Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Л. А. Пальцев, Об эффекте термомагнитной разности давлений и эффекте Скотта, *ТМФ*, 1997, том 111, номер 1, 118–131

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf994>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.172.240.79

26 апреля 2023 г., 15:06:39

Л. А. Пальцев*

ОБ ЭФФЕКТЕ ТЕРМОМАГНИТНОЙ РАЗНОСТИ ДАВЛЕНИЙ И ЭФФЕКТЕ СКОТТА

Рассмотрены эффект терромагнитной разности давлений и эффект Скотта с учетом нелинейных температурных напряжений. Для газа линейных диамагнитных молекул определена зависимость коэффициента сдвиговых нелинейных температурных напряжений от частоты магнитного поля. Получены коэффициенты сдвиговых и объемных температурных напряжений в многоатомном газе в отсутствие магнитного поля.

В работе [1] получены уравнения переноса, которые можно использовать для описания медленных течений многоатомного газа во внешнем переменном во времени магнитном поле, в частности течений, реализуемых в эффекте терромагнитной разности давлений и эффекте Скотта при малом числе Кнудсена. Для объяснения этих эффектов рассматриваются стационарные течения многоатомного газа в плоском канале с нулевым массовым расходом и между двумя коаксиальными цилиндрами во внешнем магнитном поле, перпендикулярном плоскости течения при отличном от нуля перепаде температур между стенками канала и коаксиальных цилиндров. Такие течения исследованы как теоретически, так и экспериментально только при малом относительном перепаде температур, когда поля скоростей и терромагнитная разность давлений определяются только вязкими напряжениями, а моменты сил, действующие на цилиндры, обусловлены только вязкими и линейными температурными напряжениями [2–7].

В данной работе эти течения рассматриваются при большом относительном перепаде температур во внешнем переменном во времени магнитном поле. Получены поля скоростей, терромагнитная разность давлений и моменты сил, действующие на цилиндры, с учетом нелинейных температурных напряжений. В случае газов, состоящих из молекул с малой несферичностью межмолекулярного взаимодействия, рассмотренные течения являются примерами течений Стокса (число Рейнольдса $Re \ll 1$), в которых, однако, поля скоростей определяются не только вязкими, но и нелинейными температурными напряжениями. Для газа линейных диамагнитных молекул с малой несферичностью межмолекулярного взаимодействия определена зависимость коэффициентов сдвиговых линейных и нелинейных температурных напряжений от напряженности и частоты магнитного поля. Получены коэффициенты сдвиговых и объемных температурных напряжений для многоатомного газа соответственно в одномоментном и двухмоментном приближениях в отсутствие магнитного поля.

* Центральный аэрогидродинамический институт им. Н. Е. Жуковского

1. Рассмотрим двумерное стационарное течение многоатомного газа при $u^* \simeq \mu$ [1] с нулевым массовым расходом в плоском канале $(-\infty < x < \infty, -l/2 \leq y \leq l/2, -\infty < z < \infty)$ во внешнем магнитном поле $\mathbf{B} = \mathbf{e}(B_0 + B_1 \cos \omega t)$, где $\mathbf{e}$ – единичный вектор вдоль оси z , перпендикулярной плоскости течения. Пусть T_{wj} – температуры нижней ($j = 1$) и верхней ($j = 2$) стенок канала и $\Delta T_w = T_{w1} - T_{w2} > 0$. В этом случае из (1,2.1)¹, (1,2.10) и (1,2.16) следует, что локальные макроскопические переменные зависят только от координаты y . Отлична от нуля только составляющая локальной скорости $u = u(y)$ вдоль оси x , $p = nT$ и $p^{(1)} = n^{(1)} + T^{(1)}$ являются постоянными. Для локальной температуры $T = T(y)$ и локальной скорости u получаем уравнения

$$\begin{aligned} \nabla_2(\lambda(\omega)\nabla_2 T) &= 0, \\ \nabla_j p^{(2)} &= \frac{1}{p} \nabla_2 \left[\eta^{j2}(\omega) \nabla_2 u - \frac{2}{T} \Delta^{j2}(\omega) (\nabla_2 T)^2 \right], \quad j = 1, 2, \end{aligned} \quad (1.1)$$

где $(r^1, r^2) = (x, y)$, $\lambda(\omega) = \lambda^{22}(\omega)$,

$$\begin{aligned} \eta^{j2}(\omega) &= \eta^{j221}(\omega) + \eta^{j212}(\omega), \\ \Delta^{j2}(\omega) &= \Delta_2^{j222}(\omega) - T \frac{d \ln \lambda(\omega)}{dT} \Delta_1^{j222}(\omega). \end{aligned}$$

Систему уравнений (1.1) будем решать при следующих граничных условиях: $T(y_j) = T_{wj}$, $u(y_j) = v_j(\omega)$, где $y_j = (-1)^j l/2$ и $v_j(\omega)$ – скорость температурного скольжения на j -й поверхности.

Как известно (см., например, [8]), скорость температурного скольжения можно найти, решая кинетическое уравнение (1,1.1) в кнудсеновском слое при известном в объеме газа операторе Вигнера (1,2.4). Эта задача чрезвычайно сложна даже для одноатомного газа и в данной работе не рассматривается. Отметим, что $v_j(\omega)$ получена только для простейших моделей взаимодействия молекул с поверхностью и только в постоянном магнитном поле. Так, в работе [9] из стационарного уравнения Вальдмана–Снайдера получены скорость температурного скольжения при диффузном отражении молекул от поверхности, которая достаточно хорошо согласуется с экспериментальными данными для газа линейных диамагнитных молекул [6]. В работах [5, 10] при определении скорости скольжения учитывались вектор Кагана и поляризация молекул при отражении от поверхности.

Учитывая (1,2.4), будем по аналогии со случаем постоянного магнитного поля считать, что

$$v_j(\omega) = V_j(\omega) \left(\frac{dT}{dy} \right)_{y=y_j}, \quad (1.2)$$

где функцию $V_j(\omega) = V_{xy}(T_{wj}, p, \omega, B_0, B_1)$ для оценки зависимости от частоты магнитного поля термомагнитной разности давлений можно получить, например, из формулы

¹ Ссылки на формулы из работы [1] будем обозначать следующим образом: (1,1.1) и т.д.

Вальдмана [7] или из формулы работы [9], заменяя в них кинетические коэффициенты соответственно кинетическими коэффициентами, зависящими от частоты магнитного поля.

При условии нулевого массового расхода

$$\int_{-l/2}^{l/2} \frac{u dy}{T} = 0$$

из (1.1) с учетом (1.2) находим

$$\begin{aligned} u(y) &= U(y) + k_{12}(y)p \frac{dp^{(2)}}{dx}, \\ \frac{dp^{(2)}}{dx} &= - \int_{-l/2}^{l/2} \frac{U(y) dy}{pT} \bigg/ \int_{-l/2}^{l/2} \frac{k_{12}(y) dy}{T}, \end{aligned} \quad (1.3)$$

здесь

$$\begin{aligned} U(y) &= v_1 + Z(y) + \frac{k_2(y)}{k_2} \left(v_2 - v_1 - Z\left(\frac{l}{2}\right) \right), \\ Z(y) &= 2Q^2(\omega) \int_{-l/2}^y \frac{\Delta^{12}(\omega) dy}{T\eta^{12}(\omega)\lambda^2(\omega)}, \\ k_j(y) &= \int_{-l/2}^y \frac{y^{2-j} dy}{\eta^{12}(\omega)}, \\ k_{12}(y) &= k_1(y) - \frac{k_1}{k_2} k_2(y), \quad k_j = k_j(l/2), \\ Q(\omega) &= \frac{1}{l} \int_{T_{w1}}^{T_{w2}} \lambda(\omega) dT, \quad v_j = V_j(\omega) \frac{Q(\omega)}{\lambda(\omega, T_{wj})}. \end{aligned}$$

В линейном приближении по малому относительному перепаду температур $\Delta T_w/T_{w1}$ находим, что $v_1 = v_2$, $Z(y) = 0$ и $k_1 = 0$. Тогда из (1.3) получаем

$$\begin{aligned} u(y) &= -6V_1(\omega) \frac{\Delta T_w}{l} \left[\left(\frac{y}{l} \right)^2 - \frac{1}{12} \right], \\ \frac{dp^{(2)}}{dx} &= -12\eta^{12}(\omega)V_1(\omega) \frac{\Delta T_w}{pl^3}. \end{aligned} \quad (1.4)$$

В случае многоатомного газа во внешнем постоянном магнитном поле при малой несферичности межмолекулярного взаимодействия из (1.4) получаем известные результаты теории эффекта термомагнитной разности давлений [5, 6]. Заметим, что линейный эффект термомагнитной разности давлений во внешнем переменном во времени магнитном поле можно использовать при экспериментальном определении зависимости скорости температурного скольжения от частоты магнитного поля.

Полученные выше скорость и градиент давления, необходимый для реализации течения с нулевым массовым расходом, дают только частичную информацию о поле течения. В частности, остались неизвестными поправки к плотности числа молекул $n^{(s)}$ и к температуре $T^{(s)}$ при $s = 1, 2$, для определения которых необходимо решить уравнения, получаемые в высших приближениях по параметру пространственной неоднородности. Как отмечалось в [1], такая неполнота описания неравновесных состояний многоатомного газа при медленных течениях, когда $u^* \simeq \mu$, обусловлена использованием в некотором смысле представлений сплошной среды, а именно коэффициентов разложения в ряд по μ только первых пяти моментов оператора Вигнера.

Заметим, что (1.3) можно также получить, решая уравнения из приложения к работе [1] в стационарном случае при следующих граничных условиях: $T^{(0)}(y_j) = T_{wj}$, $u^{(s)}(y_j) = (1 - \delta_{s0})v_j(\omega)$; нормальная составляющая скорости на поверхностях канала равна нулю, где $s = 0, 1$ и скорость скольжения (см. (1,П.3) и [8])

$$v_j(\omega) = \left(U_j(\omega) \frac{du^{(0)}}{dy} + V_j(\omega) \frac{dT^{(0)}}{dy} \right)_{y=y_j}. \quad (1.5)$$

Действительно, из (1,П.1) при условии нулевого массового расхода находим, что $u^{(0)}(y)$ и нормальная составляющая скорости равны нулю, давление $p = nT$ является постоянным. Из (1,П.4) уравнений в приближении Барнетта и (1.5) получаем уравнение теплопроводности и уравнения переноса импульса (1.1), условие для поправки к давлению $\nabla_j p^{(1)} = 0$ и граничные условия (1.2). Аналогичным образом можно объяснить эффекты, возникающие при медленных неизотермических стационарных течениях одноатомного газа (см. обзор [9] в библиографии к работе [1]), используя уравнения из приложения к работе [1] для одноатомного газа в отсутствие магнитного поля.

2. Рассмотрим реализуемое в эффекте Скотта [3, 4] стационарное течение многоатомного газа между двумя коаксиальными цилиндрами в магнитном поле $\mathbf{B} = \mathbf{e}(B_0 + B_1 \cos \omega t)$, где $\mathbf{e}$ – единичный вектор в направлении оси цилиндров (ось z). Пусть R_j и T_{wj} – радиусы и температуры внутреннего ($j = 1$) и внешнего ($j = 2$) цилиндров и $\Delta T_w = T_{w1} - T_{w2} > 0$. В цилиндрической системе координат $(r^1, r^2, r^3) = (r, \theta, z)$, как следует из (1,2.10) и (1,2.18), локальные макроскопические переменные являются функциями только радиальной координаты, $p = nT$ и $p^{(1)} = n^{(1)} + T^{(1)}$ – постоянные, а для температуры $T = T(r)$ и азимутальной составляющей скорости $u = u_\theta(r)$ получаем уравнения

$$\begin{aligned} \frac{d}{dr} \left(r \lambda(\omega) \frac{dT}{dr} \right) &= 0, \\ \left(\frac{d}{dr} + \frac{2}{r} \right) P^{12}(r, \omega) &= 0, \end{aligned} \quad (2.1)$$

где (r, θ) – составляющая тензора вязких и температурных напряжений вне кнудсеновского слоя,

$$\begin{aligned} P^{12}(r, \omega) &= -\eta(\omega) r \frac{d}{dr} \left(\frac{u}{r} \right) + 2\Delta_1^{(-)}(\omega) \frac{1}{r} \frac{dT}{dr} - \\ &- \left[\Delta_2^{(-)}(\omega) - \Delta_1^{(-)}(\omega) T \frac{d \ln \lambda(\omega)}{dT} \right] \frac{1}{T} \left(\frac{dT}{dr} \right)^2. \end{aligned} \quad (2.2)$$

В (2.1) и (2.2) коэффициент теплопроводности $\lambda(\omega) = \lambda^{11}(\omega)$ определен в (1,2.7), коэффициент сдвиговой вязкости $\eta(\omega) = \eta^{1212}(\omega)$ – в (1,2.15), коэффициенты сдвиговых линейных $\Delta_1^{(-)}(\omega)$ и нелинейных $\Delta_2^{(-)}(\omega)$ температурных напряжений определяются формулами

$$\Delta_j^{(-)}(\omega) = \frac{n}{m}(p^1 p^2, A_{j0}^{21}), \quad j = 1, 2,$$

здесь одночастичные операторы $A_{jk}^{21}(1)$ являются решениями уравнений

$$\frac{1}{2}(a_{jk}^{22}(1) - a_{jk}^{11}(1)) = R_B(k; \omega) A_{jk}^{21}, \quad j = 1, 2,$$

где операторы $a_{jk}^{ii}(1)$ определены в обозначениях к (1,2.12). Следует учесть, что в (1,2.7) и (1,2.15), в уравнениях (1,2.5) и (1,2.12) для векторного $A_k^1(1)$ и тензорного второго ранга $B_k^{12}(1)$ операторов, а также в операторах $a_{jk}^{ii}(1)$ компоненты вектора импульса и компоненты векторного и тензорного операторов даны в цилиндрической системе координат.

Систему уравнений (2.1) будем решать при следующих граничных условиях: $T(R_j) = T_{wj}$, $u(R_j) = v_j(\omega)$, где скорость скольжения на поверхности j -го цилиндра составляет

$$v_j(\omega) = V_{\theta j}(\omega) \left(\frac{dT}{dr} \right)_{r=R_j};$$

функцию $V_{\theta j}(\omega)$ находим так же, как и функцию $V_j(\omega)$, в (1.2).

Из (2.1) получаем азимутальную скорость

$$u(r) = r \left\{ \frac{v_1}{R_1} + Z(r) + \frac{k(r)}{k} \left(\frac{v_2}{R_2} - \frac{v_1}{R_1} - Z(R_2) \right) \right\}, \quad R_1 \leq r \leq R_2, \quad (2.3)$$

где $v_j = v_j(\omega)$,

$$Z(r) = Q \int_{R_1}^r \frac{dr}{\eta(\omega)\lambda(\omega)r^3} \left\{ 2\Delta_1^{(-)}(\omega) - \frac{Q}{T\lambda(\omega)} \left[\Delta_2^{(-)}(\omega) - \Delta_1^{(-)}(\omega) T \frac{d \ln \lambda(\omega)}{dT} \right] \right\},$$

$$k(r) = \int_{R_1}^r \frac{dr}{\eta(\omega)r^3}, \quad k = k(R_2),$$

$$Q = \frac{1}{\ln(R_2/R_1)} \int_{T_{w1}}^{T_{w2}} \lambda(\omega) dT.$$

Момент сил, действующих на единицу длины j -го цилиндра, есть

$$M_j = -2\pi R_j^2 P_j, \quad (2.4)$$

где P_j – значение (r, θ) -й составляющей тензора напряжений $P(r)$ на поверхности j -го цилиндра.

Из кинетического уравнения (1,1.1) следует, что в рассматриваемом случае $P(r)$ как внутри, так и вне кнудсеновского слоя удовлетворяет уравнению, аналогичному уравнению для $P^{12}(r, \omega)$ в (2.1). Решая это уравнение в кнудсеновском слое, находим, что P_j в нулевом и первом приближениях по μ равны нулю, а во втором приближении равны $P^{12}(R_j, \omega)$ (см. (2.2)). Тогда для момента сил (2.4), действующего, например, на горячий цилиндр, получаем следующее выражение:

$$M_1 = \frac{2\pi}{k} \left(\frac{v_2}{R_2} - \frac{v_1}{R_1} - Z(R_2) \right). \quad (2.5)$$

В линейном приближении по малому относительному перепаду температур $\Delta T_w / T_{w1}$ из (2.3) и (2.5) находим

$$M_1 = \frac{4\pi \Delta T_w}{\ln(R_2/R_1)} [\Delta_1^{(-)}(\omega) + \eta(\omega) V_{\theta 1}(\omega)]. \quad (2.6)$$

Заметим, что (2.3) и (2.5) можно, как и в случае течения в плоском канале, получить, решая уравнения из приложения к работе [1] при следующих граничных условиях: $T^{(0)}(R_j) = T_{wj}$, $u^{(s)}(R_j) = (1 - \delta_{s0})v_j(\omega)$; нормальная составляющая скорости на поверхностях цилиндров равна нулю (где $s = 0, 1$), скорость скольжения на поверхности j -го цилиндра (см. (1, П.3) и [8]) –

$$v_j(\omega) = \left[U_{\theta j} \frac{du^{(0)}}{dr} + V_{\theta j} \frac{dT^{(0)}}{dr} \right]_{r=R_j}.$$

3. Для количественной оценки вклада нелинейных температурных напряжений в распределение скоростей, термомангнитную разность давлений и момент сил в эффекте Скотта (см. (1.3), (2.3), (2.5)) необходимо знать функциональную зависимость кинетических коэффициентов и скорости температурного скольжения от температуры, давления, напряженности и частоты магнитного поля.

Наиболее простая зависимость кинетических коэффициентов от напряженности и частоты магнитного поля, как известно [4], наблюдается в газе линейных диамагнитных молекул, что и определяет повышенное внимание к такому газу в теоретических и экспериментальных исследованиях. Для линейных диамагнитных молекул $H(j) = Bs_j^2$, и в рассмотренных выше течениях $\Delta H(j) = -\hbar s_j(\omega_0 + \omega_1 \cos \omega t)$, где B – вращательная постоянная, s_j и s_{jz} – безразмерные операторы вращательного момента молекулы и его проекции на направление магнитного поля, $\omega_j = g\mu_N B_j / \hbar$ – ларморова частота, g -фактор не зависит от внутреннего состояния молекулы, μ_N – ядерный магнетон Бора.

При малой несферичности межмолекулярного взаимодействия, характеризуемой безразмерным параметром $\varkappa$, можно из (1,2.5), (1,2.13) и (2.4) найти известными методами [4, 11] векторный $A_k^j(1)$ и тензорные второго ранга $B_k^{ij}(1)$ и $A_{lk}^{ij}(1)$ операторы. Так, в трехмоментном приближении для $A_k^j(1)$ и двухмоментном приближении для $B_k^{ij}(1)$ эти операторы представлены в (П.1) (см. приложение).

Учитывая (П.1), из (1, 2.7), (1,2.16) и (2.3) находим с точностью до членов второго порядка по $\varkappa$ компоненты тензорных коэффициентов теплопроводности $\lambda^{11}(\omega) =$

$\lambda^{22}(\omega) = \lambda(\omega)$ и сдвиговой вязкости $\eta^{1212}(\omega) = \eta(\omega)$, которые даны в (П.3), кинетические коэффициенты $\Delta_j^{1222}(\omega)$ и $\Delta_j^{(-)}(\omega)$ в тензоре линейных ($j = 1$) и нелинейных ($j = 2$) сдвиговых температурных напряжений, определяемые формулами

$$\begin{aligned} \Delta_j^{1222}(\omega) &= \frac{1}{2} \Delta_j^{(-)}(\omega), \\ \frac{\Delta_j^{(-)}(\omega)}{\Delta} &= A_j \left[f^{(-)}(\omega; 2\xi_1) + \frac{1}{2} f^{(-)}(\omega; \xi_1) \right] + B_j f^{(-)}(\omega; 2\xi_1) - C_j f^{(-)}(\omega; 2\xi_0) - \\ &\quad - \delta_{j2} a(T) \sum_{m=1}^2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} |J_k(m\zeta)|^2 \left\{ m A_1 f_k^{(-)}(m\xi_1) f_k^{(+)}(m\xi_1) - \right. \\ &\quad \left. - \delta_{m2} (C_1 - B_1 - \psi(02)) f_k^{(-)}(\xi_1) [f_k^{(+)}(2\xi_0)(1 + f_k^{(+)}(2\xi_1)) + 2f_k^{(+)}(2\xi_1)] \right\}. \end{aligned} \quad (3.1)$$

В (3.1) $\Delta = 2\eta\lambda_t/5p$ — известный [4] барнеттовский кинетический коэффициент, где коэффициент сдвиговой вязкости η и коэффициент теплопроводности поступательных степеней свободы λ_t в отсутствие магнитного поля даны в приложении. Зависящие только от температуры функции в коэффициенте линейных температурных напряжений [4] равны

$$\begin{aligned} A_1 &= \left(\frac{3}{5}\right)^{1/2} \frac{\alpha}{\delta} \left[\sigma(1001) \sigma \begin{pmatrix} 1010 \\ 1200 \end{pmatrix} - \sigma \begin{pmatrix} 1010 \\ 1001 \end{pmatrix} \sigma \begin{pmatrix} 1001 \\ 1200 \end{pmatrix} \right], \\ B_1 &= \left(\frac{5}{4}\right)^{1/2} \frac{\alpha \sigma \begin{pmatrix} 20 \\ 02 \end{pmatrix}}{\sigma(12) - \sigma(02)}, \\ C_1 &= \psi(02) - B_1 \frac{\sigma(12)}{\sigma(02)}; \end{aligned} \quad (3.2)$$

$$\begin{aligned} A_2 &= T \frac{dA_1}{dT} + A_1 [a(T) + \Sigma(20; r_\lambda, r_\gamma)], \\ B_2 &= B_1 \left[b(T) - \frac{T}{w(02)} \frac{dw(12)}{dT} + \frac{2}{15} \Sigma(02; r_\lambda, r_\lambda) \right] + \\ &\quad + 75^{-1/2} \alpha \Sigma^{(1)} \begin{pmatrix} 20 \\ 02 \end{pmatrix}; r_\lambda, r_\lambda, \\ C_2 &= C_1 \left[c(T) + \frac{2}{15} \Sigma(02; r_\lambda, r_\lambda) \right] + \\ &\quad + \frac{2^{1/2}}{5} \frac{\sigma \begin{pmatrix} 20 \\ 02 \end{pmatrix}}{\sigma(02)} \Sigma^{(1)} \begin{pmatrix} 02 \\ 20 \end{pmatrix}; r, r_\lambda + \frac{\psi(02)}{5} \Sigma(20; r_\lambda, r_\lambda). \end{aligned} \quad (3.3)$$

В (3.2) и (3.3) использованы следующие обозначения:

$$\begin{aligned}\alpha &= \left(\frac{3}{5}\right)^{1/2} \left[r_\lambda \sigma \begin{pmatrix} 1200 \\ 1001 \end{pmatrix} - \sigma \begin{pmatrix} 1200 \\ 1010 \end{pmatrix} \right], \\ \delta &= \sigma(1001)\sigma(1010) - \left| \sigma \begin{pmatrix} 1010 \\ 1001 \end{pmatrix} \right|^2, \\ \psi(02) &= \frac{|\sigma \begin{pmatrix} 20 \\ 02 \end{pmatrix}|^2}{\sigma(20)\sigma(02)}, \\ a(T) &= T \frac{d}{dT} \ln \left(\frac{\lambda_t}{w(12)} \right), \\ b(T) &= a(T) + T \frac{d}{dT} \left(\frac{\alpha}{S} \right), \\ c(T) &= b(T) + T \frac{d \ln w(12)}{dT},\end{aligned}$$

здесь $r_\lambda = r \lambda_{\text{int}} / \lambda_t$, где $r = (5/2c_{\text{int}})^{1/2}$, $c_{\text{int}} = de/dT$. Коэффициент теплопроводности внутренних степеней свободы λ_{int} и функция температуры r_γ даны в обозначениях к (П.1); $w(ij) = 1/n\tau_{ij} = v\sigma(ij)$, где $v = (16T/\pi m)^{1/2}$. Эффективные сечения $\sigma(ij)$ и $\sigma \begin{pmatrix} ij\ kl \\ pqrs \end{pmatrix}$ определяются в (П.2). Безразмерные функции, зависящие только от температуры,

$$\begin{aligned}\Sigma^{(s)} \left(\begin{matrix} kl \\ ij \end{matrix}; r_1, r_2 \right) &= -\frac{m\lambda_t}{5np} \sum_{q=-2}^2 \int d1 d2 \varphi^{kl}(12) {}_{2q}^\dagger I^{(s)}(12) \times \\ &\times f_T(1) f_T(2) \varphi^{ij}(12; r_1, r_2) {}_{2q}, \quad s = 0, 1, \quad (3.4)\end{aligned}$$

и $\Sigma(ij; r_1, r_2)$ получаем из (3.4) при $(k, l) = (i, j)$ и $s = 0$, где двухчастичный супероператор $I^{(s)}(12)$ определяется в (1,1,1) для центральных ($s = 0$) и нецентральных ($s = 1$) межмолекулярных сил (см. [11, 12]). Двухчастичные неприводимые тензорные операторы второго ранга (см. обозначения к (П.1)) даются формулами

$$\begin{aligned}\varphi^{20}(12) {}_{2q} &= [p] {}_{2q}, \\ \varphi^{02}(12) {}_{2q} &= \sum_{j=1}^2 \Phi^{0200}(j) {}_{2q}, \\ \varphi^{20}(12; r_1, r_2) {}_{2q} &= \varphi^{20}(12) {}_{2q} \left\{ \frac{1}{4} \left(\varepsilon^2 - 6\varepsilon + \frac{9}{2} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{4} r(r_1 + r_2)(\varepsilon - 2)(h_1 + h_2) + r^2 r_1 r_2 h_1 h_2 \right\}, \\ \varphi^{02}(12; r_1, r_2) {}_{2q} &= \varphi^{02}(12) {}_{2q} \left\{ \frac{1}{2} \left(\varepsilon^2 - 2\varepsilon - \frac{3}{2} \right) + \right. \\ &\quad \left. + r_1 r_2 \varepsilon (h_1 + h_2) \right\} + \sum_{j=1}^2 h_j \Phi^{0200}(j) {}_{2q}.\end{aligned}$$

Здесь $\mathbf{p} = (\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2)/2(mT)^{1/2}$, $\varepsilon = p^2 - \frac{3}{2}$ — зависящие от $T, B_0/p, \gamma = \omega/\omega_0$ и $\zeta = \omega_1/\omega_0$ функции (см. также [4]). Для функции $f^{(\mp)}(\omega, m\xi)$ можно написать представление

$$f^{(\mp)}(\omega; m\xi) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |J_k(m\zeta)|^2 f_k^{(\mp)}(m\xi),$$

где, как и в (3.1), $J_k(x)$ — функция Бесселя первого рода. Кроме того, имеем следующие соотношения:

$$f_k^{(\mp)}(m\xi) = f^{(\mp)}[\xi(m + k\gamma)],$$

$$f^{(-)}[x] = \frac{x}{1+x^2}, \quad f^{(+)}[x] = \frac{x^2}{1+x^2}, \quad \xi_j = \xi_{j2} = \omega_0 \tau_{j2}.$$

При вычислении термомагнитной разности давлений и момента сил в газе линейных диамагнитных молекул с точностью до членов второго порядка по $\varkappa$ кинетические коэффициенты $\eta(\omega)$ и $\lambda(\omega)$ в $Z(y)$, $k_j(y)$, $Z(r)$, $k(r)$ и Q можно заменить кинетическими коэффициентами η и λ , соответственно. Как следует из (2.3), (2.5) и (3.1), даже для такой простой модели молекулярного газа вклад от нелинейных температурных напряжений в термомагнитную разность давлений и момент сил можно найти только численным интегрированием.

В линейном приближении по малому относительному перепаду температур при постоянном магнитном поле из (1.4) и (2.6) с учетом (3.1) получаем известные в теории эффекта термомагнитной разности давлений и эффекта Скотта [4–7] поля скоростей, градиент давлений и момент сил.

Заметим, что рассмотренные в первом и втором разделах течения газа, состоящего из молекул с малой несферичностью межмолекулярного взаимодействия, являются примерами течений типа течения Стокса ($\text{Re} \simeq \varkappa^2 \ll 1$), в котором, однако, поле скоростей определяется не только вязкими, но и нелинейными температурными напряжениями.

4. В отсутствие магнитного поля из (1,2.14) получаем следующее выражение для тензора температурных напряжений в многоатомном газе:

$$\Pi_T^{ij} = 2\Delta_1[\nabla\nabla]^{ij}T + \frac{2}{T}\Delta_2[\nabla T\nabla T]^{ij} + \delta_{ij}\left(\Gamma_1\nabla_k\nabla_kT + \frac{1}{T}\Gamma_2\nabla_kT\nabla_kT\right),$$

где $[aa]^{ij}$ — неприводимый тензор второго ранга, построенный из компонент вектора $\mathbf{a}$; кинетические коэффициенты сдвиговых Δ_j и объемных Γ_j линейных ($j = 1$) и нелинейных ($j = 2$) температурных напряжений определяются формулами

$$\Delta_j = \frac{nT}{10} \left(\left[\frac{pp}{mT} \right]^{ki}, R^{-1}a_j^{ki} \right),$$

$$\Gamma_j = \frac{nT}{3} \left(\left(\frac{p^2}{3mT} - 1 - \frac{\varepsilon}{C_V} \right), R^{-1}a_j^{ii} \right), \quad j = 1, 2. \quad (4.1)$$

Вычисляя Δ_j в одномоментном и Γ_j в двухмоментном приближениях (см., например, [11]), из (4.1) находим

$$\begin{aligned}\Delta_1 &= \Delta = \frac{2\eta\lambda_t}{5p}, \\ \Delta_2 &= \Delta \left[T \frac{d \ln \lambda_t}{dT} + \frac{1}{5} \Sigma(20; r_\lambda, r_\lambda) \right], \\ \Gamma_1 &= \frac{\eta_2}{p} \left(\lambda_t - \frac{3}{2c_{\text{int}}} \lambda_{\text{int}} \right), \\ \Gamma_2 &= \frac{\eta_2 T}{p} \frac{d}{dT} \left(\lambda_t - \frac{3}{2c_{\text{int}}} \lambda_{\text{int}} \right) - \frac{\eta_2 \lambda_{\text{int}}}{p} T \frac{d \ln c_{\text{int}}}{dT} + \\ &\quad + \frac{\eta_2 \lambda_t}{75p} \frac{C_V}{c_{\text{int}}} \left[\Sigma(03) - \frac{5\lambda_{\text{int}}}{\lambda_t} \Sigma(21) - \frac{25}{3} \left(\frac{\lambda_{\text{int}}}{\lambda_t} \right)^2 \Sigma(12) \right].\end{aligned}$$

Здесь коэффициент объемной вязкости $\eta_2 = c_{\text{int}} T / C_V^2 v \sigma(0001)$ (см. [4] и приложение). $\Sigma(20; r_\lambda, r_\lambda)$ определяется из (3.4). η_2 и Σ являются безразмерными функциями, зависящими только от температуры.

В функции

$$\Sigma(ij) = -\frac{m\lambda_t}{np} \int d1 d2 \varepsilon I(12) f_T(1) f_T(2) \varphi_{ij}(12) \quad (4.2)$$

использованы обозначения (3.4) и скалярные двухчастичные операторы (см. обозначения к (П.1)):

$$\begin{aligned}\varphi_{03}(12) &= \varepsilon^3 - 6\varepsilon^2 - 51\varepsilon - \frac{93}{2}, \\ \varphi_{21}(12) &= \left(\varepsilon^2 - 2\varepsilon - \frac{27}{8} \right) \sum_{j=1}^2 h_j, \\ \varphi_{12}(12) &= \varepsilon \left[\left(\sum_{j=1}^2 h_j \right)^2 - \sum_{j=1}^2 h_j^2 \right].\end{aligned}$$

Функции (3.4) и (4.2) можно выразить через эффективные сечения и производные эффективных сечений по температуре; например,

$$\Sigma(20; r_\lambda, r_\lambda) = \frac{5m\lambda_t}{T} \left\{ \frac{T^2}{20} \frac{d^2}{dT^2} \left(\frac{T}{\eta} \right) - \frac{T(1-x^2)}{10} \frac{d}{dT} \left(\frac{T}{\eta(01)} \right) - \sum_{ij} \frac{Tc(ij)}{\eta(ij)} \right\}, \quad (4.3)$$

здесь

$$\begin{aligned}\eta(ij) &= c_{\text{int}}^{1/2} T / v \sigma(20ij), \\ c(01) &= \frac{1}{5} \left[x^2 \left(T \frac{d}{dT} \ln c_{\text{int}} + 1 \right) - 2 \right], \\ c(11) &= \left(\frac{7}{50} \right)^{1/2} (2x - 2x^2 + 1), \quad c(02) = \frac{1}{5} a x^2,\end{aligned}$$

где $x = rr_\lambda$, а остальные $c(ij)$ равны нулю. Ортонормированные операторы в эффективных сечениях $\sigma(20ij)$ и функция a даны в (П.4).

В частности, для одноатомного газа из (4.3) находим

$$\Sigma(20; 0, 0) = \frac{15\eta T}{16} \frac{d^2}{dT^2} \left(\frac{T}{\eta} \right),$$

где η — коэффициент сдвиговой вязкости, вычисленный в одномоментном приближении.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Для газа линейных диамагнитных молекул с малой несферичностью межмолекулярного взаимодействия (см. третий раздел) при магнитном поле $\mathbf{B} = \mathbf{e}(B_0 + B_1 \cos \omega t)$ решение уравнения (1,2.4) и первого уравнения в (1,2.12), используя связь между компонентами неприводимых декартовых и сферических тензоров [13], будем искать в виде

$$A_k(1)_{1q} = \sum_{s=0}^{\infty} \varkappa^s A_k^{(s)}(1)_{1q}$$

и аналогично для тензорного второго ранга оператора $B_k(1)_{2q}$.

Ограничиваясь членами до второго порядка по $\varkappa$, в трехмоментном приближении для векторного и двухмоментном приближении для тензорного операторов [11] получаем

$$\begin{aligned} A_k^{(0)}(1)_{1q} &= -\delta_{k0} \Phi(1; r_\lambda, \lambda_t)_{1q}, \\ A_k^{(1)}(1)_{1q} &= -\left(\frac{32}{3\pi}\right)^{1/2} \frac{\alpha \lambda_t}{nv} \sum_{j=1}^3 \Phi^{1200}(1)_{1q} \Psi_k^{1j}(\zeta, \xi_1), \\ A_k^{(2)}(1)_{1q} &= \frac{5}{3} A_{1k} \Phi(1; r_\gamma, \lambda_{tk})_{1q} \Psi_k^{11}(\zeta, \xi_1), \\ B_k^{(0)}(1)_{2q} &= \delta_{k0} \Phi^{20}(1; \eta)_{2q}, \\ B_k^{(1)}(1)_{2q} &= -\Phi^{02}(1; \eta)_{2q} \Psi_k(q\zeta, \xi_0) \frac{\sigma_{(20)}^{(02)}}{\sigma(02)}, \\ B_k^{(2)}(1)_{2q} &= \Phi^{20}(1; \eta)_{2q} \Psi_k(q\zeta, \xi_0) \frac{\psi(02)}{1 + ik\omega \xi_0 / \omega_0}. \end{aligned} \tag{П.1}$$

В (П.1) одночастичные операторы равны

$$\begin{aligned} \Phi(1; r, \lambda_t)_{1q} &= \frac{\lambda_t}{n} \left(\frac{2m}{5T} \right)^{1/2} [\Phi^{1010}(1)_{1q} - r \Phi^{1001}(1)_{1q}], \\ \Phi^{ij}(1; \eta)_{2q} &= 2^{1/2} \frac{\eta}{nT} \Phi^{ij00}(1)_{2q}. \end{aligned}$$

В этих формулах коэффициент теплопроводности поступательных степеней свободы молекул есть

$$\lambda_t = \frac{5T}{2m\delta r} \left[\sigma \begin{pmatrix} 1010 \\ 1001 \end{pmatrix} + r\sigma(1001) \right],$$

а $\eta = T/v\sigma(20)$ – коэффициент сдвиговой вязкости. Ортонормированные одночастичные операторы можно написать в виде

$$\begin{aligned} \Phi^{1010}(1)_{1q} &= 10^{-1/2} p_{1q}(5 - p^2), \\ \Phi^{1001}(1)_{1q} &= p_{1q} \Phi^{0001}(1), \\ \Phi^{0001}(1) &= \frac{H(1) - e}{T c_{\text{int}}^{1/2}} = \frac{h_1}{c_{\text{int}}^{1/2}}, \\ \Phi^{2000}(1)_{2q} &= 2^{-1/2} [p]_{2q}, \\ \Phi^{0200}(1)_{2q} &= S [s_1]_{2q}, \\ \Phi^{1200}(1)_{jq} &= \sum_{s s'} \langle 1s2s' | jq \rangle p_{1s} \Phi^{0200}(1)_{2s'}, \end{aligned}$$

где безразмерный импульс молекулы $\mathbf{p} = \mathbf{p}_1/(mT)^{1/2}$; $[d]_{jq}$ – компоненты симметричного неприводимого тензора j -го ранга, построенные из компонент вектора $\mathbf{d}$; $\langle j_1 q_1 j_2 q_2 | jq \rangle$ – коэффициент Клебша–Гордана [13]. Нормировочный множитель S и функция r_γ определяются формулами

$$\begin{aligned} S &= \left\{ \frac{2}{15} \text{Tr}_{(1)} \exp(-H(1)/T) \left[s_1^2 \left(s_1^2 - \frac{3}{4} \right) \right] \right\}^{1/2}, \\ r_\gamma &= \left[\sigma \begin{pmatrix} 1010 \\ 1200 \end{pmatrix} \sigma \begin{pmatrix} 1010 \\ 1001 \end{pmatrix} - \sigma \begin{pmatrix} 1001 \\ 1200 \end{pmatrix} \sigma(1010) \right] \times \\ &\quad \times \left[\sigma \begin{pmatrix} 1010 \\ 1200 \end{pmatrix} \sigma(1001) - \sigma \begin{pmatrix} 1001 \\ 1200 \end{pmatrix} \sigma \begin{pmatrix} 1001 \\ 1010 \end{pmatrix} \right]^{-1}. \end{aligned}$$

Эффективные сечения здесь и в (3.2) находятся по формулам

$$\sigma^{(q)} \begin{pmatrix} i' j' k' s' \\ i j k s \end{pmatrix}_l = \frac{1}{nv} (\Phi_{lm}^{i' j' k' s'}, R^{(q)} \Phi_{lm}^{i j k s}), \quad (\text{П.2})$$

где ортонормированные операторы $\Phi^{i j k s}(1)_{lm}$ даны, например, в обозначениях к (П.1); $R^{(q)}$ – супероператор Вальдмана–Снайдера для центральных ($q = 0$) и нецентральных ($q = 1$) межмолекулярных сил [11, 12]; $\sigma(i j k s)$ и $\sigma(i j) = \sigma(i j 00)$ получаем из (П.2) при $(i' j') = (i j)$ и $q = 0$; индексы q и l опускаем, когда их значения очевидны; $\sigma(12) = \sigma(12)_l$ при $l = 1, 2, 3$.

Операторы $\Phi_k(1; r, \lambda_{tk})_{1q}$ и функции A_{1k} и λ_{tk} получаем из оператора $\Phi_k(1; r, \lambda_t)_{1q}$, из функции A_1 , определенной в (3.2), и из λ_t заменой эффективных сечений суммой соответствующего эффективного сечения и $ik\omega/nv$. Функции из (П.1)

$$\Psi_k^{1j}(m\zeta, \xi) = \sum_{ss'} \langle 1s'2s | 1m \rangle \langle 1s'2s | jm \rangle \Psi_k(s\zeta, \xi),$$

$$\Psi_k(m\zeta, \xi) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} J_{k'}(m\zeta) J_{k-k'}(m\zeta) \frac{1}{1 - i\xi(m + k'\omega/\omega_0)}$$

отличны от нуля только при наличии магнитного поля. Коэффициент теплопроводности $\lambda(\omega)$ и коэффициент сдвиговой вязкости $\eta(\omega)$ зависят от частоты магнитного поля и с точностью до членов второго порядка по $\varkappa$ равны

$$\frac{\lambda(\omega)}{\lambda} = 1 + \frac{5}{3} \psi(12) - \psi(12) \left[f^{(+)}(\omega; 2\xi_1) + \frac{1}{2} f^{(+)}(\omega, \xi_1) \right],$$

$$\frac{\eta(\omega)}{\eta} = 1 + \psi(02) - \psi(02) f^{(+)}(\omega; 2\xi_0),$$
(П.3)

где $\lambda = \lambda_t + \lambda_{\text{int}}$. Коэффициент теплопроводности внутренних степеней свободы молекул выражается формулой

$$\lambda_{\text{int}} = \frac{5T}{2m\delta vr} \left[\sigma \left(\begin{smallmatrix} 1010 \\ 1001 \end{smallmatrix} \right) + \frac{1}{r} \sigma(1010) \right].$$

Функции

$$\psi(12) = \frac{6}{25} \frac{\alpha^2 m v}{\lambda T} \lambda_t^2 \sigma(12),$$

$\psi(02)$ и α определены в обозначениях к (3.2).

Ортонормированные одночастичные операторы в эффективных сечениях $\sigma(20ij)$ в (4.3) равны

$$\Phi^{20j1}(1)_{2q} = \Phi^{20j0}(1)_{2q} \frac{h_1}{c_{\text{int}}^{1/2}},$$

$$\Phi^{2010}(1)_{2q} = 14^{-1/2} \Phi^{2000}(1)_{2q} (7 - p^2),$$

$$\Phi^{2002}(1)_{2q} = \frac{1}{ac_{\text{int}}^{1/2}} \Phi^{2000}(1)_{2q} \left[h_1^2 - c_{\text{int}} + \frac{h_1}{T} \frac{d}{dT} (c_{\text{int}} T^2) \right],$$

$$a^2 = 2c_{\text{int}} - \frac{1}{T c_{\text{int}}^2} \left(1 - \frac{c_{\text{int}}}{T} \frac{d}{dT} T^2 \right) \frac{d}{dT} (c_{\text{int}} T^2).$$
(П.4)

Список литературы

- [1] Л. А. Пальцев. ТМФ. 1997. Т. 110. № 3. С. 459–469.
- [2] A. C. Levi, F. R. McCourt, J. J. M. Beenakker. Physica. 1969. V. 42. № 2. P. 363–387.
- [3] G. G. Scott, H. W. Sturmer, M. E. Larchez. Phys. Rev. A. 1970. V. 2. № 3. P. 792–796.
- [4] H. Moraal. Phys. Rep. C. 1975. V. 17. № 5. P. 226–306.
- [5] В. А. Борман, С. Ю. Крылов, Б. И. Николоев. ЖЭТФ. 1979. Т. 76. Вып. 5. С. 1551–1570.
- [6] L. J. F. Hermans, R. Horne, E. L. M. J. van Varderem. Physica A. 1985. V. 134. № 2. P. 209–215.
- [7] C. Cercignani, M. Lampis. In: Proc. of the 15th. Int. Sym. on RGD. V. 1. Eds V. Boffi, C. Cercignani. Stuttgart: B. G. Teubner, 1986. P. 336–344.
- [8] К. Черчиньяни. Теория и приложение уравнения Больцмана. М.: Мир, 1978.
- [9] B. I. M. Ten Bosch, J. J. M. Beenakker, I. Kušcer. Physica A. 1987. V. 143. № 1–2. P. 261–286.
- [10] C. Cercignani, L. Geppert, M. Lampis. Physica A. 1983. V. 121. № 4. P. 531–542.
- [11] W. E. Köhler, H. F. D. Knaap, G. E. J. Eggermont, G. W. 't Hooft. Z. Naturforsch. a. 1978. B. 33. № 7. S. 761–777.
- [12] Л. А. Пальцев. ТМФ. 1989. Т. 78. № 1. С. 81–93.
- [13] Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. Квантовая механика (нерелятивистская теория). М.: Наука, 1989.

Поступила в редакцию 5.IX.1996 г.

L. A. Paltsev

ON THERMOMAGNETIC PRESSURE DIFFERENCE EFFECT AND SCOTT EFFECT

The thermomagnetic pressure difference effect and the Scott effect are considered on the account for nonlinear temperature stresses. Shear nonlinear temperature stress coefficients for gas of linear diamagnetic molecules are defined as a function of the magnetic field frequency. Shear and bulk temperature stress coefficients for polyatomic gas in absence of the magnetic field are obtained.