow H$ ортогональные проекторы такие, что $v(X) = -g(\xi, X)$ и $h(X) = X + g(\xi, X)\xi$ для любого X из TM . Тогда $q = q^v + q^h$ и $O(q) = O(q^v) \times O(q^h)$ для $q^v = q(v, v)$ и $q^h = q(h, h)$, где q^h — положительно определенная квадратичная форма на $(n-1)$ -мерном пространстве H .

4.2. Для любого дважды ковариантного симметричного тензорного поля T на M справедливо соотношение

$$\begin{aligned} T(X, Y) &= T(vX + hX, vY + hY) = \\ &= T(vX, vY) + T(hX, hY) + T(vX, hY) + T(hX, vY) = \\ &= T(hX, hY) + T(\xi, \xi)g(\xi, X)g(\xi, Y) - [T(hX, \xi)g(\xi, Y) + T(hY, \xi)g(\xi, X)]. \end{aligned}$$

Введем в рассмотрение инвариант $\rho = T(\xi, \xi)$ и векторное поле ζ такое, что $g(\zeta, X) = -T(hX, \xi)$. В каждой точке x многообразия (M, g) вектор ζ_x является элементом H . В результате получим следующее ортогональное разложение:

$$T(X, Y) = T(hX, hY) + \rho g(\xi, X)g(\xi, Y) + [g(\zeta, X)g(\xi, Y) + g(\zeta, Y)g(\xi, X)]. \quad (4.1)$$

Очевидно, что второе и третье слагаемые в (4.1) являются поточечно неприводимыми относительно действия группы $O(q) = O(q^v) \times O(q^h)$. Первое же слагаемое есть элемент тензорного пространства S^2H , точнее, пространства дважды ковариантных симметричных тензоров на H . Обозначим через S_0^2H подпространство в S^2H , состоящее из элементов с нулевым следом. Тогда пространство S^2H будет ортогональной суммой подпространств S_0^2H и $\mathbf{R}q^h$. Более того, эти подпространства будут неприводимыми относительно действия группы $O(q^h)$. С учетом сказанного, а также полагая $\mu = T(h, h) - (n-1)^{-1}pg^h$ для $p = \text{tr}_{g^h} T(h, h)$, мы можем записать инвариантное относительно действия группы $O(q^v) \times O(q^h)$ разложение тензорного поля T в следующем виде:

$$\begin{aligned} T(X, Y) &= \mu(X, Y) + p \cdot g^h(X, Y) + \rho \cdot g(\xi, X)g(\xi, Y) + \\ &+ [g(\zeta, X)g(\xi, Y) + g(\zeta, Y)g(\xi, X)]. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Можно убедиться, что подобное разложение имеет тензор энергии-импульса T вязкой жидкости с теплопроводностью в четырехмерном пространстве-времени (см., например, [7]). При этом участвующие в инвариантном разложении (4.2) компоненты имеют следующую гидродинамическую интерпретацию: ξ – поле скоростей течения жидкости, ρ – плотность массы-энергии, p – кинетическое давление, ζ – вектор потока тепла, μ – вязкость жидкости.

4.3. В качестве второго примера рассмотрим инвариантное относительно действия группы $O(q^v) \times O(q^h)$ разложение дважды ковариантного кососимметричного тензора поля F на n -мерном пространстве-времени (M, g) . Имеем

$$F(X, Y) = F(vX + hX, vY + hY) = F(vX, vY) + F(vX, hY) + F(hX, vY) + F(hX, hY),$$

где $F(vX, vY) = g(\xi, X)g(\xi, Y)F(\xi, \xi) = 0$. Введем в рассмотрение векторное поле ζ такое, что $g(\zeta, X) = -F(hX, \xi)$. В каждой точке x многообразия M вектор ζ_x является элементом H . В результате получим следующее разложение:

$$F(X, Y) = F(hX, hY) + [g(\zeta, X)g(\xi, Y) - g(\zeta, Y)g(\xi, X)]. \quad (4.3)$$

Очевидно, что второе слагаемое в ортогональном разложении (4.3) поточечно неприводимо относительно действия группы $O(q^v) \times O(q^h)$. Первое же слагаемое есть элемент тензорного пространства $\Lambda^2 H$, точнее, пространства дважды ковариантных кососимметрических тензоров на H . Это пространство $O(q^h)$ -неприводимо.

Рассмотрим теперь в качестве F тензор электромагнитного поля четырехмерного пространства-времени. Воспользуемся уравнениями электродинамики (см., например, [5, с. 223])

$$mg(\xi', X) = qF(X, \xi),$$

m – масса частицы, q – заряд, ξ – вектор 4-скорости, а ξ' – вектор 4-ускорения. Тогда поточечно-инвариантному относительно действия группы $O(q^v) \times O(q^h)$ разложению (4.3) можно придать следующий вид:

$$F(X, Y) = f(X, Y) + \frac{m}{q} [g(\xi, X)g(\xi', Y) - g(\xi, Y)g(\xi', X)], \quad (4.4)$$

где положили $f = F(h, h)$.

Согласно матричному представлению тензора F в плоском пространстве-времени его “горизонтальная составляющая” $F(h, h)$ образована из координат 3-вектора $\mathbf{B} = (F_{23}, F_{31}, F_{12})$ напряженности магнитного поля, а вторая составляющая – из координат 3-вектора $\mathbf{E} = (F_{10}, F_{20}, F_{30})$ напряженности электрического поля. При этом норма электромагнитной 2-формы находится из равенства $|F|^2 = \mathbf{B}^2 - \mathbf{E}^2$ и в искривленном пространстве-времени согласно (4.4) принимает следующий вид:

$$|F|^2 = |f|^2 - 2mq^{-2}|\xi'|^2$$

для $|f|^2 \geq 0$ и $|\xi'|^2 \geq 0$. Все это позволяет сделать вывод, сформулированный как

ТЕОРЕМА 4.1. *Справедливо инвариантное относительно действия группы $O(q^v) \times O(q^h)$ разложение (4.4) тензора электромагнитного поля на “электрическую” и “магнитную” компоненты.*

Известно (см. [1, с. 58]) разложение ковариантной производной $\nabla \xi$ поля 4-скоростей ξ потока (заряженной) жидкости:

$$g(\nabla_X \xi, Y) = \omega(X, Y) + \sigma(X, Y) + \frac{1}{3} \Theta g(hX, hY) - g(\xi', X)g(\xi, Y), \quad (4.5)$$

где ω – вращательная 2-форма жидкости, σ – тензор сдвига поля скоростей и Θ – расширение жидких линий. В работе [8] доказано, что это разложение $O(q^h) \times O(q^v)$ -неприводимое.

Если принять во внимание равенство (4.5), то разложению (4.4) можно придать следующий вид:

$$F(X, Y) = f(X, Y) - \frac{m}{q} \{ [g(\nabla_Y \xi, X) - g(\nabla_X \xi, Y)] + 2\omega(X, Y) \}. \quad (4.6)$$

Анализ равенств (4.4) и (4.6) позволяет заключить, что отсутствие “электрической компоненты” в инвариантном разложении тензора F возможно только в случае геодезического поля векторов 4-скоростей ξ потока заряженных частиц. Каждую из частиц рассматривают как наблюдателя в пространстве-времени, ассоциируя с ним систему отсчета. При $\xi' = 0$ систему отсчета называют (см., например, [9]) квазиинерциальной. Очевидно

СЛЕДСТВИЕ. В инвариантном относительно действия группы $O(q^v) \times O(q^h)$ разложении тензора электромагнитного поля F отсутствует “электрическая компонента” тогда и только тогда, когда система отсчета в пространстве-времени является квазиинерциальной.

Непосредственно проверяется, что проекция f на любое пространственно-подобное омбилическое сечение (случай $\omega = \sigma = 0$) тензора F электромагнитного поля подчиняется специальным уравнениям Максвелла, если сам тензор F подчиняется этим уравнениям.

Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (проект № 94-01-01595).

Список литературы

- [1] Д. Крамер и др. Точные решения уравнений Эйнштейна. М.: Энергоатомиздат, 1982.
- [2] Г. Вейль. Классические группы, их инварианты и представления. М.: ИЛ, 1947.
- [3] Четырехмерная риманова геометрия. Ред. А. Бессе. М.: Мир, 1985.
- [4] Л. П. Эйзенхарт. Риманова геометрия. М.: ИЛ, 1948.
- [5] Дж. Бим, П. Эрлих. Глобальная лоренцева геометрия. М.: Мир, 1985.
- [6] Ч. Мизнер, К. Торн, Дж. Уилер. Гравитация. Т. 1. М.: ИЛ, 1977.
- [7] G. F. R. Ellis. Relativistic cosmology. In: Proc. Intern. School of Physics “Enrico Fermi”, Course XLII – General Relativity and Cosmology, June 30 – July 12, 1969. New York: Academic Press, 1971.
- [8] С. Е. Степанов. Изв. вузов. Физика. 1993. № 6. С. 82–86.
- [9] И. М. Дозморов. Гравиинерциальные системы отсчета. В кн.: Теория относительности и гравитация. М.: Наука, 1976. С. 73–100.

Поступила в редакцию 14.III.1996 г.

S. E. Stepanov

ON GROUP-THEORETIC APPROACH TO STUDY EINSTEIN'S AND MAXWELL'S EQUATIONS

Basing on the classical problem of the representation theory of the orthogonal group about decomposition of the tensor product of representations on irreducible components the partial classification of Einstein's equations is obtained. A new class of Maxwell's equations of relativistic electrodynamics is singled out and studied. The pointwise irreducible decompositions of the energy-momentum tensor as well as the tensor of the electro-magnetic field are established and a physical interpretation of the corresponding components is given.