Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. Н. Ганиходжаев, У. А. Розиков, Описание периодических крайних гиббсовских мер некоторых решеточных моделей на дереве Кэли, *ТМФ*, 1997, том 111, номер 1, 109–117

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf993>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.219.149

26 апреля 2023 г., 04:28:37

Н. Н. Ганиходжаев*, У. А. Розиков*

ОПИСАНИЕ ПЕРИОДИЧЕСКИХ КРАЙНИХ ГИББСОВСКИХ МЕР НЕКОТОРЫХ РЕШЕТОЧНЫХ МОДЕЛЕЙ НА ДЕРЕВЕ КЭЛИ

Доказаны единственность трансляционно-инвариантных гиббсовских мер антиферромагнитной модели Поттса с внешним полем и существование несчетного числа крайних гиббсовских мер для модели Изинга с внешним полем. Описаны классы нормальных делителей конечного индекса группового представления дерева Кэли. Для модели Изинга с нулевым внешним полем построены периодические гиббсовские меры, инвариантные относительно нормальных делителей индекса два; с помощью этих мер доказано существование несчетного числа крайних гиббсовских мер антиферромагнитной модели Изинга.

ВВЕДЕНИЕ

Дерево Кэли T^k (или решетка Бете по другой терминологии, см. [1]) порядка $k \geq 1$ есть бесконечное дерево, т.е. граф без циклов, из каждой вершины которого выходят ровно $k + 1$ ребер.

Отсутствие замкнутых контуров на дереве Кэли позволяет применить теорию марковских случайных полей на деревьях и рекуррентные уравнения этой теории, что дает возможность во многих случаях точно решить ряд решеточных моделей [2–9].

Цель настоящей работы состоит в том, чтобы для моделей на дереве Кэли:

- 1) доказать единственность трансляционно-инвариантных гиббсовских мер антиферромагнитной модели Поттса с внешним полем;
- 2) доказать существование несчетного числа крайних распределений Гиббса модели Изинга с внешним полем;
- 3) дать описание классов нормальных делителей конечного индекса группового представления дерева Кэли, что позволяет рассмотреть задачу описания периодических гиббсовских мер для моделей, определенных на дереве Кэли;
- 4) описать периодические гиббсовские меры модели Изинга;
- 5) описать новый класс крайних гиббсовских мер для антиферромагнитной модели Изинга с нулевым внешним полем.

* Институт математики Академии наук Республики Узбекистан

1. КОНСТРУКЦИЯ И ОПИСАНИЕ ПРЕДЕЛЬНЫХ ГИББСОВСКИХ МЕР НА ДЕРЕВЕ КЭЛИ

Пусть $\mathcal{T}^k = (V, L)$ – решетка Бете порядка $k \geq 1$. Расстояние $d(x, y)$, $x, y \in V$ на $\mathcal{T}^k$ определяется по формуле

$$d(x, y) = \min \{d \mid x = x_0, x_1, \dots, x_{d-1}, x_d = y \in V \text{ такие, что пары} \\ \langle x_0, x_1 \rangle, \dots, \langle x_{d-1}, x_d \rangle \text{ – ближайшие соседи}\}.$$

Последовательность $\pi = \{x = x_0, x_1, \dots, x_{d-1}, x_d = y \in V\}$, реализующая указанный минимум, называется путем из x в y .

Для произвольной точки $x^0 \in V$ положим

$$W_n = \{x \in V \mid d(x, x^0) = n\}, \\ V_n = \bigcup_{m=0}^n W_m = \{x \in V \mid d(x, x^0) \leq n\}, \\ L_n = \{l = \langle x, y \rangle \in L : x, y \in V_n\}.$$

Говорят, что $x < y$, если путь из x^0 в y проходит через x . При этом вершина y называется “прямым потомком” вершины x , если $y > x$ и x, y являются ближайшими соседями. Если $S(x)$ – совокупность “прямых потомков” вершины x , то для любой вершины $x \in V$, отличной от x^0 , имеем $|S(x)| = k$ и $|S(x^0)| = k + 1$ [6].

Гамильтониан модели Изинга с внешним полем на дереве Кэли имеет вид

$$H_{V_n}(\sigma) = -\mathcal{J} \sum_{\langle x, y \rangle \in L_n} \sigma(x)\sigma(y) - \alpha \sum_{x \in V_n} \sigma(x), \quad (1.1)$$

где $\alpha, \mathcal{J} \in R$, $\sigma(x) \in \{-1, 1\}$, $x \in V$.

Пусть $A \subset V$ – конечное подмножество. Обозначим через $\Omega_A = \{-1, 1\}^A$ пространство конфигураций, определенных на множестве A . Пусть $h_x \in R$ – вещественнозначная функция $x \in V$. Рассмотрим для каждого n меру μ_n на Ω_{V_n} , определенную формулой

$$\mu_n(\sigma_n) = Z_n^{-1} \exp \left\{ T^{-1} H_{V_n}(\sigma) + \sum_{x \in V_n} h_x \sigma(x) \right\}, \quad (1.2)$$

где $T > 0$, $\sigma_n = \{\sigma(x) : x \in V_n\} \in \Omega_{V_n}$ и Z_n – нормирующий множитель. Условия согласования для $\mu_n(\sigma_n)$, $n \geq 1$, определяются равенством

$$\sum_{\sigma^{(n)}} \mu_n(\sigma_{n-1}, \sigma^{(n)}) = \mu_{n-1}(\sigma_{n-1}), \quad (1.3)$$

где $\sigma^{(n)} = \{\sigma(x) : x \in W_n\}$. В этом случае существует распределение Гиббса μ на Ω_V . Оно является марковским и называется цепью Маркова со взаимодействиями $\mathcal{J}$ и α .

ТЕОРЕМА 1.1 [7,8]. *Меры (1.2) удовлетворяют условию согласования (1.3) тогда и только тогда, когда для $\forall x \in V$*

$$h_x = \alpha/T + \sum_{y \in S(x)} \operatorname{arcth}(\theta \operatorname{th} h_y), \quad (1.4)$$

где $\theta = \operatorname{th}(\mathcal{J}/T)$.

В модели Поттса с внешним полем на дереве Кэли спиновые переменные $\sigma(x)$, $x \in V$, принимают значения $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_q$ и гамильтониан имеет вид

$$\tilde{H}_{V_n}(\sigma) = -\mathcal{J} \sum_{\langle x, y \rangle \in L_n} \delta_{\sigma(x)\sigma(y)} - \alpha \sum_{x \in V_n} \delta_{\sigma(x)\sigma_1}, \quad (1.5)$$

где σ – символ Кронекера. Антиферромагнитная модель Поттса определяется гамильтонианом (1.5) при $\mathcal{J} < 0$.

Предположим, что $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_q \in R^{q-1}$ такие, что

$$\sigma_i \sigma_j = \begin{cases} 1, & \text{если } i = j, \\ -1/q - 1, & \text{если } i \neq j. \end{cases} \quad (1.6)$$

Тогда для любых $x, y \in V$ находим

$$\frac{q-1}{q} \left(\sigma(x)\sigma(y) + \frac{1}{q-1} \right) = \delta_{\sigma(x)\sigma(y)},$$

откуда $\tilde{H}_{V_n}(\sigma)$ имеет вид

$$\tilde{H}_{V_n}(\sigma) = -\mathcal{J} \sum_{\langle x, y \rangle \in L_n} \sigma(x)\sigma(y) - \alpha \sum_{x \in V_n} \sigma(x)\sigma_1. \quad (1.7)$$

Пусть $A \subset V$ – конечное подмножество. Обозначим через $\Omega_A = \{\sigma_1, \dots, \sigma_q\}^A$ пространство конфигураций на множестве A . Конечномерное распределение меры μ (μ – распределение Гиббса) в объеме V_n определяется формулой

$$\mu_n(\sigma_n) = \tilde{Z}_n^{-1} \exp \left\{ T^{-1} \tilde{H}_{V_n}(\sigma) + \sum_{x \in W_n} \tilde{h}_x \sigma(x) \right\}, \quad (1.8)$$

где $\tilde{Z}_n$ – нормирующий множитель, а $\tilde{h}_x \in R^{q-1}$.

ТЕОРЕМА 1.2 [3,4]. *Меры (1.8) удовлетворяют (1.3) тогда и только тогда, когда для $\forall x \in V$*

$$\tilde{h}_x = \sum_{y \in S(x)} F(\tilde{h}_y, \theta_1, \alpha), \quad (1.9)$$

здесь F – преобразование, переводящее R^{q-1} в себя по следующей формуле:

$$h'_i = \frac{\alpha}{T} \delta_{1i} + \ln \left[\frac{(\theta_1 - 1) \exp h_i + \sum_{j=1}^{q-1} \exp h_j + 1}{\sum_{j=1}^{q-1} \exp h_j + \theta_1} \right], \quad i = \overline{1, q-1},$$

где $\theta_1 = \exp(\mathcal{J}/T)$, а $h = (h_1, h_2, \dots, h_{q-1}) \in R^{q-1}$. Каждой совокупности векторов $\{h_x, x \in V\}$, удовлетворяющих (1.9), соответствует единственная гиббсовская мера μ на Ω_V .

2. ТРАНСЛЯЦИОННО-ИНВАРИАНТНЫЕ ГИББСОВСКИЕ МЕРЫ АНТИФЕРРОМАГНИТНОЙ МОДЕЛИ ПОТТСА С ВНЕШНИМ ПОЛЕМ

В этом разделе мы приводим конструкцию гиббсовских мер, инвариантных относительно всех пространственных сдвигов решетки $\mathcal{T}^k$. В [3, 4] для ферромагнитной модели Поттса с нулевым полем доказано существование q трансляционно-инвариантных и несчетное число не трансляционно-инвариантных гиббсовских мер и также дано их конструктивное описание.

Предположим, что $\tilde{h}_x = h = (h_1, h_2, \dots, h_{q-1})$ для $\forall x \in V$. Тогда из теоремы 1.2 с помощью замены $z_i = \exp h_i$ получим

$$z_i = \exp\left(\frac{\alpha}{T}\delta_{1i}\right) \left[\frac{(\theta_1 - 1)z_i + \sum_{j=1}^{q-1} z_j + 1}{\sum_{j=1}^{q-1} z_j + \theta_1} \right]^k, \quad i = \overline{1, q-1}. \quad (2.1)$$

Заметим, что при $0 < \theta_1 < 1$ ($\mathcal{J} < 0$) система (2.1) имеет единственное решение $z^* = (z_*, 1, 1, \dots, 1)$. Обозначим через μ_* гиббсовскую меру, соответствующую совокупности векторов $\{h_x = (\ln z_*, 0, 0, \dots, 0) \quad \forall x \in V\}$.

Таким образом, мы доказали следующую теорему.

ТЕОРЕМА 2.2. *При $q > 1$, $k \geq 1$, $\mathcal{J} < 0$, $\alpha \in R$ в модели Поттса трансляционно-инвариантная гиббсовская мера единственна и эта мера есть μ_* .*

3. КРАЙНИЕ ГИББСОВСКИЕ МЕРЫ МОДЕЛИ ИЗИНГА С ВНЕШНИМ ПОЛЕМ

Для того чтобы мера была трансляционно-инвариантной для модели (1.1), необходимо выполнение условия $h_x = h \in R \quad \forall x \in V$. Тогда из (1.4) получим

$$h = \frac{\alpha}{T} + k \operatorname{arcth}(\theta \operatorname{th} h). \quad (3.1)$$

Из свойств функции $\frac{\alpha}{T} + k \operatorname{arcth}(\theta \operatorname{th} h)$ следует, что при $\alpha \in (-(k-1)\mathcal{J}, (k-1)\mathcal{J})$, $\mathcal{J} > 0$, уравнение (3.1) имеет два устойчивых решения $h_*^{(1)} < h_*^{(2)}$ и одно неустойчивое решение $h_*^{(3)}$, лежащее между $h_*^{(1)}$ и $h_*^{(2)}$.

Рассмотрим совокупности величин $\{h_x = h_*^{(1)} \quad \forall x \in V\}$ и $\{h_x = h_*^{(2)} \quad \forall x \in V\}$ и обозначим через $\mu^{(1)}$ и $\mu^{(2)}$ соответствующие им распределения Гиббса.

ТЕОРЕМА 3.1 [5,9]. *Меры $\mu^{(1)}$ и $\mu^{(2)}$ являются крайними распределениями Гиббса.*

Произвольному пути π , конечному или бесконечному, стандартным образом можно сопоставить число $t \in [0, 1]$ (см. [2–4]). Нетрудно показать, что для любого $t \in [0, 1]$ однозначно определяется совокупность величин $h^{\pi(t)} = \left\{ h_x^{\pi(t)} = h_x^{\pi(t)}(h_*^{(1)}, h_*^{(2)}), \right.$
 $x \in V \left. \right\}$, которая удовлетворяет (1.4).

Обозначим через μ^t гиббсовскую меру, соответствующую $h^{\pi(t)}$.

ТЕОРЕМА 3.2. Для любого $t \in [0, 1]$ гиббсовская мера μ^t является крайней.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО аналогично доказательству теоремы 3.2 работы [2].

4. ГРУППОВОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ И АВТОМОРФИЗМЫ ДЕРЕВА КЭЛИ

Пусть G_{k+1} – свободное произведение $k + 1$ циклических групп второго порядка с образующими $a_1, a_2, \dots, a_{k+1}$, соответственно.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.1 [10]. Существует взаимно однозначное соответствие между множеством вершин V дерева Кэли порядка k и группой G_{k+1} .

Рассмотрим на группе G_{k+1} преобразования левого (правого) сдвигов, определяемых следующим образом. Для $g_0 \in G_{k+1}$ положим

$$T_{g_0}(h) = g_0 h \quad (T_{g_0}(h) = hg_0) \quad \forall h \in G_{k+1}. \quad (4.1)$$

Совокупность всех левых (правых) сдвигов на G_{k+1} изоморфна группе G_{k+1} .

В соответствии с предложением 4.1 любое преобразование S группы G_{k+1} индуцирует преобразование $\hat{S}$ на множестве вершин V дерева Кэли. Очевидна следующая теорема.

ТЕОРЕМА 4.1. Группа левых (правых) сдвигов на правом (левом) представлении дерева Кэли является группой трансляций дерева Кэли.

5. НОРМАЛЬНЫЕ ДЕЛИТЕЛИ КОНЕЧНОГО ИНДЕКСА ГРУППОВОГО ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ДЕРЕВА КЭЛИ

Любой элемент $x \in G_{k+1}$ имеет следующий вид:

$$x = a_{i_1} a_{i_2} \dots a_{i_n}, \quad \text{где } 1 \leq i_m \leq k+1, \quad m = \overline{1, n}.$$

Число n называется длиной слова x и обозначается через $l(x)$. Число букв a_i , $i = \overline{1, k+1}$, участвующих в несократимой записи слова x , обозначим через $\omega_x(a_i)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.1 (см. [11, 12]). Если φ – гомоморфизм группы G_{k+1} с ядром H , то H является нормальным делителем группы G_{k+1} и $\varphi(G_{k+1}) \simeq G_{k+1} : H$ ($G_{k+1} : H$ – фактор-группа), т.е. индекс $|G_{k+1} : H|$ совпадает с порядком $|\varphi(G_{k+1})|$ группы $\varphi(G_{k+1})$.

Вследствие предложения 5.1 для построения нормального делителя конечного индекса группы G_{k+1} необходимо построить гомоморфизм группы G_{k+1} в некоторую конечную группу.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5.1. Пусть $M_1, M_2, \dots, M_m$ — некоторые множества и $M_i \neq M_j$ при $i \neq j$ ($i, j = \overline{1, m}$). Пересечение $\bigcap_{i=1}^m M_i$ назовем сократимым, если существует i_0 ($1 \leq i_0 \leq m$) такое, что

$$\bigcap_{i=1}^m M_i = \left(\bigcap_{i=1}^{i_0-1} M_i \right) \cap \left(\bigcap_{i=i_0+1}^m M_i \right).$$

Пусть $N_k = \{1, 2, \dots, k+1\}$.

ТЕОРЕМА 5.1. Для любого $\emptyset \neq A \subseteq N_k$ существует подгруппа $H_A \subset G_{k+1}$ со следующими свойствами:

- а) H_A — нормальный делитель и $|G_{k+1} : H_A| = 2$;
- б) $H_A \neq H_B$ для $\forall A \neq B \subseteq N_k$;
- в) $|H_A \cap H_B| = \infty$ и $H_A \cap H_B \subset H_{A \triangle B}$, $A, B \subseteq N_k$;
- г) если $A_1, A_2, \dots, A_m \subseteq N_k$ и $A_i \cap A_j = \emptyset$ для любых $i \neq j = \overline{1, m}$, то

$$\bigcap_{i=1}^m H_{A_i} \subset H_{\bigcup_{i=1}^m A_i};$$

д) пусть $A_1, A_2, \dots, A_m \subseteq N_k$. Если $\bigcap_{i=1}^m H_{A_i}$ — несократимое пересечение, то оно является нормальным делителем индекса 2^m ;

е) для любого $m = 1, 2k$ (где k — порядок решетки) существуют несократимые пересечения

$$H_m = \bigcap_{i=1}^m H_{A_i}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\emptyset \neq A \subseteq N_k$. Определим отображение

$$f_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } \sum_{i \in A} \omega_x(a_i) \text{ чётно,} \\ -1, & \text{если } \sum_{i \in A} \omega_x(a_i) \text{ нечётно.} \end{cases}$$

Легко заметить, что f_A является гомоморфизмом, т.е. для любых $x, y \in G_{k+1}$ справедливо равенство $f_A(xy) = f_A(x)f_A(y)$. В силу предложения 5.1 $H_A = \{x \in G_{k+1} : \sum_{i \in A} \omega_x(a_i) \text{ чётно}\}$ является нормальным делителем индекса 2. Нетрудно убедиться, что H_A удовлетворяет всем свойствам теоремы 5.1. Теорема доказана.

Пусть $x = a_{i_1} a_{i_2} \dots a_{i_m}$, где $1 \leq i_m \leq k+1$, $m = \overline{1, n}$. Для $x \in \{y \in G_{k+1} : l(y) = n\}$ положим $\nu_x(a_j) = \{m \in N_{n-1} : i_m = j\}$. Например, если $x = a_1 a_4 a_8 a_4 a_1 a_2 a_4$, то $\nu_x(a_4) = \{2, 4, 7\}$. Обозначим через $\alpha(x)$ число образующих элемента x .

ТЕОРЕМА 5.2. Пусть $e \neq x_0 \in G_{k+1}$. Тогда существует нормальный делитель H_{x_0} конечного индекса, не содержащий элемента x_0 , такой, что

$$\alpha(x_0) + 1 \leq |G_{k+1} : H_{x_0}| \leq (l(x_0) + 1)!.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\alpha(x_0) = m$. Обозначим через $a'_1, a'_2, \dots, a'_m$, $1 \leq m \leq k+1$, образующие a_i , $i = \overline{1, k+1}$, в несократимой записи элемента x . Тогда x_0 имеет вид

$$x_0 = a'_{i_1} a'_{i_2} \dots a'_{i_s}, \quad \text{где } 1 \leq i_s \leq k+1, \quad s = \overline{1, n}.$$

В симметрической группе S_{n+1} , переставляющей символы $1, 2, \dots, n+1$, выберем подстановки π_i , $i = \overline{1, m}$, следующим образом: если $\nu_{x_0}(a_j) = \{j_1, j_2, \dots, j_{m_1}\}$, где $j_{k_1} \in N_{n-1}$ и $k_1 = \overline{1, m_1}$, то

$$\pi_j = \begin{pmatrix} 1 \dots j_1 & j_1 + 1 \dots j_2 & j_2 + 1 \dots j_{m_1} & j_{m_1} + 1 \dots n + 1 \\ 1 \dots j_1 + 1 & j_1 \dots j_2 + 1 & j_2 \dots j_{m_1} + 1 & j_{m_1} \dots n + 1 \end{pmatrix}, \quad j = \overline{1, m}.$$

Легко видеть, что $\pi_j^2 = \pi_0$, $j = \overline{1, m}$, где π_0 — тождественная перестановка. Определим отображения $u: \{a_1, \dots, a_{k+1}\} \rightarrow \{\pi_1, \dots, \pi_m\}$ и $f_{x_0}: G_{k+1} \rightarrow S_{n+1}$ следующим образом:

$$u(x) = \begin{cases} \pi_0, & \text{если } x \neq a'_j, \\ \pi_j, & \text{если } x = a'_j, \end{cases} \quad j = \overline{1, m},$$

$$f_{x_0}(x) = f_{x_0}(a_{i_1} a_{i_2} \dots a_{i_s}) = u(a_{i_1}) u(a_{i_2}) \dots u(a_{i_s}).$$

Поскольку $\pi_j^2 = \pi_0$, легко видеть, что f_{x_0} является гомоморфизмом. Ядро этого гомоморфизма H_{x_0} — нормальный делитель конечного индекса. Очевидно, что элемент x лежит вне этого нормального делителя. Далее в силу предложения 5.1 $|G_{k+1} : H_{x_0}| = |f_{x_0}(G_{k+1})|$ и из построения f_{x_0} видно, что

$$\alpha(x_0) + 1 \leq |G_{k+1} : H_{x_0}| \leq (l(x_0) + 1)!.$$

Теорема доказана.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.3. *Имеют место следующие равенства: 1) $H_{a_i} = H_{(i)}$, $i = 1, k+1$; 2) если $\alpha(x) \geq 2$, то $|G_{k+1} : H_x| > 3$; 3) $|G_{k+1} : H_{a_i a_j}| = 6$ для $\forall i \neq j \in N_k$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО следует из теорем 5.1 и 5.2.

6. ПЕРИОДИЧЕСКИЕ ГИББСОВСКИЕ МЕРЫ МОДЕЛИ ИЗИНГА НА ДЕРЕВЕ КЭЛИ

Обычным образом вводятся понятия периодических гиббсовских мер, гамильтониана, конфигурации и т.д. (см. [13, 14]). Рассмотрим модель Изинга с нулевым полем, т.е. $\alpha = 0$. Пусть $G_{k+1}/\hat{G}_* = \{\hat{G}_*, \hat{G}_{*1}\}$ — фактор-группа, где

$$\tilde{G}_* = H_{N_k} = \{x \in G_{k+1} : l(x) \text{ чётно}\}$$

(см. раздел 5). Построим $\widehat{G}_*$ -периодические распределения Гиббса. Для того чтобы получить периодические меры, положим в (1.4)

$$h_x = \begin{cases} h_1, & \text{если } x \in \widehat{G}_*, \\ h_2, & \text{если } x \in \widehat{G}_{*1}. \end{cases}$$

Тогда получим

$$\begin{cases} h_1 = kf(h_2, \theta), \\ h_2 = kf(h_1, \theta), \end{cases} \quad (6.1)$$

где $\theta = \text{th}(\mathcal{J}/T)$, $-1 < \theta < 1$, $f(x, \theta) = \text{arcth}(\theta \text{th } x)$.

Легко заметить, что система уравнений имеет единственное решение $h_* = (0, 0)$, если $-k^{-1} \leq \theta \leq k^{-1}$, и три решения $h_*^{(1)} = (-h_*, -h_*)$, $h_*^{(2)} = (0, 0)$ и $h_*^{(3)} = (h_*, h_*)$ ($h_* > 0$), если $k^{-1} \leq \theta \leq 1$, и три решения $h_*^\mp = (h_*, -h_*)$, $h_*^0 = (0, 0)$, $h_*^\pm = (-h_*, h_*)$, если $-1 < \theta < -k^{-1}$.

ТЕОРЕМА 6.1. Для ферромагнитной ($\mathcal{J} > 0$) (антиферромагнитной ($\mathcal{J} < 0$)) модели Изинга существуют три (два) крайних периодических распределения Гиббса $\hat{\mu}^{(1)}$, $\hat{\mu}^{(2)}$, $\hat{\mu}_*$ ($\hat{\mu}^\mp$, $\hat{\mu}^\pm$).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО аналогично доказательству теоремы 3.2 работы [4].

Используя меры $\hat{\mu}^\mp$, $\hat{\mu}^\pm$, построим несчетное число крайних распределений Гиббса. Можно доказать (ср. [2–4]), что при $-1 < \theta < -k^{-1}$ совокупности величин

$$h^{\pi(t)} = \left\{ h_x^{\pi(t)} = \begin{cases} \begin{cases} -h_*, & \text{если } x \prec x_n, \quad x, x_n \in W_{n=2l}, \\ h_*, & \text{если } x \prec x_n, \quad x, x_n \in W_{n=2l+1}, \end{cases} \\ \begin{cases} h_*, & \text{если } x_n \prec x, \quad x, x_n \in W_{n=2l}, \\ -h_*, & \text{если } x_n \prec x, \quad x, x_n \in W_{n=2l+1}, \end{cases} \\ h_0 \in [-h_*, h_*], & \text{если } x = x_n, \end{cases} \right\},$$

где $n = 0, 1, 2, \dots$ (см. рисунок), удовлетворяют (1.4). Эти совокупности величин различны при разных $t \in [0, 1]$.

Обозначим через μ^t распределение Гиббса, соответствующее совокупности $h^{\pi(t)}$. Справедлива следующая теорема.

ТЕОРЕМА 6.2. *Для любого $t \in [0, 1]$ распределение Гиббса μ^t является крайним.*

Список литературы

- [1] Р. Бэкстер. Точно решаемые модели в статистической механике. М.: Мир, 1985.
- [2] П. М. Блехер, Н. Н. Ганиходжаев. Теория вероятн. и ее примен. 1990. Т. 35. Вып. 2. С. 920–930.
- [3] Н. Н. Ганиходжаев. ДАН РУз. 1992. № 6–7. С. 4–7.
- [4] Н. Н. Ганиходжаев. ТМФ. 1990. Т. 85. № 2. С. 163–175.
- [5] К. Престон. Гиббсовские состояния на счетных множествах. М.: Мир, 1977.
- [6] Р. М. Bleher. Commun. Math. Phys. 1990. V. 128. P. 411–419.
- [7] Н. О. Georgii. Gibbs measures and phase transitions (De Gru. studies in math.). Berlin, New York: de Gru., 1988.
- [8] F. Spitzer. Ann. Prob. 1975. V. 3. P. 387–398.
- [9] Y. Higuchi. Publ. RIMS Kyoto Univ. 1977. V. 3. P. 335–348.
- [10] Н. Н. Ганиходжаев. ДАН РУз. 1994. № 5. С. 3–6.
- [11] А. Г. Курош. Теория групп. М.: Наука, 1967.
- [12] М. И. Каргаполов, Ю. И. Мерзляков. Основы теории групп. М.: Наука, 1982.
- [13] С. А. Пирогов, Я. Г. Синай. ТМФ. 1975. Т. 25. № 3. С. 358–369; 1976. Т. 26. № 1. С. 61–76.
- [14] Я. Г. Синай. Теория фазовых переходов. М.: Наука, 1980.

Поступила в редакцию 16.IV.1996 г.

N. N. Ganikhodzhaev, U. A. Rozikov

DESCRIPTION OF PERIODIC EXTREME GIBBS MEASURES OF SOME LATTICE MODELS ON THE CAYLEY TREE

It is proved that the translational invariant extreme Gibbs measure is unique for the antiferromagnetic Potts model with the external field. The existence of uncountable numbers of the extreme Gibbs measures for the Ising model with the external field on the Cayley tree is proved. The classes of normal subgroups of finite index of group representation of the Cayley tree is constructed. The periodic extreme Gibbs measures invariant with respect to subgroups of index two for the Ising model are constructed and the existence of uncountable numbers of the nonperiodic extreme Gibbs measures for the antiferromagnetic Ising model is proved.