Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ж. И. Абдуллаев, С. Н. Лакаев, Конечность дискретного спектра трехчастичного оператора Шредингера на решетке, *ТМФ*, 1997, том 111, номер 1, 94–108

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf992>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.85.209

26 апреля 2023 г., 16:38:13

Ж. И. Абдуллаев*, С. Н. Лакаев*

КОНЕЧНОСТЬ ДИСКРЕТНОГО СПЕКТРА ТРЕХЧАСТИЧНОГО ОПЕРАТОРА ШРЕДИНГЕРА НА РЕШЕТКЕ

Рассматривается гамильтониан системы трех одинаковых квантовых частиц на решетке, взаимодействующих с помощью парных контактных потенциалов притяжения. Доказана конечность трехчастичных связанных состояний трехмерного дискретного оператора Шредингера при отсутствии виртуальных уровней у операторов, описывающих подсистемы двух частиц. Для высоких размерностей ($\nu \geq 5$) доказана конечность трехчастичных связанных состояний и в случае наличия виртуальных уровней.

ВВЕДЕНИЕ

Хорошо известно, что при некоторых естественных предположениях оператор Шредингера H системы трех попарно взаимодействующих частиц в непрерывном пространстве имеет существенный спектр, совпадающий с полуосью $[\kappa, \infty)$, где $\kappa \leq 0$. В работах Яфаева [1] и Жислина [2] доказано, что при $\kappa < 0$ и достаточно быстром убывании потенциалов взаимодействия в координатном представлении дискретный спектр оператора H является конечным. Изучению случая $\kappa = 0$ посвящена серия работ [3–5], в которых было установлено, что (даже при финитных взаимодействиях между частицами) дискретный спектр оператора H может быть бесконечным. При этом вопрос о бесконечности дискретного спектра оператора H был связан с наличием так называемых виртуальных уровней в начале непрерывных спектров операторов h_α ($\alpha = 1, 2, 3$), описывающих различные подсистемы из двух частиц. В [3] показано, что дискретный спектр оператора H обязательно бесконечен, если виртуальные уровни имеют три или два оператора h_α . Впервые на такой эффект обратил внимание Ефимов [6]. Доказательство конечности дискретного спектра оператора H в случае, если виртуальный уровень имеет только один оператор h_α или виртуальные уровни у операторов h_α отсутствуют, можно найти в работе Яфаева [7].

Что же касается дискретного оператора Шредингера, являющегося решеточным аналогом обычного трехчастичного оператора Шредингера в непрерывном пространстве, то для него также имеет место эффект Ефимова. Этому вопросу посвящены работы [8–10].

*Самаркандский государственный университет

В работе [10] доказано существование эффекта Ефимова для рассматриваемой системы при определенных значениях полного квазиимпульса, которые лежат на некотором многообразии $\mathcal{M}$ коразмерности 1.

В настоящей работе изучается система трех одинаковых квантовых частиц (бозонов) на ν -мерной решетке, взаимодействующих с помощью парных контактных потенциалов притяжения. Доказана конечность числа собственных значений трехмерного дискретного оператора $H_\mu(K)$, $K \in T^3$, при отсутствии виртуальных уровней у операторов $h_\mu = h_\mu(K, P(K))$, описывающих подсистемы двух частиц, а также конечность дискретного спектра и в случаях наличия собственных значений на левом крае трехчастичного существенного спектра при $\nu \geq 5$.

1. ОПИСАНИЕ ДВУХЧАСТИЧНОГО И ТРЕХЧАСТИЧНОГО ОПЕРАТОРОВ ШРЕДИНГЕРА НА РЕШЕТКЕ

Рассмотрим оператор Шредингера H_μ системы трех одинаковых квантовых частиц (бозонов) на ν -мерной решетке, взаимодействующих с помощью парных контактных потенциалов притяжения.

Пусть $\mathbb{Z}^\nu$ – ν -мерная решетка, $l_2^s((\mathbb{Z}^\nu)^m) \subset l_2((\mathbb{Z}^\nu)^m)$ – подпространство, состоящее из функций $\psi(n_1, n_2, \dots, n_m)$, симметричных относительно перестановки любых двух переменных.

В координатном представлении гамильтонианы системы двух и системы трех одинаковых частиц на трехмерной решетке действуют соответственно в пространствах $l_2^s((\mathbb{Z}^\nu)^2)$ и $l_2^s((\mathbb{Z}^\nu)^3)$ по формулам

$$\begin{aligned} (\hat{h}_\mu \varphi)(n_1, n_2) &= \sum_{s \in \mathbb{Z}^\nu} \hat{\varepsilon}(s) [\varphi(n_1 + s, n_2) + \varphi(n_1, n_2 + s)] - \mu \delta_{n_1 n_2} \varphi(n_1, n_2), \\ (\hat{H}_\mu \psi)(n_1, n_2, n_3) &= \sum_{s \in \mathbb{Z}^\nu} \hat{\varepsilon}(s) [\psi(n_1 + s, n_2, n_3) + \psi(n_1, n_2 + s, n_3) + \\ &\quad + \psi(n_1, n_2, n_3 + s)] - \mu (\delta_{n_1 n_2} + \delta_{n_1 n_3} + \delta_{n_2 n_3}) \psi(n_1, n_2, n_3). \end{aligned}$$

Здесь $\hat{\varepsilon}(s)$, $s = (s^{(1)}, s^{(2)}, \dots, s^{(\nu)}) \in \mathbb{Z}^\nu$, – вещественнозначная функция, определенная на ν -мерной решетке $\mathbb{Z}^\nu$, зависящая только от $|s^{(1)}|, |s^{(2)}|, \dots, |s^{(\nu)}|$ и удовлетворяющая неравенству $|\hat{\varepsilon}(s)| \leq C \exp\{-a|s|\}$, $|s| = |s^{(1)}| + \dots + |s^{(\nu)}|$ для некоторых чисел $a > 0$, $C > 0$; $\mu > 0$ – энергия взаимодействия; δ_{mn} – символ Кронекера.

Пусть T^ν – ν -мерный тор, $L_2((T^\nu)^m)$ – гильбертово пространство квадратично интегрируемых функций, определенных на $(T^\nu)^m$; $L_2^s((T^\nu)^m) \subset L_2((T^\nu)^m)$ – подпространство, состоящее из функций $f(k_1, k_2, \dots, k_m)$, симметричных относительно перестановки любых двух переменных.

В импульсном представлении операторы Шредингера системы двух и системы трех одинаковых частиц действуют соответственно в гильбертовых пространствах

$L_2^s((T^\nu)^2)$ и $L_2^s((T^\nu)^3)$ по формулам

$$\begin{aligned} (h_\mu f)(p, q) &= (\varepsilon(p) + \varepsilon(q))f(p, q) - \mu \int_{(T^\nu)^2} \delta(p + q - p' - q')f(p', q') dp' dq', \\ (H_\mu f)(k_1, k_2, k_3) &= (\varepsilon(k_1) + \varepsilon(k_2) + \varepsilon(k_3))f(k_1, k_2, k_3) - \\ &- \mu \sum_{\alpha=1}^3 \int_{(T^\nu)^3} \delta(k_\alpha - k'_\alpha) \delta(k_\beta + k_\gamma - k'_\beta - k'_\gamma) f(k'_1, k'_2, k'_3) dk'_1 dk'_2 dk'_3, \\ &\alpha < \beta < \gamma, \quad \alpha, \beta, \gamma = 1, 2, 3. \end{aligned}$$

Здесь $\varepsilon(k) = \sum_{s \in \mathbb{Z}^\nu} \hat{\varepsilon}(s) \exp\{i(k, s)\}$ — преобразование Фурье функции $\hat{\varepsilon}$, $\delta(k)$ — ν -мерная дельта-функция Дирака.

Из свойств функции $\hat{\varepsilon}$ следует, что функция ε является аналитической в некоторой комплексной окрестности тора T^ν и удовлетворяет условию $\varepsilon(k) = \varepsilon(-k)$ для любого $k \in T^\nu$.

Пусть $k = p + q$ и $K = k_1 + k_2 + k_3$ — квазиимпульсы системы двух и системы трех частиц, а $\Gamma_k = \{(p, q) \in (T^\nu)^2 : k = p + q\}$, $F_K = \{(k_1, k_2, k_3) \in (T^\nu)^3 : K = k_1 + k_2 + k_3\}$ — соответственно ν -мерное и 2ν -мерное многообразия. Обозначим через $L_2^s(\Gamma_k)$ и $L_2^s(F_K)$ гильбертовы пространства всех квадратично интегрируемых функций, определенных на Γ_k и F_K и удовлетворяющих соответственно условиям $f(k - p, p) = f(q, p) = f(p, q)$ и

$$f(k_1, k_2, K - k_1 - k_2) = f(k_2, k_1, K - k_1 - k_2) = f(k_1, K - k_1 - k_2, k_2) = f(k_1, k_2, k_3).$$

Если перейти к переменным $K = k_1 + k_2 + k_3$, $k_1 = p$, $k_2 = q$, то легко видеть, что оператор H_μ действует “только по переменным p и q ”, т.е. является прямым операторным интегралом (см. [11–12]) семейства операторов $\hat{H}_\mu(K)$, действующих при каждом $K \in T^\nu$ в пространстве $L_2^s(F_K)$ по формуле

$$\begin{aligned} \hat{H}_\mu(K)f(p, q, K - p - q) &= \varepsilon_K(p, q)f(p, q, K - p - q) - \mu \int_{T^\nu} \left[f(p, q', K - p - q') + \right. \\ &\left. + f(q, q', K - q - q') + f(K - p - q, q', p + q - q') \right] dq', \end{aligned} \quad (1)$$

здесь $\varepsilon_K(p, q) = \varepsilon(p) + \varepsilon(q) + \varepsilon(K - p - q)$.

Оператор h_μ также разлагается в прямой интеграл

$$h_\mu = \int_{T^\nu} \oplus \hat{h}_\mu(k) dk,$$

где ограниченные самосопряженные операторы $\hat{h}_\mu(k)$, $k \in T^\nu$, действуют в гильбертовых пространствах $L_2^s(\Gamma_k)$ по формуле

$$\hat{h}_\mu(k)f(k - q, q) = \varepsilon_k(q)f(k - q, q) - \mu \int_{T^\nu} f(k - s, s) ds,$$

где $\varepsilon_k(q) = \varepsilon(k - q) + \varepsilon(q)$.

2. СПЕКТР И ВИРТУАЛЬНЫЙ УРОВЕНЬ ДВУХЧАСТИЧНОГО ОПЕРАТОРА

Пусть $\tilde{L}(k) \subset L_2(T^\nu)$ ($k \in T^\nu$) – подпространство, состоящее из функций $f \in L_2(T^\nu)$, удовлетворяющих условию $f(k - q) = f(q)$.

Рассмотрим семейство самосопряженных операторов $h_\mu(k)$, действующих в гильбертовом пространстве $\tilde{L}(k)$ по формуле

$$h_\mu(k)f(q) = \varepsilon_k(q)f(q) - \mu \int_{T^\nu} f(s) ds. \quad (2)$$

Для любого $k \in T^\nu$ операторы $h_\mu(k)$ и $\hat{h}_\mu(k)$ унитарно-эквивалентны. Обозначим $\varepsilon_{\min}(k) = \min_{q \in T^\nu} \varepsilon_k(q)$, $\varepsilon_{\max}(k) = \max_{q \in T^\nu} \varepsilon_k(q)$. В соответствии с теоремой Вейля о существенном спектре [12] непрерывный спектр $\sigma_c(h_\mu(k))$ оператора $h_\mu(k)$, $k \in T^\nu$, не зависит от $\mu > 0$ и совпадает с непрерывным спектром $\sigma_c(h_0(k))$ оператора $h_0(k)$, т.е. с отрезком $[\varepsilon_{\min}(k), \varepsilon_{\max}(k)]$.

Пусть

$$\Delta_\mu(k, z) = 1 - \mu \int_{T^\nu} \frac{dq}{\varepsilon_k(q) - z}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \sigma_c(h_\mu(k)).$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Если уравнение $h_\mu(k)\varphi(q) = \varepsilon_{\min}(k)\varphi(q)$ имеет нетривиальное решение в пространстве $L_p(T^\nu)$ при некотором $p \in [1, \frac{3}{2})$, то говорят (см. [7]), что оператор $h_\mu(k)$ имеет виртуальный уровень в левом крае непрерывного спектра.

Известно (см. [10]) следующее утверждение.

ЛЕММА 1. Число $z \in \mathbb{C} \setminus \sigma_c(h_\mu(k))$ является собственным значением оператора $h_\mu(k)$ тогда и только тогда, когда $\Delta_\mu(k, z) = 0$.

Отметим, что требование наличия виртуального уровня соответствует условию $\Delta_\mu(k, \varepsilon_{\min}(k)) = 0$. При больших размерностях $\nu \geq 5$ условие $\Delta_\mu(k, \varepsilon_{\min}(k)) = 0$ приводит к тому, что число $z = \varepsilon_{\min}(k)$ является собственным значением оператора $h_\mu(k)$, т.е. решение принадлежит $L_2(T^\nu)$.

Обозначим $\hat{\mu}(k) = \left(\int \frac{dq}{\varepsilon_k(q) - \varepsilon_{\min}(k)} \right)^{-1}$.

ЛЕММА 2. Пусть $k \in T^\nu$. Тогда имеют место следующие условия:

- а) если $\mu \in (0, \hat{\mu}(k))$, то оператор $h_\mu(k)$ не имеет собственных значений ниже непрерывного спектра;
- б) если $\mu > \hat{\mu}(k)$, то оператор $h_\mu(k)$ обладает единственным простым собственным значением, лежащим левее непрерывного спектра;
- в) если $\mu = \hat{\mu}(k)$, то $z = \varepsilon_{\min}(k)$ – левый край непрерывного спектра, являющийся виртуальным уровнем оператора $h_\mu(k)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Функция $\Delta_\mu(k, z)$ непрерывна по совокупности переменных и строго убывает по переменным μ и z соответственно при фиксированных $(k, z) \in T^\nu \times (-\infty, \varepsilon_{\min}(k))$ и $(k, \mu) \in T^\nu \times (0, \hat{\mu}(k))$. Из определения $\hat{\mu}(k)$ следует, что

$$\Delta_{\hat{\mu}(k)}(k, \varepsilon_{\min}(k)) = 0. \quad (3)$$

Из монотонности по μ следует, что $\Delta_\mu(k, \varepsilon_{\min}(k)) > 0$ при $\mu < \hat{\mu}(k)$. Теперь из монотонности по z имеем $\Delta_\mu(k, z) > \Delta_\mu(k, \varepsilon_{\min}(k)) > 0$ при $\mu < \hat{\mu}(k)$ и $z < \varepsilon_{\min}(k)$. Применяя лемму 1, получим утверждение “а” леммы 2.

Докажем утверждение “б”. Из (3) и монотонности по μ имеем

$$\Delta_\mu(k, \varepsilon_{\min}(k)) < 0 \quad \text{при} \quad \mu > \hat{\mu}(k).$$

Фиксируя μ , получаем $\lim_{z \rightarrow -\infty} \Delta_\mu(k, z) = 1$. Следовательно, существует z_0 такое, что $\Delta_\mu(k, z_0) > 0$. Так как непрерывная функция $\Delta_\mu(k, z)$ принимает на концах сегмента $[z_0, \varepsilon_{\min}(k)]$ значения разных знаков, то она обращается в нуль в некоторой точке $z_1 \in (z_0, \varepsilon_{\min}(k))$. Вследствие монотонности она единственна. По лемме 1 число z_1 является собственным значением оператора $h_\mu(k)$. Ему соответствует собственная функция $f(p) = (\varepsilon(k - p) + \varepsilon(p) - z_1)^{-1}$, и всякое другое решение уравнения $h_\mu(k)\varphi = z_1\varphi$ выражается через f .

Докажем утверждение “в”. В этом случае уравнение

$$h_\mu(k)\varphi(p) = \varepsilon_{\min}(k)\varphi(p)$$

имеет ненулевое решение $f(p) = (\varepsilon(k - p) + \varepsilon(p) - \varepsilon_{\min}(k))^{-1}$. Из невырожденности минимума функции $\varepsilon(k - p) + \varepsilon(p)$ вытекает, что f интегрируема, т.е. левый край непрерывного спектра является виртуальным уровнем для оператора $h_{\hat{\mu}(k)}(k)$.

ЛЕММА 3. Для любого $k \in T^\nu$ оператор $h_\mu(k)$ не имеет собственных значений, лежащих в $(\varepsilon_{\max}(k), \infty)$, и правый край непрерывного спектра не является виртуальным уровнем.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из положительности подынтегральной функции $(z - \varepsilon_k(q))^{-1}$ при $z \geq \varepsilon_{\max}(k)$ имеем

$$\Delta_\mu(k, z) = 1 + \mu \int_{T^\nu} \frac{dq}{z - \varepsilon_k(q)} \geq 1. \quad (4)$$

Из неравенства (4) и леммы 1 следует, что у оператора $h_\mu(k)$ нет собственных значений на полуоси $(\varepsilon_{\max}(k), \infty)$.

Теперь докажем, что $z = \varepsilon_{\max}(k)$ не является виртуальным уровнем для оператора $h_\mu(k)$. Допустим противное, т.е. что уравнение

$$(\varepsilon(k - p) + \varepsilon(p))f(p) - \mu \int_{T^\nu} f(q) dq = \varepsilon_{\max}(k)f(p) \quad (5)$$

обладает нетривиальным решением. Решение уравнения (5) имеет вид

$$f(p) = \mu C_f (\varepsilon(k - p) + \varepsilon(p) - \varepsilon_{\max}(k))^{-1}, \quad (6)$$

где

$$C_f = \int_{T^\nu} f(q) dq. \quad (7)$$

Подставляя (6) в (7), получим уравнение относительно C_f :

$$C_f \Delta_\mu(k, \varepsilon_{\max}(k)) = 0.$$

Из неравенства (4) следует, что $C_f = 0$. Тогда из (6) имеем $f(p) \equiv 0$, что противоречит предположению. Лемма доказана.

3. СТРУКТУРА СУЩЕСТВЕННОГО СПЕКТРА ТРЕХЧАСТИЧНОГО ОПЕРАТОРА И УРАВНЕНИЯ ВАЙНБЕРГА

Пусть $L(K) \subset L_2((T^\nu)^2)$ – подпространство, состоящее из функций $f \in L_2((T^\nu)^2)$, удовлетворяющих условиям $f(p, q) = f(q, p) = f(K - p - q, q)$, а $H_\mu(K)$, $K \in T^\nu$, – ограниченный самосопряженный оператор, действующий в гильбертовом пространстве $L(K)$ по формуле

$$H_\mu(K)f(p, q) = \varepsilon_K(p, q)f(p, q) - \mu \int_{T^\nu} [f(K - p - q, s) + f(p, s) + f(q, s)] ds.$$

Для любого $K \in T^\nu$ оператор $H_\mu(K)$ унитарно-эквивалентен оператору $\widehat{H}_\mu(K)$, действующему в $L_2^s(F_K)$ по формуле (1).

Рассмотрим оператор $h_\mu(K, p)$, $K, p \in T^\nu$, действующий в гильбертовом пространстве $L_2(T^\nu)$ по формуле

$$h_\mu(K, p)f(q) = \varepsilon_K(p, q)f(q) - \mu \int_{T^\nu} f(s) ds.$$

Заметим, что оператор $h_\mu(K, p)$ представляется в виде суммы двух операторов $\tilde{\varepsilon}(p)$ и $h_\mu(K - p)$, т.е. $h_\mu(K, p) = \tilde{\varepsilon}(p) + h_\mu(K - p)$, где $\tilde{\varepsilon}(p)$ – оператор умножения на число $\varepsilon(p)$, а $h_\mu(k)$ – оператор, определяемый формулой (2).

Непрерывный спектр оператора $h_\mu(K, p)$ не зависит от $\mu > 0$ и совпадает с отрезком $[\varepsilon_{\min}(K, p), \varepsilon_{\max}(K, p)]$, где $\varepsilon_{\min}(K, p) = \min_q \varepsilon_K(p, q)$.

ЛЕММА 4. Для любых $K, p \in T^\nu$ число $z \in \mathbb{C} \setminus [\varepsilon_{\min}(K, p), \varepsilon_{\max}(K, p)]$ является собственным значением оператора $h_\mu(K, p)$ тогда и только тогда, когда $\Delta_\mu(K - p, z - \varepsilon(p)) = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточность. Пусть $z \in \mathbb{C} \setminus [\varepsilon_{\min}(K, p), \varepsilon_{\max}(K, p)]$ является собственным значением оператора $h_\mu(K, p)$, а $f \in L_2(T^\nu)$ – соответствующая собственная функция, т.е.

$$(\varepsilon_K(p, q) - z)f(q) = \mu \int f(q) dq. \quad (8)$$

Из (8) следует, что собственная функция имеет вид

$$f(q) = \frac{\mu C_f}{\varepsilon_K(p, q) - z} \neq 0, \quad (9)$$

где

$$C_f = \int f(q) dq. \quad (10)$$

Подставляя (9) в (10), получим

$$C_f \Delta_\mu(K - p, z - \varepsilon(p)) = 0. \quad (11)$$

Из (11) следует, что $C_f = 0$ или $\Delta_\mu(K - p, z - \varepsilon(p)) = 0$. Условие $C_f = 0$ противоречит (9), следовательно, $\Delta_\mu(K - p, z - \varepsilon(p)) = 0$.

Необходимость. Если для некоторого $z \in \mathbb{C} \setminus [\varepsilon_{\min}(K, p), \varepsilon_{\max}(K, p)]$ имеет место равенство $\Delta_\mu(K - p, z - \varepsilon(p)) = 0$, то $f(q) = (\varepsilon_K(p, q) - z)^{-1} \in L_2(T^\nu)$ есть собственная функция оператора $h_\mu(K, p)$, отвечающая собственному значению z .

Пусть $\sigma(H)$ – спектр оператора H и $\sigma_\mu(K) = \bigcup_{p \in T^\nu} \sigma(h_\mu(K, p))$, $K \in T^\nu$. Для любого $z \in \mathbb{C} \setminus \sigma_\mu(K)$ определим оператор $T_{\mu, K}(z)$, действующий в $L_2(T^\nu)$ по формуле

$$(T_{\mu, K}(z)\psi)(p) = \frac{2\mu}{\Delta_\mu(K - p, z - \varepsilon(p))} \int \frac{\psi(q) dq}{\varepsilon_K(p, q) - z}. \quad (12)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Множество $\sigma_{\text{дв}}(H_\mu(K)) = \{z : \Delta_\mu(K - p, z - \varepsilon(p)) = 0\}$ для некоторого $p \in T^\nu$ называется двухчастичной ветвью трехчастичного существенного спектра оператора $H_\mu(K)$.

Предположим, что при каждом $K \in T^\nu$ функция $\varepsilon_K(p, q)$ имеет единственный невырожденный минимум. Из симметричности функции ε_K относительно p и q и единственности минимума вытекает, что ее точка минимума имеет вид $(P(K), P(K))$. Пусть $z(K) = \varepsilon_K(P(K), P(K))$. Тогда получаем

$$\min_p \left(\int \frac{dq}{\varepsilon_K(p, q) - z(K)} \right)^{-1} = \left(\int \frac{dq}{\varepsilon_K(P(K), q) - z(K)} \right)^{-1}. \quad (13)$$

Заметим, что предположение (13) естественно, поскольку если для любых $p, q \in T^\nu$ выполнено неравенство $\varepsilon_K(p, q) \geq \varepsilon_K(P(K), q)$, то для любого $z \leq z(K)$ имеем $\varepsilon_K(p, q) - z \geq \varepsilon_K(P(K), q) - z \geq 0$.

Из монотонности интеграла Лебега получим

$$0 < \int \frac{dq}{\varepsilon_K(p, q) - z(K)} \leq \int \frac{dq}{\varepsilon_K(P(K), q) - z(K)}.$$

Отсюда следует равенство (13). Эти предположения выполняются в случае, когда $\varepsilon(p) = \nu - \cos p_1 - \cos p_2 - \dots - \cos p_\nu$, где $p = (p_1, p_2, \dots, p_\nu) \in T^\nu$.

Если $\mu \in (0, \mu(K)]$, то существенный спектр оператора $H_\mu(K)$ состоит из отрезка $[z(K), Z(K)]$, где $\mu(K) = \left(\int \frac{dq}{\varepsilon_K(P(K), q) - z(K)} \right)^{-1}$, $Z(K) = \max_{p, q} \varepsilon_K(p, q)$. Равенство $\mu = \mu(K)$ означает, что оператор $h_\mu(K, P(K))$ имеет виртуальный уровень в левом

крае $z(K)$ существенного спектра, т.е. двухчастичная ветвь трехчастичного существенного спектра оператора $H_\mu(K)$ содержится в трехчастичном существенном спектре и их левые края совпадают.

Если $\mu \in (0, \mu(K)]$, то имеем

$$\begin{array}{c} \text{существенный спектр} \\ \hline z(K) \qquad \qquad \qquad Z(K) \end{array} .$$

Если $\mu \in (\mu(K), \tilde{\mu}(K)]$, где $\tilde{\mu}(K) = \max_p \left(\int \frac{dq}{\varepsilon_K(p, q) - z(K)} \right)^{-1}$, то существенный спектр оператора $H_\mu(K)$ совпадает с отрезком $[E_\mu(K), Z(K)]$, где $E_\mu(K)$ – нижняя грань множества $\sigma_{\text{дв}}(H_\mu(K))$:

$$\begin{array}{c} \text{существенный спектр} \\ \hline E_\mu(K) \quad z(K) \qquad \qquad \qquad Z(K) \end{array} . \quad (14)$$

Если $\mu > \tilde{\mu}(K)$, то между двухчастичной ветвью трехчастичного спектра и трехчастичным существенным спектром появляется лакуна:

$$\begin{array}{c} \text{существенный спектр} \\ \hline E_\mu(K) \quad \text{двухчастичная ветвь} \qquad \qquad z(K) \quad \text{трехчастичный спектр} \quad Z(K) \end{array} .$$

При увеличении μ другая двухчастичная ветвь не появляется, т.к. двухчастичный оператор обладает единственным собственным значением.

ЛЕММА 5. Для любых $K \in T^\nu$, $\mu > 0$ оператор $H_\mu(K)$ не имеет собственных значений $z > Z(K) = \max \varepsilon_K(p, q)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через V оператор интегрирования в гильбертовом пространстве $L_2(T^\nu)$, определенный формулой $(Vf)(p) = \int f(q) dp$. Для любого $f \in L_2(T^\nu)$ имеем $(Vf, f) = \iint f(p) \overline{f(q)} dp dq = \left| \int f(p) dp \right|^2 \geq 0$, т.е. $V \geq 0$ – положительный оператор. Тогда тензорное произведение $I \otimes V$ также является положительным (см. [12]). Сумма положительных операторов есть положительный оператор, следовательно, оператор $A: L_2((T^\nu)^2) \rightarrow L_2((T^\nu)^2)$, определяемый формулой

$$(Af)(p, q) = \int [f(p, s) + f(q, s) + f(K - p - q, s)] ds,$$

положителен. По принципу минимакса (см. [12])

$$\sup(H_\mu(K)f, f) = \sup \left(\int \varepsilon_K(p, q) f(p, q) \overline{f(p, q)} dp dq - \mu(Af, f) \right) \leq Z(K).$$

Верхняя грань берется по единичному шару в пространстве $L_2((T^\nu)^2)$. Это означает, что $\sigma(H_\mu(K)) \cap (Z(K), \infty) = \emptyset$, т.е. на полуоси $(Z(K), \infty)$ оператор $H_\mu(K)$ не имеет точек спектра.

ЛЕММА 6. Для любых $K \in T^\nu$ и $\mu \in (0, \mu(K))$ число $z \in \mathbb{C} \setminus [z(K), Z(K)]$ является собственным значением оператора $H_\mu(K)$ тогда и только тогда, когда оператор $T_{\mu,K}(z)$ имеет собственное значение, равное единице.

Эта лемма доказана в [10], но нам целесообразно привести доказательство ее необходимой части.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. **Необходимость.** Пусть $z \in \mathbb{C} \setminus [z(K), Z(K)]$ – собственное значение и $f \in L(K)$ – соответствующая собственная функция оператора $H_\mu(K)$, т.е. уравнение

$$\varepsilon_K(p, q)f(p, q) - \mu \int_{T^\nu} [f(p, q') + f(q, q') + f(K - p - q, q')] dq' = zf(p, q) \quad (15)$$

имеет ненулевое решение $f \in L(K)$. Вводя обозначение

$$\hat{f}(p) = \int_{T^\nu} f(p, s) ds, \quad (16)$$

из равенства (15) получаем

$$f(p, q) = \frac{\mu}{\varepsilon_K(p, q) - z} (\hat{f}(p) + \hat{f}(q) + \hat{f}(K - p - q)). \quad (17)$$

Подставляя выражение (17) для $f(p, q)$ в (16), получим, что уравнение

$$\hat{f}(p) \left(1 - \mu \int_{T^\nu} \frac{dq'}{\varepsilon_K(p, q') - z} \right) = \mu \int_{T^\nu} \frac{\hat{f}(q') dq'}{\varepsilon_K(p, q') - z} + \mu \int_{T^\nu} \frac{\hat{f}(K - p - q') dq'}{\varepsilon_K(p, q') - z} \quad (18)$$

имеет ненулевое решение. Делая замену переменных $K - p - q' = p'$ во втором интеграле правой части уравнения (18) и учитывая равенство $\varepsilon_K(p, K - p - p') \equiv \varepsilon_K(p, p')$, получим, что $\hat{f} \in L_2(T^\nu)$ является решением следующего уравнения:

$$\hat{f}(p) = \frac{2\mu}{\Delta_\mu(K - p, z - \varepsilon(p))} \int_{T^\nu} \frac{\hat{f}(p') dq'}{\varepsilon_K(p, q') - z}, \quad (19)$$

т.е. $\hat{f} \in L_2(T^\nu)$ – собственная функция оператора $T_{\mu,K}(z)$, соответствующая собственному значению 1.

Подставляя выражение (16) для $\hat{f}(p)$ в правую часть равенства (19), получим

$$\hat{f}(p) = \frac{2\mu}{\Delta_\mu(K - p, z - \varepsilon(p))} \int_{T^\nu} \int_{T^\nu} \frac{f(p', q')}{\varepsilon_K(p, p') - z} dp' dq'. \quad (20)$$

Подставляя (20) в (17), найдем компактное уравнение Вайнберга для трехчастичного оператора Шредингера на решетке:

$$f(p, q) = \frac{2\mu^2}{\varepsilon_K(p, q) - z} \int_{T^\nu} \int_{T^\nu} \left[\frac{\Delta_\mu^{-1}(K - p, z - \varepsilon(p))}{\varepsilon_K(p, q') - z} + \frac{\Delta_\mu^{-1}(K - q, z - \varepsilon(q))}{\varepsilon_K(q, q') - z} + \frac{\Delta_\mu^{-1}(p + q, z - \varepsilon(K - p - q))}{\varepsilon_K(K - p - q, q') - z} \right] f(p', q') dp' dq'. \quad (21)$$

4. ТРЕХМЕРНЫЙ СЛУЧАЙ. КОНЕЧНОСТЬ ДИСКРЕТНОГО СПЕКТРА

ТЕОРЕМА 1. Пусть $K \in T^3$ и $\mu \in (0, \mu(K))$. Тогда дискретный спектр оператора $H_\mu(K)$ может быть только конечен.

Сначала докажем несколько вспомогательных утверждений. В дальнейшем через C_1 и C_2 обозначаются различные положительные постоянные, значения которых не конкретизированы.

ЛЕММА 7. Для любого $\mu \in (0, \mu(K))$ существуют положительные C_1 и C_2 такие, что выполняются неравенства

$$C_1 \leq \Delta_\mu(K - p, z - \varepsilon(p)) \leq C_2 \quad \text{при всех } p \in T^3 \quad \text{и} \quad z \leq z(K).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из определения $\mu(K)$ следует, что

$$\min_p \Delta_{\mu(K)}(K - p, z(K) - \varepsilon(p)) = 0.$$

Так как функция $\Delta_\mu(K - p, z - \varepsilon(p))$ строго убывает по μ и z , то

$$\Delta_\mu(K - p, z - \varepsilon(p)) > \Delta_\mu(K - p, z(K) - \varepsilon(p)) > \min_p \Delta_\mu(K - p, z(K) - \varepsilon(p)) > 0$$

при всех $p \in T^3$ и $z \leq z(K)$. Отсюда получим неравенство $C_1 \leq \Delta_\mu(K - p, z - \varepsilon(p))$. Неравенство $\Delta_\mu(K - p, z - \varepsilon(p)) \leq C_2$ следует из компактности T^3 и монотонности по z .

ЛЕММА 8. Для любого $K \in T^3$ существуют $\delta > 0$, C_1, C_2 такие, что выполняются неравенства:

а) $C_1(|p - P(K)|^2 + |q - P(K)|^2) \leq \varepsilon_K(p, q) - z(K) \leq C_2(|p - P(K)|^2 + |q - P(K)|^2)$ при $p, q \in U_\delta(P(K))$;

б) $\varepsilon_K(p, q) - z \geq \varepsilon_K(p, q) - z(K) \geq C_1 > 0$ при $p \in T^3 \setminus U_\delta(P(K))$, $q \in T^3$ или $q \in T^3 \setminus U_\delta(P(K))$, $p \in T^3$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение “а” леммы следует из аналитичности функции ε_K и невырожденности минимума, утверждение “б” вытекает из единственности минимума (см. также [10]).

Введем обозначения: $p_1 = p$, $p_2 = q$, $p_3 = K - p - q$. Определим оператор $T_\alpha(z)$, $\alpha = 1, 2, 3$, в пространстве $L(K)$ следующим образом:

$$(T_\alpha(z)f)(p_\alpha, p) = \frac{1}{\Delta_\mu(K - p_\alpha, z - \varepsilon(p_\alpha))} \int_{T^3} f(p, q') dq'.$$

Тогда уравнение Вайнберга принимает вид

$$f = 2\mu^2 \sum_{\alpha=1}^3 R_z(H_0(K)) T_\alpha(z) R_z(H_0(K)) V f,$$

где $R_z(H_0(K))$ – резольвента оператора $H_0(K)$, V – оператор интегрирования по первому аргументу, т.е. $(Vf)(p, q) = \int f(p', q) dp'$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Покажем, что операторы $A_{\alpha,K}(z) = R_z(H_0(K)) \times T_\alpha(z) R_z(H_0(K)) V$, $\alpha = 1, 2, 3$, действующие в пространстве $L(K)$, принадлежат при $z \leq z(K)$ классу Гильберта–Шмидта и непрерывны в равномерной операторной топологии в точке $z = z(K)$.

Напишем ядро оператора $A_{\alpha,K}(z)$:

$$A_{\alpha,K}(p, q, q', z) = \frac{1}{\varepsilon_K(p, q) - z} \frac{\Delta_\mu^{-1}(K - p_\alpha, z - \varepsilon(p_\alpha))}{\varepsilon_K(p, q') - z}.$$

Из лемм 8, 9 вытекает, что

$$\begin{aligned} \int_{(T^3)^4} |A_{\alpha,K}(p, q, q', z)|^2 dp dq dp' dq' &\leq \\ &\leq C_1 \int_{(U_\delta(P(K)))^3} dp dq dq' \frac{(|p - P(K)|^2 + |q - P(K)|^2)^{-2}}{(|p - P(K)|^2 + |q' - P(K)|^2)^2} + C_2, \end{aligned} \quad (22)$$

где C_1, C_2 — некоторые постоянные. Переходя в сферическую систему координат в правой части неравенства (22), имеем

$$\begin{aligned} \int_{[0,\delta]^3} \frac{r_1^2 dr_1 r_2^2 dr_2 r_3^2 dr_3}{(r_1^2 + r_2^2)^2 (r_1^2 + r_3^2)^2} &\leq C_1 \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^\delta r_3^2 dr_3 \int_0^\delta \frac{(r^2 \cos \varphi)^2 (r \sin \varphi)^2 r dr}{r^2 (r^2 \cos^2 \varphi + r_3^2)^2} = \\ &= \frac{1}{2} C_1 \int_0^{\pi/2} \sin^2 \varphi d\varphi \int_0^\delta r_3^2 dr_3 \int_0^\delta \frac{d(r^2 \cos^2 \varphi + r_3^2)}{(r^2 \cos^2 \varphi + r_3^2)^2} = \\ &= \frac{C_1}{2} \int_0^{\pi/2} \sin^2 \varphi d\varphi \int_0^\delta \left(\frac{1}{r_3^2} - \frac{1}{\delta^2 \cos^2 \varphi + r_3^2} \right) r_3^2 dr_3 < \\ &< C_1 \int_0^{\pi/2} \sin^2 \varphi d\varphi \int_0^\delta \frac{r_3^2 dr_3}{r_3^2} < C_1. \end{aligned}$$

Это означает, что при $z \leq z(K)$ оператор $A_{\alpha,K}(z)$ принадлежит классу Гильберта–Шмидта.

Докажем, что имеет место соотношение

$$\lim_{z \rightarrow z(K)} \int dp dq dq' |A_{\alpha,K}(p, q, q', z) - A_{\alpha,K}(p, q, q', z(K))|^2 = 0. \quad (23)$$

Подынтегральная функция в (23), очевидно, непрерывна по z в области $(p, q, q') \in (T^3)^3 \setminus (U_\delta(P(K)))^3$. Поэтому достаточно оценить равномерно по z интеграл от $|A_{\alpha,K}(p, q, q', z) - A_{\alpha,K}(p, q, q', z(K))|^2$ по области $(U_\delta(P(K)))^3$.

Разлагая в ряд Тейлора функцию $\varepsilon_K(p, q)$ в δ -окрестности ее точки минимума $(P(K), P(K))$ и используя леммы 7, 8, получим следующие оценки:

$$\begin{aligned}
& \int_{(U_\delta(P(K)))^3} |A_{\alpha, K}(p, q, q'; z) - A_{\alpha, K}(p, q, q'; z(K))|^2 dp dq dq' \leq \\
& \leq C_1 \int_{(U_\delta(P(K)))^3} |z(K) - z|^2 \times \\
& \quad \times \frac{[(p - P(K))^2 + (q - P(K))^2 + (p - P(K))^2 + (q' - P(K))^2]^2}{[(p - P(K))^2 + (q - P(K))^2 + (z(K) - z)]^2 [(p - P(K))^2 + (q' - P(K))^2]^2} \times \\
& \quad \times \frac{dp dq dq'}{[(p - P(K))^2 + (q - P(K))^2 + (z(K) - z)]^2 [(p - P(K))^2 + (q' - P(K))^2]^2} \leq \\
& \leq C_1 \int_{(U_\delta(0))^3} |z(K) - z|^2 \left| \frac{1}{(p^2 + q^2 + z(K) - z)(p^2 + q'^2 + z(K) - z)(p^2 + q'^2)} + \right. \\
& \quad \left. + \frac{1}{(p^2 + q^2 + z(K) - z)(p^2 + q'^2 + z(K) - z)(p^2 + q^2)} \right|^2 dp dq dq' \leq \\
& \leq 2C_1 |z(K) - z|^2 \int_{(U_\delta(0))^3} \left\{ \frac{(p^2 + q'^2 + z(K) - z)^{-2}}{(p^2 + q^2 + z(K) - z)^2 (p^2 + q'^2)^2} + \right. \\
& \quad \left. + \frac{(p^2 + q'^2 + z(K) - z)^{-2}}{(p^2 + q^2 + z(K) - z)^2 (p^2 + q^2)^2} \right\} dp dq dq' = \\
& = 4C_1 |z(K) - z|^2 \int_{(U_\delta(0))^3} \frac{dp dq dq'}{(p^2 + q^2 + z(K) - z)^2 (p^2 + q'^2 + z(K) - z)^2 (p^2 + q^2)^2}.
\end{aligned}$$

Последнее равенство следует из симметричности подынтегрального выражения относительно переменных q и q' , а неравенство вытекает из неравенства Коши–Буняковского. Обозначим $z(K) - z = a^2$ ($a > 0$) и перейдем к сферическим координатам в последнем интеграле:

$$\begin{aligned}
& 4C_1 a^4 (4\pi)^3 \int_{(0, \delta)^3} \frac{r_1^2 r_2^2 r_3^2 dr_1 dr_2 dr_3}{(r_1^2 + r_2^2 + a^2)^2 (r_1^2 + r_3^2 + a^2)^2 (r_1^2 + r_2^2)^2} \leq \\
& \leq C_2 a^4 \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^\delta dr \int_0^\delta \frac{(r \cos \varphi)^2 (r \sin \varphi)^2 r_3^2 r}{(r^2 + a^2)^2 (r_3^2 + a^2)^2 r^4} dr_3 \leq \\
& \leq C_3 a^4 \int_0^\delta \frac{r dr}{(r^2 + a^2)^2} \int_0^\delta \frac{r_3^2 dr_3}{(r_3^2 + a^2)^2} = C_3 a^4 \int_0^{\delta/a} \frac{at d(at)}{a^4 (t^2 + 1)^2} \int_0^{\delta/a} \frac{(at)^2 d(at)}{a^4 (t^2 + 1)^2} \leq \\
& \leq Ca \int_0^\infty \frac{t dt}{(t^2 + 1)^2} \int_0^\infty \frac{t^2 dt}{(t^2 + 1)^2} \leq Ca.
\end{aligned}$$

Следовательно, существует постоянная C , не зависящая от z , такая, что

$$\begin{aligned}
& \lim_{z \rightarrow z(K)} \int dp dq dp' dq' |A_{\alpha, K}(p, q, q'; z) - A_{\alpha, K}(p, q, q'; z(K))|^2 \leq \\
& \leq C \lim_{z \rightarrow z(K)} \sqrt{z(K) - z} = 0.
\end{aligned}$$

Отсюда следует $\|A_{\alpha,K}(z) - A_{\alpha,K}(z(K))\| \rightarrow 0$ при $z \rightarrow z(K)$.

Допустим, что оператор $H_\mu(K)$ имеет бесконечное число собственных значений $z_i < z(K)$ и $z_i \rightarrow z(K)$ при $i \rightarrow \infty$. Обозначим через φ_i соответствующие ортонормированные собственные функции. Из уравнения (21) вытекает компактность множества $\{\varphi_i\}_{i=1}^\infty$ в пространстве $L(K)$, что противоречит ортогональности φ_i . Теорема 1 доказана.

Случай $\mu = \min_p \left(\int \frac{dq}{\varepsilon_K(p,q) - z(K)} \right)^{-1}$ рассмотрен в [10]. Там доказано, что оператор $H_{\mu(K)}(K)$ имеет бесконечное число собственных значений $z_i < z(K)$, имеющих предельную точку $z(K)$.

Неравенство $\mu > \mu(K)$ соответствует тому, что в непрерывном случае оператор Шредингера имеет существенный спектр, совпадающий с полуосью $[\varkappa, \infty)$, $\varkappa < 0$.

Обозначим через $D_{\mu,K}(z)$ определитель Фредгольма $I + T_{\mu,K}(z)$, где I — единичный оператор в $L_2(T^3)$, $T_{\mu,K}(z)$ — оператор, определяемый по формуле (12).

Из леммы 6 и теоремы Фредгольма следует

ЛЕММА 9. Число $z \in \mathbb{C} \setminus \sigma_c(H_\mu(K))$ является собственным значением оператора $H_\mu(K)$ тогда и только тогда, когда $D_{\mu,K}(z) = 0$.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $K \in T^3$ и $\mu > \mu(K)$, тогда оператор $H_\mu(K)$ имеет конечное число собственных значений вне существенного спектра.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть сначала $\mu \in (\mu(K), \tilde{\mu}(K)]$. В этом случае непрерывный спектр оператора $H_\mu(K)$ состоит из отрезка $[E_\mu(K), Z(K)]$ (см. (14)). Из леммы 5 следует, что оператор $H_\mu(K)$ не имеет точки спектра правее $Z(K)$. Поэтому единственной предельной точкой множества собственных значений оператора $H_\mu(K)$ может быть $E_\mu(K)$. Так как функция $(\varepsilon_K(p, q) - z)^{-1}$ аналитична по совокупности переменных при $z < z(K)$, то определитель Фредгольма $D_{\mu,K}(z)$ оператора $I + T_{\mu,K}(z)$ аналитически продолжается в некоторую выколотую окрестность $V_\varepsilon(E_\mu(K)) = \{\xi \in \mathbb{C} : 0 < |\xi - E_\mu(K)| < \varepsilon\}$ точки $E_\mu(K)$. Это аналитическое продолжение имеет вид (см. [13])

$$D_{\mu,K}^-(z) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n(K, \mu) (z - E_\mu(K))^{n/2} \quad \text{при} \quad z \in V_\varepsilon(E_\mu(K)),$$

и одна из его ветвей совпадает с функцией $D_{\mu,K}(z)$ при $\operatorname{Re} z < E_\mu(K)$. Следовательно, число $E_\mu(K)$ не может быть предельной точкой нулей функции $D_{\mu,K}(z)$. Вследствие леммы 9 левый край $E_\mu(K)$ существенного спектра не является предельной точкой собственных значений оператора $H_\mu(K)$. Пусть теперь $\mu > \tilde{\mu}(K)$. В этом случае существенный спектр оператора $H_\mu(K)$ состоит из объединения двух отрезков, т.е. $\sigma_{\text{ess}}(H_\mu(K)) = [E_\mu(K), \tilde{E}_\mu(K)] \cup [z(K), Z(K)]$, где $\tilde{E}_\mu(K)$ — верхняя грань множества $\sigma_{\text{дв}}(H_\mu(K))$. В силу леммы 5 и теоремы 1 точки $Z(K)$ и $z(K)$ не могут являться предельными точками множества собственных значений оператора $H_\mu(K)$. То что $E_\mu(K)$ и $\tilde{E}_\mu(K)$ не являются предельными точками множества собственных значений оператора $H_\mu(K)$, доказывается с использованием разложений функции $D_{\mu,K}(z)$ в окрестностях этих точек.

5. СЛУЧАЙ БОЛЬШИХ РАЗМЕРНОСТЕЙ

Перейдем теперь к случаю, когда оператор $h_\mu(K, P(K))$ имеет виртуальный уровень или край непрерывного спектра является собственным значением, т.е. $\mu = \mu(K)$.

Пусть уравнение $h_\mu(K, P(K))f(q) = z(K)f(q)$ имеет нетривиальное решение. Тогда это решение имеет вид (см. формулу (9))

$$f(q) = \frac{\text{const}}{\varepsilon_K(P(K), q) - z(K)}.$$

В силу невырожденности минимума функции $\varepsilon_K(P(K), q)$ решение $f(q)$ принадлежит $L_2(T^\nu)$ при $\nu \geq 5$, т.е. край непрерывного спектра $z(K)$ является собственным значением оператора $h_\mu(K, P(K))$. Из определения $\mu(K)$ следует, что

$$\Delta_\mu(K - P(K), z(K) - \varepsilon(P(K))) = 1 - \mu(K) \int_{T^\nu} \frac{dq}{\varepsilon_K(P(K), q) - z(K)} = 0.$$

ЛЕММА 10. *Существуют $\delta > 0$, $C_1, C_2 > 0$ такие, что выполняются неравенства*

$$\begin{aligned} C_1 |p - P(K)|^2 &\leq \Delta_\mu(K - p, z(K) - \varepsilon(p)) \leq C_2 |p - P(K)|^2 \quad \text{при } p \in U_\delta(P(K)), \\ \Delta_\mu(K - p, z - \varepsilon(p)) &\geq \Delta_\mu(K - p, z(K) - \varepsilon(p)) \geq C_1 > 0 \quad \text{при } p \in T^\nu \setminus U_\delta(P(K)). \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО леммы следует из результатов работ [12, 14, 15].

ТЕОРЕМА 3. *Пусть $\nu \geq 5$. Тогда для любых $K \in T^\nu$ и $\mu > 0$ оператор $H_\mu(K)$ имеет лишь конечное число собственных значений вне существенного спектра.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО теоремы в случае, если $\mu \neq \mu(K)$, аналогично доказательству теорем 1 и 2. Докажем теорему при $\mu = \mu(K)$. Для этого достаточно показать, что операторы

$$A_{\alpha, K}(z) = R_z(H_0(K))T_\alpha(z)R_z(H_0(K))V, \quad \alpha = 1, 2, 3,$$

являются операторами Гильберта–Шмидта при $z \leq z(K)$ и непрерывны в равномерной операторной топологии в точке $z = z(K)$.

Из лемм 8 и 10 вытекает, что

$$\begin{aligned} \int_{(T^\nu)^4} |A_{\alpha, K}(p, q, q'; z)|^2 dp dq dp' dq' &\leq C_1 \int_{(U_\delta(P(K)))^3} dp dq dq' \times \\ &\times \frac{1}{(|p - P(K)|^2 + |q - P(K)|^2)^2 (|p - P(K)|^2 + |q' - P(K)|^2)^2 (|p - P(K)|^2)^2} + C_2. \end{aligned}$$

Подынтегральная функция зависит только от радиус-вектора, поэтому, переходя к сферическим координатам, имеем

$$S^3 \int_{[0, \delta]^3} \frac{r_1^{\nu-1} dr_1 r_2^{\nu-1} dr_2 r_3^{\nu-1} dr_3}{(r_1^2 + r_2^2)^2 (r_1^2 + r_3^2)^2 r_1^4} \leq S^3 \int_{[0, \delta]^3} \frac{r_1^{\nu-1} dr_1 r_2^{\nu-1} dr_2 r_3^{\nu-1} dr_3}{r_1^4 r_2^4 r_3^4} \leq C_1.$$

Первое неравенство вытекает из монотонности интеграла Лебега, второе – из условия $\nu \geq 5$. Здесь S – площадь $(\nu - 1)$ -мерной единичной сферы. Это означает, что оператор $A_{\alpha, K}(z)$ является оператором Гильберта–Шмидта при $z \leq z(K)$. Непрерывность в равномерной операторной топологии в точке $z = z(K)$ устанавливается аналогичным рассуждением, как при доказательстве теоремы 1.

Работа поддержана Фондом фундаментальных исследований РУз.

Список литературы

- [1] *Д. Р. Яфаев.* ДАН СССР. 1972. Т. 206. С. 68.
- [2] *Г. М. Жислин.* ДАН СССР. 1972. Т. 207. С. 25.
- [3] *Д. Р. Яфаев.* Матем. сб. 1974. Т. 94. С. 567.
- [4] *Yu. N. Ovchinnikov, I. M. Sigal.* Ann. Phys. 1989. V. 123. P. 274.
- [5] *H. J. Tamura.* Funct. Anal. 1991. V. 95. P. 433.
- [6] *В. Н. Ефимов.* ЯФ. 1970. Т. 12. Вып. 5. С. 1080.
- [7] *Д. Р. Яфаев.* ТМФ. 1975. Т. 25. № 2. С. 185.
- [8] *D. C. Mattis.* Rev. Modern Phys. 1986. V. 58. № 2. P. 361.
- [9] *A. I. Mogilner.* In Applications of self-adjoint extensions in quantum physics. V. 324. Eds P. Exner and P. Seba. Lecture Notes in Phys. Berlin: Springer-Verlag, 1988.
- [10] *С. Н. Лакаев.* Функц. анализ и его прилож. 1993. Т. 27. Вып. 3. С. 15.
- [11] *М. А. Наймарк.* Нормированные кольца. М.: Наука, 1968.
- [12] *М. Рид, Б. Саймон.* Методы современной математической физики. Т. 4. Анализ операторов. М.: Мир, 1982.
- [13] *J. I. Abdullaev, S. N. Lakaev.* Advances in Soviet Mathematics. 1991. V. 5. P. 1.
- [14] *С. Н. Лакаев, Ш. М. Тулавова.* ТМФ. 1994. Т. 101. № 2. С. 235.
- [15] *С. Н. Лакаев.* ТМФ. 1992. Т. 91. № 1. С. 51.

Поступила в редакцию 7.VI.1996 г.

J. I. Abdullaev, S. N. Lakaev

**FINITENESS OF DISCRETE SPECTRUM OF THREE
PARTICLE SCHRÖDINGER OPERATOR ON THE LATTICE**

A Hamiltonian system of three identical quantum particles on a lattice interacting via pairwise contact attracting potentials is discussed. Finiteness of three particle bound states of the three dimensional Schrödinger operator is proved under the condition that operators describing two particle subsystems do not have virtual levels. For high dimensions ($\nu \geq 5$) the finiteness of three particle bound states is also proved under the presence of virtual levels.