Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. А. Файнберг, А. Б. Пиуновский, О теореме Дворецкого–Вальда–Вольфовица о нерандомизированных статистических решениях, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2005, том 50, выпуск 3, 594–597

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp101>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.92.164.108

26 апреля 2023 г., 15:16:41

© 2005 г.

ФАЙНБЕРГ Е. А.*, ПИУНОВСКИЙ А. Б.**

О ТЕОРЕМЕ ДВОРЕЦКОГО–ВАЛЬДА–ВОЛЬФОВИЦА О НЕРАНДОМИЗИРОВАННЫХ СТАТИСТИЧЕСКИХ РЕШЕНИЯХ¹⁾

Результат Дворецкого, Вальда и Вольфовица о достаточности нерандомизированных решающих правил в задачах статистических решений с неатомическими распределениями состояний справедлив для произвольных борелевских пространств решений и для произвольных измеримых функций потерь.

Ключевые слова и фразы: решающее правило, неатомическая мера, нерандомизированное решающее правило, эквивалентные решающие правила.

Рассмотрим следующую задачу статистических решений, исследованную А. Дворецким, А. Вальдом и Дж. Вольфовицем [5], [6]. Пусть $(X, \mathcal{X})$ — борелевское пространство, и пусть $\Omega = \{\mu_1, \dots, \mu_N\}$ — конечный набор вероятностных мер на $(X, \mathcal{X})$. Истинное распределение вероятностей μ на $(X, \mathcal{X})$ неизвестно, но $\mu \in \Omega$. Пусть $(A, \mathcal{A})$ — борелевское пространство, элементы которого являются возможными решениями; $A(x) \in \mathcal{A}$ — множество решений, допустимых в состояниях $x \in X$. Мы считаем, что (а) график $\text{Gr}(A) = \{(x, a) : x \in X, a \in A(x)\}$ является измеримым подмножеством $X \times A$ и (б) существует по крайней мере одно измеримое отображение $\varphi : X \rightarrow A$ со значениями $\varphi(x) \in A(x)$ для всех $x \in X$. В частности, из (б) следует, что $A(x) \neq \emptyset$, $x \in X$. Решающим правилом π назовем регулярную переходную вероятность из X в A такую, что $\pi(A(x) | x) = 1$ для всех $x \in X$. Решающее правило π называется нерандомизированным, если для каждого $x \in X$ мера $\pi(\cdot | x)$ сконцентрирована в единственной точке. Нерандомизированное решающее правило π определяется измеримым отображением $\varphi : X \rightarrow A$ таким, что $\varphi(x) \in A(x)$ и $\pi(\varphi(x) | x) = 1$, $x \in X$. Мы будем называть такое отображение φ решающей функцией.

Потери задаются вектор-функцией

$$\rho(\mu, x, a) = (\rho_1(\mu, x, a), \dots, \rho_M(\mu, x, a)),$$

где μ — истинное распределение, $\mu \in \Omega$ и $a \in A(x)$. Для каждого $\mu_n \in \Omega$ функции $\rho_m(\mu_n, x, a)$, $m = 1, \dots, M$, измеримы по (x, a) и принимают значения на расширенной прямой $[-\infty, \infty]$.

Для каждого решающего правила π и для каждого $\mu_n \in \Omega$ рассмотрим вектор рисков

$$\mathcal{R}(\mu_n, \pi) = (\mathcal{R}_1(\mu_n, \pi), \dots, \mathcal{R}_M(\mu_n, \pi)),$$

где

$$\mathcal{R}_m(\mu_n, \pi) = \int_X \int_A \rho_m(\mu_n, x, a) \pi(da | x) \mu_n(dx), \quad m = 1, \dots, M.$$

Здесь и ниже все интегралы от измеримых функций f определяются как

$$\int f(y) \nu(dy) = F^+ + F^-,$$

где $+\infty + (-\infty) = -\infty$, $F^\pm = \int f^\pm(y) \nu(dy)$ и $f^+ = \max\{f, 0\}$, $f^- = \min\{f, 0\}$.

* Department of Applied Mathematics and Statistics, State University of New York at Stony Brook, Stony Brook, NY 11794-3600, USA; e-mail: Eugene.Feinberg@sunysb.edu

** Department of Mathematical Sciences, University of Liverpool, M&O Building, Liverpool, L69 7ZL, UK.

¹⁾ Работа выполнена при поддержке NSF (грант DMI-0300121); второй автор благодарит также Royal Society и Royal Academy of Engineering за поддержку его визита в США и исследований, проведенных им в Stony Brook.

Решающие правила π_1 и π_2 называются эквивалентными, если

$$\mathcal{R}(\mu_n, \pi_1) = \mathcal{R}(\mu_n, \pi_2) \quad \text{для всех } n = 1, \dots, N.$$

Мера ν , определенная на X , называется неатомической, если $\nu(\{x\}) = 0$ при всех $x \in X$.

Для конечного набора Ω неатомических мер Дворецкий, Вальд и Вольфовиц [5], [6] доказали, что в случае конечного множества решений для всякого решающего правила существует эквивалентное нерандомизированное решающее правило. Аппроксимируя бесконечное пространство решений A конечными множествами, они также установили достаточные условия, когда эквивалентность имеет место и для бесконечного множества A . В соответствии с нижеследующим утверждением, указанная эквивалентность справедлива без каких-либо предположений о пространстве решений A или о функциях потерь ρ .

Теорема 1. *Если все меры $\mu_1, \dots, \mu_N$ неатомические, то для всякого решающего правила существует эквивалентное нерандомизированное решающее правило.*

В случае, когда ρ — скалярная функция ($M = 1$) и пространство решений A конечно, теорема 1 совпадает с теоремой 3.1 в статье Дворецкого, Вальда и Вольфовица [6]; см. также [5] и монографию Т. С. Фергюсона [10, с. 79]. Дворецкий, Вальд и Вольфовиц также обобщили свой результат на случай, когда A — компакт в специфической метрике, связанной с функцией ρ (см. [6, раздел 4]). Э. Балдер [2, следствие 2.5] доказал теорему 1, когда функция ρ непрерывна по a и равномерно ограничена. Результат Балдера [2, следствие 2.5] является обобщением результатов [6, раздел 4]. Д. Блекуэлл [4] установил, что в случае борелевского пространства решений для взвеси конечного числа нерандомизированных решающих правил найдется эквивалентное нерандомизированное решающее правило.

Отметим, что в [5], [6] X было n -мерным евклидовым пространством, хотя в соответствующем замечании говорилось, что это предположение несущественно. В статье [2] $(X, \mathcal{X})$ было произвольным измеримым пространством, но представляется, что случай борелевского X покрывает все реалистические приложения.

Для удобства читателя ниже указаны основные отличия в обозначениях настоящей заметки и статьи [6]. Мы обозначаем возможные распределения состояний $\mu_1, \dots, \mu_N$, в то время как в [6] они обозначались $F_1, \dots, F_p$. Пространство решений A и решения $a \in A$ соответствуют D и $d \in D$ в [6] соответственно. Мы используем обозначение π для решающего правила вместо δ в [6]. Функция потерь $\rho(\mu, x, a)$ соответствует $W(F, d, x)$ в [6], а функция риска $\mathcal{R}(\mu, \pi)$ соответствует $r(F, \delta)$ в [6]. Отметим, что наша модель — несколько более общая, чем в [5], [6], поскольку мы (а) рассматриваем векторную функцию потерь ρ и (б) предполагаем, что множества допустимых решений $A(x)$ в состояниях $x \in X$ могут быть различными при разных состояниях x .

Теорема 1 вытекает из теоремы 2.1 в [9]. Прежде всего приведем одношаговую версию теоремы 2.1 из [9]. Рассмотрим измеримую вектор-функцию $r(x, a) = (r^1(x, a), \dots, r^L(x, a))$ со значениями $-\infty \leq r^\ell(x, a) \leq \infty$, $\ell = 1, \dots, L$. Для вероятностной меры $\hat{\mu}$ на X и решающего правила π положим

$$R(\hat{\mu}, \pi) = (R^1(\hat{\mu}, \pi), \dots, R^L(\hat{\mu}, \pi)),$$

где

$$R^\ell(\hat{\mu}, \pi) = \int_X \int_A r^\ell(x, a) \pi(da | x) \hat{\mu}(dx), \quad \ell = 1, \dots, L.$$

Следующее утверждение есть теорема 2.1 из [9] для одношаговой модели; см. [3, теорема 5.3], где соответствующее утверждение дано для случая, когда $(X, \mathcal{X})$ — произвольное измеримое пространство.

Теорема 2. *Если вероятностная мера $\hat{\mu}$ неатомическая, то для всякого решающего правила π существует нерандомизированное решающее правило φ такое, что $R(\hat{\mu}, \varphi) = R(\hat{\mu}, \pi)$.*

Доказательство теоремы 1. Определим

$$\hat{\mu} = \frac{1}{N} (\mu_1 + \dots + \mu_N), \quad (1)$$

$$r^{n,m}(x, a) = \rho_m(\mu_n, x, a) \frac{d\mu_n}{d\hat{\mu}}(x), \quad n = 1, \dots, N, \quad m = 1, \dots, M. \quad (2)$$

Тогда

$$\mathcal{R}(\mu_n, \pi) = (R^{n,1}(\hat{\mu}, \pi), \dots, R^{n,M}(\hat{\mu}, \pi)), \quad n = 1, \dots, N,$$

и теорема 1 следует из теоремы 2, когда «начальное» распределение состояний есть $\hat{\mu}$ и каждое решающее правило π характеризуется $L = N \times M$ критериями $R^{n,m}(\hat{\mu})$, $n = 1, \dots, N$, $m = 1, \dots, M$.

З а м е ч а н и е. Другое доказательство теоремы 1 может быть основано на результате Д. Блекуэлла [4] о существовании эквивалентного нерандомизированного решающего правила для взвеси конечного числа нерандомизированных решающих правил, теореме Каратеодори и на одношаговой версии того факта, что всякая рандомизированная стратегия (многошаговое решающее правило) может быть представлена в виде взвеси нерандомизированных стратегий (см. [8, теоремы 5.1, 5.2] или [7, теорема 1]). Представление рандомизированных стратегических мер в виде взвесей стратегических мер, соответствующих нерандомизированным стратегиям, было введено Р. Ауманном [1]. Отметим также, что в случае $A(x) \equiv A$, рассмотренном Блекуэллом, для одношаговой модели тот факт, что всякое рандомизированное решающее правило может быть представлено в виде взвеси нерандомизированных решающих правил, следует из теоремы Крейна–Мильмана. Действительно, в этом случае можно считать, что $A = [0, 1]$. Тогда множество всех мер на $X \times A$ с данным начальным распределением есть компакт, а его крайние точки соответствуют нерандомизированным решающим правилам: см. [11, теорема 10 на с. 70].

Следующий пример иллюстрирует приложения теоремы 1.

П р и м е р. Рассмотрим задачу управления запасами, когда цель — удовлетворить требование $X = X_1 + X_2$, где X_1 и X_2 — две независимые одинаково распределенные случайные величины с неатомическим распределением μ . Это распределение неизвестно, но мы знаем, что $\mu \in \{\mu_1, \dots, \mu_N\}$, где каждая мера μ_n неатомическая. Основываясь на наблюдении x случайной величины X_1 , необходимо выбрать величину заказа $a \in A = \mathbf{R}^1$. Потери равны $C(x, y, a)$, где y — реализация случайной величины X_2 . Например, $C(x, y, a) = C_1(a) + C_2(x + y - a)$, где C_1 — цена заказа, а C_2 учитывает, насколько хорошо удовлетворено требование. Полные ожидаемые потери (риск) равны

$$\mathcal{R}(\mu_n, \pi) = \int_{\mathbf{R}^1} \int_{\mathbf{R}^1} \rho(\mu_n, x, a) \pi(da | x) \mu_n(dx), \quad \mu_n \in \Omega,$$

где

$$\rho(\mu_n, x, a) = \int_{\mathbf{R}^1} C(x, y, a) \mu_n(dy).$$

Согласно теореме 1, любой возможный вектор рисков $(\mathcal{R}(\mu_1, \pi), \dots, \mathcal{R}(\mu_N, \pi))$ может быть реализован посредством нерандомизированного решающего правила φ . Отметим, что результаты работ [2], [5], [6] неприменимы, если функция C разрывна.

Авторы благодарны Т. С. Фергюсону за полезные замечания и за указание на статью [4], а также Э. Балдеру за указание на работу [3].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Aumann R. J. Mixed and behavior strategies in infinite extensive games. — Ann. of Math. Stud., 1964, v. 52, p. 627–650.
2. Balder E. J. Elimination of randomization in statistical decision theory reconsidered. — J. Multivariate Anal., 1985, v. 16, № 2, p. 260–264.

3. *Balder E. J.* New fundamentals of Young measure convergence. — Calculus of Variations and Optimal Control. Ed. by A. Ioffe, S. Reich, and I. Shafrir. Boca Raton: Chapman&Hall/CRC Press, 2000, p. 24–48.
4. *Blackwell D.* On a theorem of Lyapunov. — Ann. Math. Statist., 1951, v. 22, p. 112–114.
5. *Dvoretzky A., Wald A., Wolfowitz J.* Elimination of randomization in certain problems of statistics and of the theory of games. — Proc. Natl. Acad. Sci. USA, 1950, v. 36, p. 256–260.
6. *Dvoretzky A., Wald A., Wolfowitz J.* Elimination of randomization in certain statistical decision procedures and zero-sum two-person games. — Ann. Math. Statist., 1951, v. 22, p. 1–21.
7. *Файнберг Е. А.* Нерандомизированные марковские и полумарковские стратегии в динамическом программировании. — Теория вероятн. и ее примен., 1982, т. 27, в. 1, с. 109–119.
8. *Feinberg E. A.* On measurability and representation of strategic measures in Markov decision processes. — Statistics, Probability and Game Theory. Papers in Honor of David Blackwell. Ed. by T. S. Ferguson, L. S. Shapley, and J. B. MacQueen. Hayward: Inst. Math. Statist., 1996, p. 29–43. (IMS Lecture Notes Monogr. Ser., v. 30.)
9. *Feinberg E. A., Piunovskiy A. B.* Nonatomic total rewards Markov decision processes with multiple criteria. — J. Math. Anal. Appl., 2002, v. 273, № 1, p. 93–111.
10. *Ferguson T. S.* Mathematical Statistics: A Decision Theoretic Approach. New York–London: Academic Press, 1967, 396 p.
11. *Пиунровский А. Б.* Оптимальное управление случайными последовательностями в задачах с ограничениями. М: Научная книга, 1996.

Поступила в редакцию
1.VI.2005

© 2005 г.

KAGAN A.*, KONIKOV M.**

THE STRUCTURE OF THE UMVUEs FROM CATEGORICAL DATA

Пусть наблюдаемая случайная величина X принимает конечное число значений с вероятностями $p_1(\theta), \dots, p_N(\theta)$, зависящими от абстрактного параметра $\theta \in \Theta$. Доказывается, что статистика является несмещенной оценкой с равномерно минимальной дисперсией (UMVUE) тогда и только тогда, когда она измерима относительно подалгебры конечной алгебры, порожденной X . В общем случае эта подалгебра меньше, чем минимальная достаточная подалгебра для θ , и описывается в явном виде. Она связана со специальным разбиением конечного множества элементов абстрактного линейного пространства.

Ключевые слова и фразы: оценка, линейное пространство, подалгебра, достаточность.

1. Introduction. Let $\mathcal{P} = \{P_\theta, \theta \in \Theta\}$ be a family of probability distributions of a random element X taking values in a measurable space $(\mathcal{X}, \mathcal{A})$. The structure of uniformly minimum variance unbiased estimators (UMVUEs) of parameter functions has interested statisticians since long ago. Due to the Rao–Blackwell theorem, a UMVUE is a function of the minimal sufficient statistic when the latter exists, in particular, for

* Department of Mathematics, University of Maryland, College Park, MD 20742; e-mail: amk@math.umd.edu

** Bloomberg LP, 499 Park Ave., New York, NY 10022, USA.