Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Р. Липцер, В. Й. Рунггалдиер, М. И. Таксар, Диффузионная аппроксимация и оптимальное стохастическое управление, *Теория вероятн. и ее примен.*, 1999, том 44, выпуск 4, 705–737

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp1030>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.239.49.27

26 апреля 2023 г., 06:28:44

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЯ

Основан в январе 1956 г.

Выходит 4 раза в год

Москва • Наука • ТВП

Том 44

Выпуск 4, 1999 год

октябрь, ноябрь, декабрь

© 1999 г.

ЛИПЦЕР Р.*, РУНГГАЛДИЕР В.**,
ТАКСАР М.***

ДИФфуЗИОННАЯ АППРОКСИМАЦИЯ И ОПТИМАЛЬНОЕ СТОХАСТИЧЕСКОЕ УПРАВЛЕНИЕ¹⁾

В статье исследуется модель стохастического управления, допускающая диффузионную аппроксимацию. В допредельной модели возмущения задаются помехами нескольких типов: аддитивным стационарным шумом, быстро осциллирующим процессом и скачкообразным процессом с высокой интенсивностью скачков малого размера. Мы показываем, что управление в виде обратной связи, удовлетворяющее условию Липшица и являющееся δ -оптимальным для предельной модели, остается δ -оптимальным и для допредельной модели. Метод доказательства этого факта использует технику слабой сходимости случайных процессов. Полученный результат обобщает предшествующую работу авторов, в которой предельная модель является детерминированной.

Ключевые слова и фразы: стохастическое управление, стохастические дифференциальные уравнения, слабая сходимость, асимптотическая оптимальность.

*Department of Electrical Engineering-Systems, Tel Aviv University, 69978 Ramat Aviv, Tel Aviv, Israel; Институт проблем передачи информации РАН, Б. Каретный, 19, 101447 Москва, ГСП-4, Россия; e-mail: liptser@eng.tan.ac.il

**Dipartimento di Matematica Pura e Applicata, Università di Padova, Via Belzoni, 7, 35131 Padova, Italy.

***Department of Applied Mathematics and Statistics, State University of New York at Stony Brook, Stony Brook, N.Y. 11794-3600, USA.

¹⁾Работа поддержана грантами GNAFA/CNR (Italian National Research Council), NATO Collaborative Research Grant CRG 951275, а также грантом NSF DMS 9301200. Она была выполнена во время визита первого и третьего авторов на математический факультет Университета г. Падуа.

§ 1. Введение

1.1. Постановка задачи, формулировка основного результата. Теория оптимального управления диффузионными процессами имеет известную историю и в настоящее время хорошо развита. Ее главным инструментом является уравнение Беллмана, позволяющее находить теоретически ([2], [5], [7], [9]) и численно (см., например, [15]) оптимальные управления. В том случае, когда помеха задается не только винеровским процессом, а общим разрывным процессом с независимыми приращениями, уравнение Беллмана из нелинейного уравнения в частных производных второго порядка превращается в нелинейное интегродифференциальное уравнение (см. [18]). При общем характере помехи ситуация еще усложняется, поскольку управляемый процесс теряет марковское свойство даже при марковском характере управления. В последнем случае имеет смысл искать аппроксимирующую модель, которая сохраняет основные свойства первоначальной физической модели в том смысле, что оптимальное управление для аппроксимирующей модели, будучи примененным к физической модели, также является эффективным. В предшествующей статье [17] мы рассмотрели случай, когда физическая модель аппроксимируется детерминированной моделью. В настоящей статье нашей целью является аппроксимация диффузионной моделью. Здесь, следуя работам [11]–[13], мы рассматриваем физическую систему как один из элементов семейства подобных систем, индексированных малым параметром, причем при стремлении этого параметра к нулю существует «предельная» модель. При описании класса допредельных моделей мы руководствовались тем, чтобы охватить как можно более широкий класс физических систем таких, что «предельная» модель обслуживает и классическую линейно-квадратическую задачу управления. При описании допредельной ситуации мы вводим не только аддитивные помехи (широкополосные процессы и мартингалы), но и быстрые осцилляции, «загрязняющие» параметры модели, а также помехи, сингулярно возмущающие управляемый процесс (ср., например, с [3], [14] и с недавней работой [19]).

Более точно, мы рассматриваем параметризованное малым параметром ε семейство управляемых случайных процессов, динамика которых определяется стохастическим уравнением с фиксированным начальным условием $X_0^\varepsilon = x_0$:

$$\begin{aligned} dX_t^\varepsilon = & \left[a_0(t, X_t^\varepsilon, \xi_{t/\varepsilon}) + a_1(t, X_t^\varepsilon) u_t^\varepsilon \right] dt + b_0(t) [\varepsilon^{-1/2} \eta_{t/\varepsilon}] dt \\ & + b_1(t, X_{t-}^\varepsilon, \xi_{t/\varepsilon}) dM_t^\varepsilon. \end{aligned} \quad (1.1)$$

Здесь $\xi_{t/\varepsilon}$ — быстро осциллирующее возмущение, $\varepsilon^{-1/2} \eta_{t/\varepsilon}$ — аддитивный широкополосный шум, M_t^ε — мартингал, u_t^ε — процесс управления.

С управлением u^ε мы связываем цену

$$J^\varepsilon(u^\varepsilon) = \mathbf{E} \left\{ \int_0^T [p(t, X_t^\varepsilon) + q(t, u_t^\varepsilon)] dt + r(X_T^\varepsilon) \right\},$$

$$J_0^\varepsilon = \inf_{u^\varepsilon} J^\varepsilon(u^\varepsilon) \text{ (оптимальная цена),} \quad (1.2)$$

где $\inf$ берется по классу допустимых управлений (см. определение 2.1 в § 2).

Предельная динамика задается стохастическим уравнением с тем же начальным условием $X_0 = x_0$ и с параметрами, определяемыми допредельной динамикой:

$$dX_t = [A_0(t, X_t) + a_1(t, X_t) u_t] dt + B(t, X_t) dW_t, \quad (1.3)$$

здесь W_t — винеровский процесс, u_t — управление и

$$A_0(t, x) = \int a_0(t, x, y) \lambda(dy),$$

$$B^2(t, x) = \sigma_0^2 \int b_1^2(t, x, y) \lambda(dy) + \sigma_1^2 b_0^2(t), \quad (1.4)$$

где $\lambda(dy)$ — стационарное распределение процесса ξ_t , σ_0^2 — асимптотическая интенсивность квадратической вариации мартингала M_t^ε и $\sigma_1^2 = 2 \int_0^\infty \mathbf{E}(\eta_t \eta_0) dt$. Подобно допредельной, в предельной модели с каждым u_t связывается цена

$$J(u) = \mathbf{E} \left\{ \int_0^T [p(t, X_t) + q(t, u_t)] dt + r(X_T) \right\},$$

$$J_0 = \inf_u J(u) \text{ (оптимальная цена),} \quad (1.5)$$

где, как и ранее, $\inf$ берется по классу допустимых управлений.

Напомним несколько стандартных понятий и дадим определение асимптотической оптимальности, используемое в этой работе.

Начнем с определения обратной связи. Мы называем обратной связью управление $\hat{u}(t, x_{[0,t]})$ (с $\hat{u}(0, x_{[0,0]}) = \hat{u}(0, x_0)$), являющееся функцией времени t и траектории x_s до момента t , т.е. в случае предельной модели $u_t(\omega) = \hat{u}(t, X_{[0,t]}(\omega))$, где X_t — решение уравнения (1.3), и аналогично для допредельной модели $u_t^\varepsilon(\omega) = \hat{u}_t(X_{[0,t]}^\varepsilon(\omega))$ (во избежание сложных обозначений в дальнейшем символ ω опускается). Обратная связь называется липшицевой, если существует константа $L > 0$ такая, что для каждого $t \in [0, T]$ и всех траекторий из пространства Скорохода

$$|\hat{u}(t, x_{[0,t]})| \leq L \left(1 + \sup_{s \leq t} |x_s| \right) \quad \text{и}$$

$$|\hat{u}(t, x_{[0,t]}) - \hat{u}(t, \bar{x}_{[0,t]})| \leq L \sup_{s \leq t} |x_s - \bar{x}_s|. \quad (1.6)$$

Обратная связь называется марковской, если $\hat{u}(t, X_{[0,t]}) = \hat{u}(t, X_{t-})$.

Следующее понятие связано с δ -оптимальным управлением, т.е. с таким управлением, для которого

$$\begin{aligned} J^\varepsilon(u^{\varepsilon,\delta}) &\leq J_0^\varepsilon + \delta \quad (\text{допредельная модель}), \\ J(u^\delta) &\leq J_0 + \delta \quad (\text{предельная модель}), \end{aligned} \quad (1.7)$$

где δ — произвольная малая положительная величина.

Наконец, мы даем такое

Определение 1.1. Обратная связь $u(t, x_{[0,t]})$ называется асимптотически оптимальной (асимптотически δ -оптимальной), если

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} J^\varepsilon(u) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} J_0^\varepsilon \quad \left(\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} (J^\varepsilon(u) - J_0^\varepsilon) \leq \delta \right).$$

Следует отметить, что несмотря на зависимость от ε управления u_t^ε в допредельной модели, в данном определении используется одна и та же обратная связь $u(t, x_{[0,t]})$.

Основные результаты формулируются в двух теоремах, утверждения которых имеют место при выполнении условий из § 2.

Теорема 1.1. *Оптимальная цена J_0 является нижней границей для асимптотической нижней границы допредельной цены, т.е. $\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} J_0^\varepsilon \geq J_0$.*

Теорема 1.2. *Если существует оптимальная (δ -оптимальная) липшицева обратная связь для предельной модели, то эта же обратная связь является асимптотически оптимальной (δ -оптимальной). Утверждение остается верным в частном случае марковской обратной связи.*

1.2. Методология и связь с существующими результатами.

Общая методология определения асимптотически оптимального управления для заданного класса допредельных управляемых моделей является скорее стандартной. Она состоит в идентификации предельной модели. Техника слабой сходимости случайных процессов используется для того, чтобы показать сходимость случайной пары $(X_t^\varepsilon, \int_0^t u_s^\varepsilon ds)$ к предельной паре $(X_t, \int_0^t u_s ds)$ и установить структуру предельной модели, в которой X_t — управляемый процесс и u_t — управление, связанные стохастическим дифференциальным уравнением. Более того, эта же техника при выполнении условий равномерной интегрируемости влечет за собой сходимость допредельной цены к предельной. Все эти результаты позволяют проверять асимптотическую оптимальность (δ -оптимальность) управления, полученного с помощью предельной модели. Несмотря на логическую простоту проверка асимптотической оптимальности использует сложный аппарат. Основная проблема связана с расширением класса допредельных моделей, допускающих асимптотическую оптимальность. В общей формулировке данная проблема активно изучалась в работах Кушнера и его соавторов. Здесь мы должны

упоминать книгу [11] и статьи [12], [13], в которых во избежание технических трудностей используются ограничительные условия.

В настоящей работе мы преследуем ту же цель, применяя другую методологию, что позволяет нам существенно расширить класс допредельных моделей:

- допускаются неограниченные управления и неограниченная плата за управляемый процесс и управление;

- структура управлений, минимизирующих цену, может изменяться вместе с ε (в этом контексте см. замечание к теореме 8.1 в [13], где такая возможность исключается);

- при применении техники слабой сходимости не обязательным является использование только рандомизированного управления, см. [6];

- не только широкополосные процессы, но и разрывные мартингалы общего вида допускаются в качестве помех;

- допускаются сингулярные (ср., например, с [3]) и загрязняющие возмущения.

Мы хотим отметить наконец, что несмотря на схожесть постановок задач с [11], [12] и [13], наши результаты не следуют из них. Мы изучаем другие модели, при других условиях и другими методами.

1.3. Содержание статьи. Статья имеет следующую структуру. В § 2 приводятся условия на динамику модели, цену и помехи. Доказательства двух основных результатов, сформулированных во введении, даются в § 6. Эти доказательства используют ряд вспомогательных результатов, сформулированных и доказанных в § 3, 4 и 5, при этом все технические детали доказательств отнесены в § 7. Заметим, что приведенные в §§ 3–5 вспомогательные результаты представляют самостоятельный интерес. В частности в п. 4.2, приводится доказательство существования оптимальной обратной связи для предельной модели, а в п. 4.3 даются условия существования δ -оптимальной липшицевой и марковской обратной связи в предельной модели.

§ 2. Основные предположения и обозначения

Для общей константы используется обозначение ℓ . Для случайной величины ζ и $p \geq 1$ используется обозначение $\|\zeta\|_p = (\mathbf{E}|\zeta|^p)^{1/p}$.

При каждом $\varepsilon \in (0, 1]$ случайные процессы $\xi_{t/\varepsilon}$, $\eta_{t/\varepsilon}$ и мартингал M_t^ε предполагаются заданными на стохастическом базисе $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t^\varepsilon)_{t \geq 0}, \mathbf{P})$, удовлетворяющем общим условиям (см., например, [8] или [16]).

Условия на функции, участвующие в описании динамики допредельной модели, приводятся ниже.

(A.1) $a_0(t, x, y)$, $a_1(t, x)$, $b_1(t, x, y)$ — непрерывные функции, $b_0(t)$ — непрерывно дифференцируемая функция.

$$(A.2) \quad |a_1(t, x)| \leq \ell, \quad |a_0(t, x, y)|, \quad |b_1(t, x, y)| \leq \ell(1 + |x|) \text{ и} \\ |a_0(t, x, y) - a_0(t, x', y)| + |b_1(t, x, y) - b_1(t, x', y)| \\ + |a_1(t, x) - a_1(t, x')| \leq \ell|x - x'|.$$

(B.1) $q(t, u)$ — неотрицательная, непрерывная и выпуклая по u функция. Существуют константы $L, \gamma, \zeta > 0$ такие, что $L(1 + |u|^\zeta) \geq q(t, u) \geq \ell|u|^{1+\gamma}$.

(B.2) $p(t, x)$ и $r(x)$ — непрерывные неотрицательные функции. Существует константа $\gamma_1 > 0$ такая, что $p(t, x), r(x) \leq \ell(1 + |x|^{\gamma_1})$.

(C.1) Квадратическая характеристика $\langle M^\epsilon \rangle_t$ мартингала M_t^ϵ имеет плотность: $d\langle M^\epsilon \rangle_t = m_t^\epsilon dt$ с $m_t^\epsilon \leq \ell$; мера скачков мартингала M_t^ϵ характеризуется компенсатором $\nu^\epsilon(dt, dz) = K^\epsilon(t, dz) dt$ с $\sup_{t \leq T} \int |z|^{2n^*} K^\epsilon(t, dz) \leq \ell$, где n^* — наименьшее целое число, превышающее $1 + (1 \vee \gamma_1 \vee \zeta)$ (величины γ_1 и ζ те же, что и в (B.1), (B.2)).

(i) Существует константа $\sigma_0^2 > 0$ такая, что $\mathbf{P}\text{-}\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_0^T |m_s^\epsilon - \sigma_0^2| ds \rightarrow 0$.

(ii) $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \mathbf{E} \int_0^T \int_{\mathbf{R}} z^2 I(|z| > \alpha) K^\epsilon(t, dz) dt = 0$ для каждого $\alpha > 0$.

(C.2) (i) $(\eta_t)_{t \in \mathbf{R}}$ — стационарный в узком смысле эргодический процесс, $\mathbf{E}\eta_0 = 0$, и $\|\eta_0\|_{2n^*} < \infty$ для n^* из (C.1).

(ii) Процесс η_t удовлетворяет условию слабой зависимости:

$$\int_0^\infty \left\| \mathbf{E}\{\eta_t | \eta_s, s \leq 0\} \right\|_{2n^*} dt < \infty.$$

(C.3) ξ_t — эргодический процесс: существует вероятностная мера $\lambda(dz)$ на $\mathbf{R}$ такая, что для любой ограниченной и непрерывной функции $f(z)$

$$\mathbf{P}\text{-}\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_0^t f(\xi_{s/\epsilon}) ds = t \int_{\mathbf{R}} f(z) \lambda(dz).$$

(C.4) При каждом $\epsilon > 0$ M_t^ϵ и $\xi_{t/\epsilon}$ являются G_t^ϵ -измеримыми, где $(G_t^\epsilon)_{t \geq 0}$ — такое семейство σ -алгебр, что $\mathcal{F}_t^\epsilon = G_t^\epsilon \vee \mathcal{F}_{t/\epsilon}^\eta$ и процесс (η_t) не зависит от $(G_t^\epsilon)_{t \geq 0}$.

Одной из главных деталей настоящей статьи является диффузионная аппроксимация для управляемого процесса X_t^ϵ . Это означает, что предельный управляемый процесс X_t не задается на предписанном заранее стохастическом базисе и трактуется как слабое решение уравнения (1.3). Последнее означает, что вместо фиксированного стохастического базиса мы рассматриваем стохастические базисы $(\Omega', \mathcal{F}', (\mathcal{F}')_{t \geq 0}, \mathbf{P}')$ с винеровским процессом W_t' относительно $(\mathcal{F}')_{t \geq 0}$ и $(\mathcal{F}')_{t \geq 0}$ -согласованным процессом управления u_t' , при этом при определении цены в (1.5) математическое ожидание берется по мере $\mathbf{P}'$.

О п р е д е л е н и е 2.1. $(\mathcal{F}_t^\varepsilon)_{t \geq 0}$ -согласованный процесс $u_t^\varepsilon ((\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ -согласованный процесс u_t), $0 \leq t \leq T$, является допустимым, если п.н.

$$\int_0^T |u_s^\varepsilon| ds < \infty \quad \left(\int_0^T |u_s| ds < \infty \right).$$

В настоящей статье слово «управление» является синонимом допустимого управления.

§ 3. Допредельная модель. Относительная компактность

Допустимое управление u_t^ε , участвующее в (1.1), порождает два процесса:

$$U_t^{\pm, \varepsilon} = \int_0^t u_s^{\pm, \varepsilon} ds,$$

где $u_t^{+, \varepsilon} = 0 \vee u_t^\varepsilon$ и $u_t^{-, \varepsilon} = -[0 \wedge u_t^\varepsilon]$, и, тем самым, (1.1) может быть задано в виде:

$$\begin{aligned} dX_t^\varepsilon = & a_0(t, X_t^\varepsilon, \xi_{t/\varepsilon}) dt + a_1(t, X_t^\varepsilon) dU_t^{+, \varepsilon} - a_1(t, X_t^\varepsilon) dU_t^{-, \varepsilon} \\ & + b_0(t) \varepsilon^{-1/2} \eta_{t/\varepsilon} dt + b_1(t, X_{t-}^\varepsilon, \xi_{t/\varepsilon}) dM_t^\varepsilon. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Триплет $(X^\varepsilon, U^{\pm, \varepsilon}) = (X_t^\varepsilon, U_t^{\pm, \varepsilon})_{t \leq T}$ принимает значения в метрическом пространстве $(\mathbf{D}_{[0, T]} \times (\mathbf{C}_{[0, T]}^+)^2, d \times \rho^2)$, где d — скороходовская и ρ — равномерная метрики, $\mathbf{C}_{[0, T]}^+$ — подпространство неубывающих функций из $\mathbf{C}_{[0, T]}$.

Теорема 3.1. Пусть выполнены условия из § 2 и, кроме того,

$$\sup_{\varepsilon} \mathbf{E} \int_0^T q(t, u_t^\varepsilon) dt < \infty. \quad (3.2)$$

Тогда семейство $(X^\varepsilon, U^{\pm, \varepsilon}), \varepsilon \in (0, 1)$, является относительно компактным в метрическом пространстве $(\mathbf{D}_{[0, T]} \times (\mathbf{C}_{[0, T]}^+)^2, d \times \rho^2)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу теоремы Прохорова достаточно установить плотность этого семейства. Поскольку $\mathbf{C}_{[0, T]}^+$ — замкнутое подмножество в метрике ρ , для проверки плотности семейства $U^{\pm, \varepsilon}$ применим теорему 15.2 из [4]:

$$\begin{aligned} \lim_{c \rightarrow \infty} \left[\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbf{P} \left\{ U_T^{\pm, \varepsilon} \geq c \right\} \right] &= 0, \\ \lim_{\delta \rightarrow 0} \left[\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbf{P} \left\{ \sup_{s, t \leq T: |t-s| \leq \delta} |U_t^{\pm, \varepsilon} - U_s^{\pm, \varepsilon}| \geq \nu \right\} \right] &= 0, \quad \forall \nu > 0. \end{aligned} \quad (3.3)$$

При проверке плотности семейства X^ε используются достаточные условия Альдуса (см. [1] или, например, гл. 6, § 3 в [16]):

$$\begin{aligned} \lim_{c \rightarrow \infty} \left[\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbf{P} \left\{ \sup_{t \leq T} |X_t^\varepsilon| \geq c \right\} \right] &= 0, \\ \lim_{\delta \rightarrow 0} \left\{ \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\sup_{\tau < T} \mathbf{P} \left\{ \sup_{t \leq \delta} |X_{\tau+t}^\varepsilon - X_\tau^\varepsilon| \geq \nu \right\} \right] \right\} &= 0, \quad \forall \nu > 0, \end{aligned} \quad (3.4)$$

с $(\mathcal{F}_t^\varepsilon)_{t \geq 0}$ -моментом остановки τ .

С учетом (В.1) и (3.2) оба условия в (3.3) проверяются с помощью неравенств Чебышева и Гёльдера (с γ из (В.1)):

$$\mathbf{P}\{U_T^{\pm, \varepsilon} > c\} \leq \frac{1}{c} \mathbf{E} \int_0^T |u_t^{\pm, \varepsilon}| dt \leq \frac{T\gamma/(1+\gamma)}{c} \sup_{\varepsilon} \left(\mathbf{E} \int_0^T |u_t^{\pm, \varepsilon}|^{1+\gamma} dt \right)^{1/(1+\gamma)}$$

и (при $t > s$)

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\left\{ \sup_{t, s \leq T: t-s \leq \delta} [U_t^{\pm, \varepsilon} - U_s^{\pm, \varepsilon}] > \nu \right\} &\leq \frac{1}{\nu} \mathbf{E} \sup_{t, s \leq T: t-s \leq \delta} \int_s^t |u_{t'}^{\pm, \varepsilon}| dt' \\ &\leq \frac{\delta\gamma/(1+\gamma)}{\nu} \sup_{\varepsilon} \left(\mathbf{E} \int_0^T |u_t^{\pm, \varepsilon}|^{1+\gamma} dt \right)^{1/(1+\gamma)}. \end{aligned}$$

Следовательно, (3.3) вытекает из (В.1).

Установим теперь первое равенство в (3.4). Для этого введем следующие процессы:

$$|U_t^{\varepsilon}| = U_t^{+, \varepsilon} + U_t^{-, \varepsilon}, \quad \mathcal{S}_t^{\varepsilon} = \int_0^t b_0(s) \varepsilon^{-1/2} \eta_{s/\varepsilon} ds,$$

$$\mathcal{M}_t^{\varepsilon} = \int_0^t b_1(s, X_{s-}^{\varepsilon}, \xi_{s/\varepsilon}) dM_s^{\varepsilon},$$

и положим $X_t^{\varepsilon, *} = \sup_{t' \leq t} |X_{t'}^{\varepsilon}|$, $\mathcal{S}_t^{\varepsilon, *} = \sup_{t' \leq t} |\mathcal{S}_{t'}^{\varepsilon}|$, $\mathcal{M}_t^{\varepsilon, *} = \sup_{t' \leq t} |\mathcal{M}_{t'}^{\varepsilon}|$. Принимая во внимание условия (А.1) и (А.2), находим

$$X_t^{\varepsilon, *} \leq \ell \left(1 + \int_0^t X_s^{\varepsilon, *} ds + |U_t^{\varepsilon}| + \mathcal{S}_t^{\varepsilon, *} + \mathcal{M}_t^{\varepsilon, *} \right)$$

и, в силу неравенства Гронуолла–Беллмана, получаем $X_t^{\varepsilon, *} \leq \ell(1 + |U_t^{\varepsilon}| + \mathcal{S}_t^{\varepsilon, *} + \mathcal{M}_t^{\varepsilon, *})$. Обозначим $X_t^{N, \varepsilon, *} = X_t^{\varepsilon, *} I(|U_t^{\varepsilon}| \leq N)$ и заметим, что

$$X_t^{N, \varepsilon, *} \leq \ell \left(1 + N + \mathcal{S}_t^{\varepsilon, *} + \sup_{t' \leq t} \left| \int_0^{t'} I(|U_s^{\varepsilon}| \leq N) d\mathcal{M}_s^{\varepsilon} \right| \right).$$

Отсюда $(X_t^{N, \varepsilon, *})^2 \leq \ell(1 + N^2 + (\mathcal{S}_t^{\varepsilon, *})^2 + \sup_{t' \leq t} \left| \int_0^{t'} I(|U_s^{\varepsilon}| \leq N) d\mathcal{M}_s^{\varepsilon} \right|^2)$. Используя неравенство Дуба (см. теорему 1.9.1 в [16]), получаем $\mathbf{E} \sup_{t' \leq t} \left| \int_0^{t'} I(|U_s^{\varepsilon}| \leq N) d\mathcal{M}_s^{\varepsilon} \right|^2 \leq 4 \int_0^t I(|U_s^{\varepsilon}| \leq N) d\langle \mathcal{M}^{\varepsilon} \rangle_s$, что в свою очередь приводит к неравенству

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(X_t^{N, \varepsilon, *})^2 &\leq \ell \left(1 + N^2 + \mathbf{E}(\mathcal{S}_T^{\varepsilon, *})^2 \right. \\ &\quad \left. + \mathbf{E} \int_0^t I(|U_s^{\varepsilon}| \leq N) d\langle \mathcal{M}^{\varepsilon} \rangle_s \right), \quad t \leq T. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Принимая во внимание, что $d\langle \mathcal{M}^{\varepsilon} \rangle_s = b_1^2(t, X_{t-}^{\varepsilon}, \xi_{t/\varepsilon}) m_s^{\varepsilon} ds$ (см. определение M_s^{ε} и (С.1)), оценим сверху последний член в правой части (3.5). В силу условия (А.2)

$$\mathbf{E} \int_0^t I(|U_s^{\varepsilon}| \leq N) d\langle \mathcal{M}^{\varepsilon} \rangle_s \leq \ell \int_0^t (1 + \mathbf{E}(X_s^{N, \varepsilon, *})^2) ds,$$

и, следовательно, учитывая все полученные ранее оценки, приходим к

$$\mathbf{E}(X_t^{N, \varepsilon, *})^2 \leq \ell \left(1 + N^2 + \mathbf{E}(\mathcal{S}_T^{\varepsilon, *})^2 + \int_0^t \mathbf{E}(X_s^{N, \varepsilon, *})^2 ds \right), \quad t \leq T.$$

По неравенству Гронуолла–Беллмана $\mathbf{E}(X_T^{N,\varepsilon,*})^2 \leq \ell(1 + N^2 + \mathbf{E}(\mathcal{S}_T^{\varepsilon,*})^2) e^{\ell T}$. Далее, при доказательстве теоремы 5.1 (§ 5) устанавливается, что $\sup_{\varepsilon} \mathbf{E}(\mathcal{S}_T^{\varepsilon,*})^{2n^*} < \infty$, где $n^* \geq 1$. Следовательно, существует константа L такая, что $\sup_{\varepsilon} \mathbf{E}(\mathcal{S}_T^{\varepsilon,*})^2 \leq L$, и, значит, можно заключить, что

$$\sup_{\varepsilon} \mathbf{E}(X_T^{N,\varepsilon,*})^2 \leq \ell(1 + N^2 + L) e^{\ell T}.$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{X_T^{\varepsilon,*} > c\} &\leq \mathbf{P}\{X_T^{N,\varepsilon,*} > c\} + \mathbf{P}\{|U_T^{\varepsilon}| > N\} \\ &\leq \frac{\ell(1 + N^2 + L)e^{\ell T}}{c^2} + \mathbf{P}\{|U_T^{\varepsilon}| > N\} \\ &\rightarrow \mathbf{P}\{|U_T^{\varepsilon}| > N\}, \quad c \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Поэтому первое равенство в (3.4) вытекает из уже доказанного первого равенства в (3.3). Для того, чтобы проверить второе равенство в (3.4), наряду с $\mathcal{S}_t^{\varepsilon}$ и $\mathcal{M}_t^{\varepsilon}$ введем

$$\mathcal{A}_t^{\varepsilon} = \int_0^t a_0(s, X_s^{\varepsilon}, \xi_{s/\varepsilon}) ds, \quad \mathcal{U}_t^{\pm, \varepsilon} = \int_0^t a_1(s, X_s^{\varepsilon}) dU_s^{\pm, \varepsilon}$$

и заметим, что поскольку $X_t^{\varepsilon} = x + \mathcal{A}_t^{\varepsilon} + \mathcal{U}_t^{+, \varepsilon} - \mathcal{U}_t^{-, \varepsilon} + \mathcal{S}_t^{\varepsilon} + \mathcal{M}_t^{\varepsilon}$, достаточно проверить лишь вторую часть в (3.4) для каждого члена, за исключением первого, в правой части последнего равенства. Пусть Z_t^{ε} обозначает любой из пяти упомянутых членов. Для упрощения проверки равенства $\lim_{\delta \rightarrow 0} [\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} (\sup_{\tau < T} \mathbf{P}\{\sup_{t \leq \delta} |Z_{\tau+t}^{\varepsilon} - Z_{\tau}^{\varepsilon}| > \nu\})] = 0$ используем уже установленную первую часть в (3.4). Тогда только

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \left\{ \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\sup_{\tau < T} \mathbf{P}\left\{ I\left(\sup_{t \leq T} |X_t^{\varepsilon}| \leq N\right) \sup_{t' \leq \delta} |Z_{\tau+t'}^{\varepsilon} - Z_{\tau}^{\varepsilon}| > \nu \right\} \right] \right\} = 0 \quad (3.6)$$

требует проверки для каждого $N > 0$.

1. $Z_t^{\varepsilon} \equiv \mathcal{A}_t^{\varepsilon}$. В силу условий (A.2) и (C.1) существует общая константа $\ell(N)$, не зависящая от t и ε , такая, что $I(\sup_{t \leq T} |X_t^{\varepsilon}| \leq N) \times \sup_{t' \leq \delta} |Z_{\tau+t'}^{\varepsilon} - Z_{\tau}^{\varepsilon}| \leq \ell(N) \delta$. Следовательно, (3.6) имеет место.

2. $Z_t^{\varepsilon} \equiv \mathcal{U}_t^{\pm, \varepsilon}$. Тогда $I(\sup_{t \leq T} |X_t^{\varepsilon}| \leq N) \sup_{t' \leq \delta} |Z_{\tau+t'}^{\varepsilon} - Z_{\tau}^{\varepsilon}| \leq \sup_{t' \leq \delta} |U_{\tau+t'}^{\pm, \varepsilon} - U_{\tau}^{\pm, \varepsilon}|$ и, значит, (3.6) вытекает из второй части (3.3).

3. $Z_t^{\varepsilon} \equiv \mathcal{S}_t^{\varepsilon}$. Используя разложение $\eta_{s/\varepsilon} ds = dS_{s/\varepsilon} - d\Psi_{s/\varepsilon}$ (см. п. 1) в лемме 7.5), мы приходим к $\mathcal{S}_t^{\varepsilon} = \mathcal{S}_t^{S, \varepsilon} - \mathcal{S}_t^{\Psi, \varepsilon}$ с

$$\mathcal{S}_t^{S, \varepsilon} = \int_0^t b_0(s) \varepsilon^{-1/2} dS_{s/\varepsilon}, \quad \mathcal{S}_t^{\Psi, \varepsilon} = \int_0^t b_0(s) \varepsilon^{-1/2} d\Psi_{s/\varepsilon},$$

для которых справедливость (3.6) обсуждается ниже в пп. 4 и 5.

4. $Z_t^{\varepsilon} \equiv \mathcal{S}_t^{S, \varepsilon}$. В этом случае используется оценка

$$I\left(\sup_{t \leq T} |X_t^{\varepsilon}| \leq N\right) \sup_{t' \leq \delta} |Z_{\tau+t'}^{\varepsilon} - Z_{\tau}^{\varepsilon}| \leq 2 \sup_{t' \leq T} |\mathcal{S}_{t'}^{S, \varepsilon}|$$

и тот факт, что $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^{-1} \mathbf{E} \sup_{t' \leq T} (S_{t'/\varepsilon})^2 = 0$ (см. п. 1) в приводимой ниже лемме 7.5), который в силу непрерывной дифференцируемости

функции $b_0(s)$ (см. (А.1)) влечет за собой $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbf{E} \sup_{t' \leq T} (\mathcal{S}_{t'}^{S, \varepsilon})^2 = 0$ и, следовательно,

$$\mathbf{P} \left\{ \sup_{t' \leq T} |\mathcal{S}_{t'}^{S, \varepsilon}| \geq \nu \right\} \leq \nu^{-2} \mathbf{E} \sup_{t' \leq T} (\mathcal{S}_{t'}^{S, \varepsilon})^2 \rightarrow 0, \quad \varepsilon \rightarrow 0.$$

5. $Z_t^\varepsilon \equiv \mathcal{S}_t^{\Psi, \varepsilon}$. Тогда $I(\sup_{t \leq T} |X_t^\varepsilon| \leq N) \sup_{t' \leq \delta} |Z_{\tau+t'}^\varepsilon - Z_\tau^\varepsilon| \leq \sup_{t' \leq \delta} |\mathcal{S}_{\tau+t'}^{\Psi, \varepsilon} - \mathcal{S}_\tau^{\Psi, \varepsilon}|$, а $\mathcal{S}_t^{\Psi, \varepsilon}$ является $(\mathcal{F}_t^\varepsilon)_{t \geq 0}$ -квадратично интегрируемым мартингалом с квадратической вариацией

$$\langle \mathcal{S}^{\Psi, \varepsilon} \rangle_t = \int_0^t b_0^2(s) \varepsilon^{-1} d\langle \Psi \rangle_{s/\varepsilon}.$$

Хорошо известно (см., например, гл. 4, § 7 в [16]), что процесс $(\mathcal{S}_{\tau+t'}^{\Psi, \varepsilon} - \mathcal{S}_\tau^{\Psi, \varepsilon})_{t' \geq 0}$ остается $(\mathcal{F}_{\tau+t'}^\varepsilon)_{t' \geq 0}$ -квадратично интегрируемым мартингалом с квадратической характеристикой $\int_\tau^{\tau+t'} b_0^2(s) \varepsilon^{-1} d\langle \Psi \rangle_{s/\varepsilon}$. Последнее замечание позволяет применить неравенство Ленгляра-Реболledo (см. гл. 1, § 9 в [16]): для каждого $\beta, \nu > 0$

$$\mathbf{P} \left\{ \sup_{t' \leq \delta} |\mathcal{S}_{\tau+t'}^{\Psi, \varepsilon} - \mathcal{S}_\tau^{\Psi, \varepsilon}| \geq \nu \right\} \leq \frac{\beta}{\nu^2} + \mathbf{P} \left\{ \int_\tau^{\tau+\delta} b_0^2(s) \varepsilon^{-1} d\langle \Psi \rangle_{s/\varepsilon} \geq \beta \right\}.$$

В силу (А.1) функция $b_0^2(s)$ ограничена на $[0, T]$. Поэтому (σ_1^2) взята из леммы 7.5)

$$\begin{aligned} \int_\tau^{\tau+\delta} b_0^2(s) \varepsilon^{-1} d\langle \Psi \rangle_{s/\varepsilon} &\leq \ell \varepsilon^{-1} [\langle \Psi \rangle_{(\tau+\delta)/\varepsilon} - \langle \Psi \rangle_{\tau/\varepsilon}] \\ &\leq \ell \sigma_1^2 \delta + 2\ell \sup_{t' \leq T} |\varepsilon^{-1} \langle \Psi \rangle_{t'/\varepsilon} - \sigma_1^2 t'|. \end{aligned}$$

В силу утверждения 3) леммы 7.5 для каждого t' имеет место $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^{-1} \langle \Psi \rangle_{t'/\varepsilon} = \sigma_1^2 t'$ Р-п.н. Значит, по теореме Пойя $\sup_{t' \leq T} |\varepsilon^{-1} \langle \Psi \rangle_{t'/\varepsilon} - \sigma_1^2 t'|$ сходится к нулю Р-п.н. при $\varepsilon \rightarrow 0$ (см., например, задачу 5.3.2 в [16]). Поэтому для каждого $\beta > 0$ имеет место соотношение $\lim_{\delta \rightarrow 0} \{\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} [\sup_{\tau < T} \mathbf{P} \{ \sup_{t' \leq \delta} |\mathcal{S}_{\tau+t'}^{\Psi, \varepsilon} - \mathcal{S}_\tau^{\Psi, \varepsilon}| \geq \nu \}]\} \leq \beta/\nu^2$, которое в силу произвольности β гарантирует требуемое свойство.

6. $Z_t^\varepsilon \equiv \mathcal{M}_t^\varepsilon$. Поскольку $\mathcal{M}_t^\varepsilon$ — мартингал и, кроме того, п.н.

$$I\left(\sup_{t \leq T} |X_t^\varepsilon| \leq N\right) \mathcal{M}_t^\varepsilon = I\left(\sup_{t \leq T} |X_t^\varepsilon| \leq N\right) \int_0^t I\left(\sup_{s' < s} |X_{s'}^\varepsilon| \leq N\right) d\mathcal{M}_s^\varepsilon,$$

то можно использовать оценку

$$I\left(\sup_{t \leq T} |X_t^\varepsilon| \leq N\right) \sup_{t' \leq \delta} |\mathcal{M}_{\tau+t'}^\varepsilon - \mathcal{M}_\tau^\varepsilon| \leq \sup_{t' \leq \delta} \left| \int_\tau^{\tau+t'} I\left(\sup_{s' < s} |X_{s'}^\varepsilon| \leq N\right) d\mathcal{M}_s^\varepsilon \right|.$$

Процесс

$$\int_\tau^{\tau+t'} I\left(\sup_{s' < s} |X_{s'}^\varepsilon| \leq N\right) d\mathcal{M}_s^\varepsilon, \quad t' \geq 0,$$

является $(\mathcal{F}_{\tau+t'})_{t' \geq 0}$ -квадратично интегрируемым мартингалом, и снова применимо неравенство Ленгляра–Реболledo: для каждого $\beta, \nu > 0$

$$\begin{aligned} & \mathbf{P} \left\{ \sup_{t' \leq \delta} \left| \int_{\tau}^{\tau+t'} I \left(\sup_{s' < s} |X_{s'}^{\varepsilon}| \leq N \right) d\mathcal{M}_s^{\varepsilon} \right| \geq \nu \right\} \\ & \leq \frac{\beta}{\nu^2} + \mathbf{P} \left\{ \int_{\tau}^{\tau+\delta} I \left(\sup_{s' < s} |X_{s'}^{\varepsilon}| \leq N \right) d\langle \mathcal{M}^{\varepsilon} \rangle_s \geq \beta \right\}. \end{aligned}$$

С другой стороны, в силу условий (A.2) и (C.1) существует константа $\ell(N)$, не зависящая от t, ε и зависящая от N такая, что $I(\sup_{s' < s} |X_{s'}^{\varepsilon}| \leq N) d\langle \mathcal{M}^{\varepsilon} \rangle_s \leq \ell(N) ds$. Отсюда

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \left\{ \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\sup_{\tau \leq T} \mathbf{P} \left\{ \sup_{t' \leq \delta} \left| \int_{\tau}^{\tau+t'} I \left(\sup_{s' < s} |X_{s'}^{\varepsilon}| \leq N \right) d\mathcal{M}_s^{\varepsilon} \right| \geq \nu \right\} \right] \right\} \leq \frac{\beta}{\nu^2}.$$

Таким образом, требуемое утверждение справедливо в силу произвольности β .

§ 4. Предельная модель

4.1. Обратная связь. По теореме 3.1 семейство $(X^{\varepsilon}, U^{\pm, \varepsilon})$ относительно компактно. Мы покажем теперь, что каждой предельной точке $(X, U^{\pm})$ этого семейства можно поставить в соответствие уравнение Ито. Пусть Q^k и Q -вероятностные меры на $\mathbf{D}_{[0, T]} \times (\mathbf{C}_{[0, T]}^+)^2$, являющиеся распределениями $(X^{\varepsilon_k}, U^{\pm, \varepsilon_k})$ и $(X, U^{\pm})$ соответственно. Слабая сходимость $(X^{\varepsilon_k}, U^{\pm, \varepsilon_k})$ к $(X, U^{\pm})$ есть не что иное, как $Q^k \xrightarrow{w} Q$ в метрике $d \times \rho^2$. Обозначим Q^X сужение меры Q на σ -алгебру $\mathcal{F}^X$, порожденную каноническим потоком σ -алгебр на $\mathbf{C}_{[0, T]}$: $\mathcal{F}_t^X = \sigma\{X_s, s \leq t\}$, $t \leq T$. Определим также стохастический базис $(\mathbf{C}_{[0, T]}, \mathcal{B}^{Q^X}, (\mathcal{F}_t^{Q^X})_{t \leq T}, Q^X)$ (здесь и далее $\mathcal{B}^{Q^X}$, $\mathcal{F}_t^{Q^X}$ -пополнения σ -алгебр $\mathcal{B}$, $\mathcal{F}_t^X$ относительно меры Q^X).

Теорема 4.1. Пусть выполнены условия из § 2 и $Q^k \xrightarrow{w} Q$. Тогда найдутся $(\mathcal{F}_t^{Q^X})_{t \geq 0}$ -адаптированный процесс $\bar{u}_t$ с $\int_0^T |\bar{u}_t| dt < \infty$, Q^X -н.н., и $(\mathcal{F}_t^{Q^X})_{t \geq 0}$ -винеровский процесс W_t^X такие, что процесс $(X_t)_{t \leq T}$ является решением уравнения Ито (в случае вырождения $B^2(t, x)$ исходный стохастический базис заменяется на расширенный)

$$dX_t = \left[A_0(t, X_t) + a_1(t, X_t) \bar{u}_t \right] dt + B(t, X_t) dW_t^X, \quad (4.1)$$

где $B(t, x) = \sqrt{B^2(t, x)}$, $A_0(t, x)$ и $B^2(t, x)$ определяются в (1.4).

З а м е ч а н и е 1. Отметим, что управление $\bar{u}_t$ является $(\mathcal{F}_t^{Q^X})_{t \geq 0}$ -адаптированным, т.е. обратной связью.

Следствие 1. Если $\sup_{\epsilon_k} \mathbf{E} \int_0^T q(t, u_t^{\epsilon_k}) dt < \infty$, то

$$\mathbf{E} \int_0^T |\bar{u}_t|^{1+\gamma} dt < \infty \quad u$$

$$\liminf_{\epsilon_k} \mathbf{E} \int_0^T q(t, u_t^{\epsilon_k}) dt \geq \mathbf{E} \int_0^T q(t, \bar{u}_t) dt.$$

Доказательство теоремы 4.1. Покажем, что $(X, U^\pm)$ можно задать на стохастическом базисе $(\tilde{\Omega}, \mathcal{B}_{\tilde{\Omega}}, (\mathcal{F}_t^Q)_{t \geq 0}, Q)$, где $\tilde{\Omega} = C_{[0, T]} \times (C_{[0, T]}^+)^2$. Для этого достаточно проверить, что $Q(\sup_{s \leq T} |\Delta X_s| > 0) = 0$. Применим теорему 5.5.1 из [16] (см. замечание к ней). В силу этой теоремы требуемое утверждение имеет место, если $\mathbf{P}\text{-}\lim_k \sum_{s \leq T} I(|\Delta X_s^{\epsilon_k}| > \alpha) = 0, \forall \alpha > 0$. В силу (A.2) $|\Delta X_s^{\epsilon_k}| \leq \ell(1 + (X_T^{\epsilon_k})^*) |\Delta M_s^{\epsilon_k}|$, и, значит, достаточно проверить условие теоремы 5.5.1 только для $|\Delta M_s^{\epsilon_k}|$. Последнее гарантируется условием (C.1) и очевидным неравенством

$$\sum_{s \leq T} I(|\Delta M_s^{\epsilon_k}| > \alpha) \leq \mathbf{E} \frac{1}{\alpha^2} \sum_{s \leq T} |\Delta M_s^{\epsilon_k}|^2 I(|\Delta M_s^{\epsilon_k}| > \alpha).$$

Следующий шаг в доказательстве теоремы состоит в проверке того факта, что непрерывный случайный процесс $(u_s = d(U_s^+ - U_s^-)/ds, \text{ см. лемму 7.2})$

$$M_t = X_t - x_0 - \int_0^t [A_0(s, X_s) + a_1(s, X_s) u_s] ds \quad (4.2)$$

является Q^X -мартингалом с квадратической вариацией $\langle M \rangle_t = \int_0^t B^2(s, X_s) ds$ или, что эквивалентно, $\Phi_t = M_t^2 - \int_0^t B^2(s, X_s) ds$ — мартингал. Отметим, что M_t и Φ_t являются функциями аргументов X, U^+, U^- , т.е. $M_t \equiv M_t(X, U^\pm)$ и $\Phi_t \equiv \Phi_t(X, U^\pm)$. Покажем сначала, что $M_t(X, U^\pm)$ и $\Phi_t(X, U^\pm)$ являются непрерывными функциями (равномерно по $t \leq T$) в метрике ρ^3 , а затем будем использовать свойства слабой сходимости. Пусть $(X^n, U^{\pm, n})$ — сходящаяся (равномерно на $[0, T]$) последовательность с пределом $(X^0, U^{\pm, 0})$. Используя очевидную верхнюю границу

$$\sup_{t \leq T} |M_t(X^n, U^{\pm, n}) - M_t(X^0, U^{\pm, 0})| \leq \ell \sup_{t \leq T} |X_t^n - X_t^0|$$

$$+ \sup_{t \leq T} \left| \int_0^t a_1(s, X_s^n) d(U_s^{+, n} - U_s^{-, n}) - \int_0^t a_1(s, X_s^0) d(U_s^{+, 0} - U_s^{-, 0}) \right|$$

и лемму 7.3, получаем

$$\limsup_n \sup_{t \leq T} |M_t(X^n, U^{\pm, n}) - M_t(X^0, U^{\pm, 0})| = 0.$$

Аналогичное соотношение имеет место для $\Phi_t(X^n, U^{\pm, n})$. Поскольку $M_t(X, U^\pm)$, $\Phi_t(X, U^\pm)$ неограничены, прямое применение результатов слабой сходимости проблематично. Чтобы избежать трудностей такого

рода, применим технику локализации. Выберем возрастающую последовательность $(\mathcal{F}_t^Q)_{t \geq 0}$ -моментов остановки ($\inf\{\emptyset\} = \infty$)

$$\tau_n(X, U^\pm) = \inf \left\{ t \leq T: |X_t| + U_t^+ + U_t^- + t \geq n \right\}, \quad n \geq 1.$$

Поскольку $\Theta_t(X, U^\pm) := \sup_{s \leq t} |X_s| + U_t^+ + U_t^-$ — непрерывная (равномерно по $t \leq T$) функция аргументов X, U^+, U^- и, кроме того, $\Theta(X, U^\pm) + t$ строго возрастает по t , функция $\tau_n(X, U^\pm)$, будучи обратной к $\Theta_t(X, U^\pm) + t$, непрерывна в той же метрике (см., например, теорему 6.2.3 в [16]). Значит, для каждого фиксированного n функции $M_t^n(X, U^\pm) = M_{t \wedge \tau_n(X, U^\pm)}(X, U^\pm)$ и $\Phi_t^n(X, U^\pm) = \Phi_{t \wedge \tau_n(X, U^\pm)}(X, U^\pm)$ ограничены и непрерывны (равномерно по t). Ясно, что если для каждого n процессы $M_t^n(X, U^\pm)$ и $\Phi_t^n(X, U^\pm)$ являются локальными мартингалами, то это свойство наследуется также и $M_t(X, U^\pm)$, $\Phi_t(X, U^\pm)$. Следовательно, только мартингалное свойство $M_t^n(X, U^\pm)$ и $\Phi_t^n(X, U^\pm)$ должно быть проверено. Таким образом, без потери общности можно обращаться с $M_t(X, U^\pm)$ и $\Phi_t(X, U^\pm)$, как если бы они были ограничены. Пусть $\Gamma_t(X, U^\pm)$ обозначает любую из них. Будем проверять мартингалное свойство в соответствии с определением: для любых $s < t$ и любой ограниченной и $\mathcal{F}_s^Q$ -измеримой функции $\varphi(X, U^\pm)$

$$\int_{\Omega} \Gamma_t(X, U^\pm) \varphi(X, U^\pm) dQ = \int_{\Omega} \Gamma_s(X, U^\pm) \varphi(X, U^\pm) dQ. \quad (4.3)$$

В действительности, в (4.3) можно брать непрерывные в метрике ρ^2 функции $\varphi(X, U^\pm)$. Ниже мы проверяем (4.3) именно с такими функциями с использованием сходимости $(Y^{\epsilon_k}, U^{\pm, \epsilon_k}) \xrightarrow{\text{law}} (X, U^\pm)$ и специально подобранным процессом Y_t^ϵ таким, что $\Delta_t^\epsilon = X_t^\epsilon - Y_t^\epsilon$ обладает следующим свойством: $\mathbf{P}\text{-}\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \sup_{t \leq T} |\Delta_t^\epsilon| = 0$ (законность этой операции гарантируется теоремой 4.1 (гл. 1 § 4) из [4]). Допустим, что процесс Y^{ϵ_k} выбран. Тогда, поскольку слабая сходимость влечет за собой

$$\lim_{\epsilon_k \rightarrow 0} \mathbf{E} \Gamma_t(Y^{\epsilon_k}, U^{\pm, \epsilon_k}) \varphi(Y^{\epsilon_k}, U^{\pm, \epsilon_k}) = \mathbf{E} \Gamma_t(X, U^\pm) \varphi(X, U^\pm),$$

$$\lim_{\epsilon_k \rightarrow 0} \mathbf{E} \Gamma_s(Y^{\epsilon_k}, U^{\pm, \epsilon_k}) \varphi(Y^{\epsilon_k}, U^{\pm, \epsilon_k}) = \mathbf{E} \Gamma_s(X, U^\pm) \varphi(X, U^\pm),$$

в проверке нуждается только

$$\lim_{\epsilon_k \rightarrow 0} \mathbf{E} \left\{ \left(\Gamma_t(Y^{\epsilon_k}, U^{\pm, \epsilon_k}) - \Gamma_s(Y^{\epsilon_k}, U^{\pm, \epsilon_k}) \right) \varphi(Y^{\epsilon_k}, U^{\pm, \epsilon_k}) \right\} = 0.$$

Ясно, что это равенство имеет место, если $\Gamma_t(Y^{\epsilon_k}, U^{\pm, \epsilon_k})$ может быть представлена в виде $\Gamma_t(Y^{\epsilon_k}, U^{\pm, \epsilon_k}) = N_t^{\epsilon_k} + V_t^{\epsilon_k}$, где $N_t^{\epsilon_k}$ есть $(\mathcal{F}_t^{\epsilon_k})_{t \geq 0}$ -мартингал и $\lim_{\epsilon_k \rightarrow 0} \mathbf{E} \sup_{t \leq T} |V_t^{\epsilon_k}| = 0$. Чтобы установить требуемое разложение, выберем $Y_0^\epsilon = X_0$ и

$$\begin{aligned} dY_t^\epsilon &= \left[A_0(t, Y_t^\epsilon) + b_0(t) \frac{1}{\sqrt{\epsilon}} \eta_{t/\epsilon} + a_1(t, Y_t^\epsilon) u_t^\epsilon \right] dt \\ &\quad + b_1(t, X_{t-}^\epsilon, \xi_{t/\epsilon}) dM_t^\epsilon. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Полагая

$$\alpha^\varepsilon(t) = \frac{A_0(t, X_t^\varepsilon) - A_0(t, Y_t^\varepsilon)}{X_t^\varepsilon - Y_t^\varepsilon} + \frac{a_1(t, X_t^\varepsilon) - a_1(t, Y_t^\varepsilon)}{X_t^\varepsilon - Y_t^\varepsilon} u_t^\varepsilon,$$

$$\beta^\varepsilon(t) = \frac{b_1(t, X_{t-}^\varepsilon, \xi_{t/\varepsilon}) - b_1(t, Y_{t-}^\varepsilon, \xi_{t/\varepsilon})}{X_{t-}^\varepsilon - Y_{t-}^\varepsilon}$$

и, принимая во внимание (1.1), приходим к линейному уравнению

$$\Delta_t^\varepsilon = \int_0^t \alpha_s^\varepsilon \Delta_s^\varepsilon ds + \int_0^t \beta_s^\varepsilon \Delta_{s-}^\varepsilon dM_s^\varepsilon + \delta_t^\varepsilon,$$

где $\delta_t^\varepsilon = \int_0^t [a_0(s, X_s^\varepsilon, \xi_{s/\varepsilon}) - A_0(s, X_s^\varepsilon)] ds$. В соответствии с леммой 7.4 $\mathbf{P}\text{-}\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sup_{t \leq T} \delta_t^\varepsilon = 0$, и, значит, требуемое свойство Δ_t^ε имеет место в силу леммы 7.6.

Заметим, что в силу леммы 7.5 имеет место разложение

$$\int_0^t b_0(v) \varepsilon_k^{-1/2} \eta_{v/\varepsilon_k} dv = \int_0^t b_0(v) \varepsilon_k^{-1/2} dS_{v/\varepsilon_k} - \int_0^t b_0(v) \varepsilon_k^{-1/2} d\Psi_{v/\varepsilon_k}, \quad (4.5)$$

где первый интеграл является семимартингалом, а второй — квадратично интегрируемым мартингалом. Положим

$$\mathcal{N}_t^{\varepsilon_k} = \int_0^t b_0(v) \varepsilon_k^{-1/2} d\Psi_{v/\varepsilon_k} + \int_0^t b_1(v, Y_{v-}^{\varepsilon_k}, \xi_{v/\varepsilon_k}) dM_v^{\varepsilon_k}, \quad (4.6)$$

$$\gamma^{\varepsilon_k} = \int_0^t b_0(v) \varepsilon_k^{-1/2} dS_{v/\varepsilon_k}.$$

Если $\Gamma_t(Y^{\varepsilon_k}, U^{\pm, \varepsilon_k}) = M_t(Y^{\varepsilon_k}, U^{\pm, \varepsilon_k})$, мы берем $N_t^{\varepsilon_k} = \mathcal{N}_t^{\varepsilon_k}$, $V_t^{\varepsilon_k} = \gamma_t^{\varepsilon_k}$ и проверяем, что $\lim_{\varepsilon_k \rightarrow 0} \mathbf{E} \sup_{t \leq T} |V_t^{\varepsilon_k}| = 0$. Последнее имеет место в силу утверждения 1) леммы 7.5: $\lim_{\varepsilon_k \rightarrow 0} \mathbf{E}(\varepsilon_k)^{-2} \sup_{t \leq T} S_{t/\varepsilon_k}^2 = 0$, и условия (A.1), согласно которому $b_0(s)$ непрерывно дифференцируемая функция с ограниченной производной. Интегрируя по частям, можно показать, что

$$\lim_{\varepsilon_k \rightarrow 0} \mathbf{E} \sup_{t \leq T} (V_t^{\varepsilon_k})^2 = 0. \quad (4.7)$$

Если $\Gamma_t(Y^{\varepsilon_k}, U^{\pm, \varepsilon_k}) = \Phi_t(Y^{\varepsilon_k}, U^{\pm, \varepsilon_k})$, то

$$\Gamma_t(Y^{\varepsilon_k}, U^{\pm, \varepsilon_k}) = (\mathcal{N}_t^{\varepsilon_k} + \gamma_t^{\varepsilon_k})^2 - \int_0^t B^2(s, Y_s^{\varepsilon_k}) ds = (\mathcal{N}_t^{\varepsilon_k})^2 - \langle \mathcal{N}^{\varepsilon_k} \rangle_t + \langle \mathcal{N}^{\varepsilon_k} \rangle_t - \int_0^t B^2(s, Y_s^{\varepsilon_k}) ds + 2\mathcal{N}_t^{\varepsilon_k} \gamma_t^{\varepsilon_k} + (\gamma_t^{\varepsilon_k})^2.$$

Поскольку $(\mathcal{N}_t^{\varepsilon_k})^2 - \langle \mathcal{N}^{\varepsilon_k} \rangle_t$ мартингал, требуется установить, что

$$\lim_{\varepsilon_k \rightarrow 0} \mathbf{E} \sup_{t \leq T} \left| \langle \mathcal{N}^{\varepsilon_k} \rangle_t - \int_0^t B^2(s, Y_s^{\varepsilon_k}) ds + 2\mathcal{N}_t^{\varepsilon_k} \gamma_t^{\varepsilon_k} + (\gamma_t^{\varepsilon_k})^2 \right| = 0.$$

Заметим, что (4.7) влечет за собой

$$\lim_{\varepsilon_k \rightarrow 0} \mathbf{E} \sup_{t \leq T} |2\mathcal{N}_t^{\varepsilon_k} \gamma_t^{\varepsilon_k} + (\gamma_t^{\varepsilon_k})^2| = 0.$$

Поэтому требуется проверка только для

$$\lim_{\varepsilon_k \rightarrow 0} \mathbf{E} \sup_{t \leq T} \left| \langle \mathcal{N}^{\varepsilon_k} \rangle_t - \int_0^t B^2(s, Y_s^{\varepsilon_k}) ds \right| = 0.$$

В силу (4.6) и независимости M_t^ε и η_t^ε (см. (С.4)),

$$\langle \mathcal{N}^{\varepsilon_k} \rangle_t = \varepsilon_k^{-1} \int_0^t b_0^2(v) d\langle \Psi \rangle_{v/\varepsilon_k} + \int_0^t b_1^2(v, Y_v^{\varepsilon_k}, \xi_{v/\varepsilon_k}) m_v^{\varepsilon_k} dv.$$

Если $b_0(v) \equiv 1$, то по теореме Биркгофа–Хинчина $\varepsilon_k^{-1} \langle \Psi \rangle_{t/\varepsilon_k}$ сходится п.н. к $\sigma_1^2 t$ при $\varepsilon_k \rightarrow 0$. В общем случае, принимая во внимание дифференцируемость функции $b_0(v)$ (см. (А.1)) и интегрируя по частям, можно установить, что для каждого $t > 0$, $\varepsilon_k^{-1} \int_0^t b_0^2(v) d\langle \Psi \rangle_{v/\varepsilon_k}$ сходится п.н. к $\int_0^t b_0^2(v) \sigma_1^2 dv$. Более того, в силу задачи 5.3.1 в [16], эта сходимость влечет за собой равномерную по t сходимость на любом конечном интервале. С другой стороны, по лемме 7.4

$$\sup_{t \leq T} \left| \int_0^t b_1^2(v, X_v^{\varepsilon_k}, \xi_{v/\varepsilon_k}) \sigma_0^2 dv - \int_0^t B_1^2(v, X_v^{\varepsilon_k}) \sigma_0^2 dv \right| \rightarrow 0$$

по вероятности при $\varepsilon_k \rightarrow 0$, где $B_1^2(v, x) = \int b_1^2(v, x, y) \lambda(dy)$. Ясно, что в силу (С.1) $\sup_{t \leq T} \left| \int_0^t b_1^2(v, X_v^{\varepsilon_k}, \xi_{v/\varepsilon_k}) m_v^{\varepsilon_k} dv - \int_0^t B_1^2(v, X_v^{\varepsilon_k}) \sigma_0^2 dv \right| \rightarrow 0$. Наконец, последнее соотношение остается верным при замене $X_v^{\varepsilon_k}$ на $Y_v^{\varepsilon_k}$, поскольку, как отмечалось выше, $X_t^{\varepsilon_k} - Y_t^{\varepsilon_k}$ равномерно по $t \leq T$ сходится к нулю по вероятности при $\varepsilon_k \rightarrow 0$. Объединяя эти результаты, приходим к $\mathbf{P}\text{-}\lim_{\varepsilon_k \rightarrow 0} \sup_{t \leq T} |\langle \mathcal{N}^{\varepsilon_k} \rangle_t - \int_0^t B^2(s, Y_s^{\varepsilon_k}) ds| = 0$, что с учетом техники локализации равносильно сходимости соответствующих математических ожиданий.

Таким образом, процесс X_t допускает следующее семимартингальное разложение относительно $(\mathcal{F}_t^Q)_{t \geq 0}$: $X_t = x_0 + \int_0^t [A_0(s, X_s) + a_1(s, X_s) u_t] ds + M_t$. Он также допускает так называемое «минимальное представление» относительно $(\mathcal{F}_t^{Q^X})_{t \geq 0}$ (см., например, теоремы 4.6.1 и 4.6.5 в [16]):

$$X_t = x_0 + \int_0^t [A_0(s, X_s) + a_1(s, X_s) \bar{u}_t] ds + \bar{M}_t,$$

где $\bar{u}_t$ является $(\mathcal{F}_t^{Q^X})_{t \geq 0}$ -предсказуемой проекцией u_t и $\bar{M}_t$ — непрерывный $(\mathcal{F}_t^{Q^X})_{t \geq 0}$ -мартингал с квадратической характеристикой мартингала M_t . Отсюда, применяя теорему Дуба, можно определить (если это необходимо, на расширенном стохастическом базисе) винеровский процесс W_t^X такой, что $d\bar{M}_t = B(t, X_t) dW_t^X$. Теорема 4.1 доказана.

Доказательство следствия 1. По лемме 7.2

$$\liminf_{\varepsilon_k} \mathbf{E} \int_0^T q(t, u_t^{\varepsilon_k}) dt \geq \mathbf{E} \int_0^T q(t, u_t) dt,$$

и поскольку п.н. $\bar{u}_t = \mathbf{E}(u_t | \mathcal{F}_t^{Q^X})$, в силу выпуклости функции $q(t, u)$ по u и неравенства Иенсена получаем п.н. неравенство $\mathbf{E}(q(t, u_t) | \mathcal{F}_t^{Q^X}) \geq q(t, \mathbf{E}(u_t | \mathcal{F}_t^{Q^X}))$, которое вместе с (В.1) приводит к результату.

4.2. Оптимальная обратная связь. В теореме 4.1 показано, что управляемый процесс X_t в предельной модели определяется как слабое решение уравнения Ито (4.1). В этом пункте мы устанавливаем существование оптимальной обратной связи, что позволяет ограничиваться лишь применением обратной связи.

Теорема 4.2. Пусть выполнены условия из § 2. Тогда найдется мера Q^0 и управление $\bar{u}_t^0$ такие, что на стохастическом базисе $(C_{[0,T]}, \mathcal{B}^{Q^0}, (\mathcal{F}_t^{Q^0})_{t \geq 0}, Q^0)$ процесс X_t является слабым решением уравнения Ито

$$dX_t = [A_0(t, X_t) + a_1(t, X_t)\bar{u}_t^0] dt + B(t, X_t) dW_t^X, \quad (4.8)$$

управление $\bar{u}_t^0$ является $(\mathcal{F}_t^{Q^0})_{t \geq 0}$ -согласованным и $J(\bar{u}^0) = J_0$, т.е. $\bar{u}_t^0$ — оптимальная обратная связь.

Доказательство. Возьмем минимизирующую последовательность допустимых управлений $\bar{u}_t^n$, $n \geq 1$, такую, что $\lim_n J(\bar{u}^n) = J_0$. Допустимое управление $\bar{u}_t^n$ генерирует два возрастающих процесса: $U_t^\pm = \int_0^t \bar{u}_s^{\pm,n} ds$, где $\bar{u}_t^{+,n} = 0 \vee \bar{u}_t^n$ и $\bar{u}_t^{-,n} = -[0 \wedge \bar{u}_t^n]$, и, значит, управляемый процесс X_t^n , отвечающий этому управлению, определяется на стохастическом базисе $(C_{[0,T]}, \mathcal{B}^{Q^n}, (\mathcal{F}_t^{Q^n})_{t \geq 0}, Q^n)$ и является слабым решением уравнения Ито

$$dX_t^n = A_0(t, X_t^n) dt + a_1(t, X_t^n) dU_t^{+,n} - a_1(t, X_t^n) dU_t^{-,n} + B(t, X_t^n) dW_t^{X^n}. \quad (4.9)$$

Триплет $(X^n, U^{\pm,n}) = (X_t^n, U_t^{\pm,n})_{t \leq T}$ принимает значения в метрическом пространстве $(C_{[0,T]} \times (C_{[0,T]}^+)^2, \rho^3)$. Ниже мы показываем, что семейство указанных выше триплетов относительно компактно в этом пространстве. Для этого, в силу теоремы Прохорова, проверяется плотность указанного семейства. Поскольку $C_{[0,T]}^+$ замкнутое подмножество в метрике ρ , то для проверки плотности семейств $U^{\pm,n}$ используется теорема 15.2 из [4], согласно которой мы должны установить

$$\begin{aligned} \lim_{c \rightarrow \infty} \left[\liminf_n \mathbf{P}\{U_T^{\pm,n} \geq c\} \right] &= 0, \\ \lim_{\delta \rightarrow 0} \left[\liminf_n \mathbf{P}\left\{ \sup_{s,t \leq T: |t-s| \leq \delta} |U_t^{\pm,n} - U_s^{\pm,n}| \geq \nu \right\} \right] &= 0, \quad \forall \nu > 0. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Плотность семейства X^n проверяется с помощью достаточных условий Альдуса (см. [1] или, например, гл. 6, § 3 в [16])

$$\lim_{c \rightarrow \infty} \left[\limsup_n \mathbf{P} \left\{ \sup_{t \leq T} |X_t^n| \geq c \right\} \right] = 0, \\ \lim_{\delta \rightarrow 0} \left\{ \limsup_n \left[\sup_{\tau < T} \mathbf{P} \left\{ \sup_{t \leq \delta} |X_{\tau+t}^n - X_{\tau}^n| \geq \nu \right\} \right] \right\} = 0, \quad \forall \nu > 0, \quad (4.11)$$

где τ есть $(\mathcal{F}_t^{Q^n})_{t \geq 0}$ -момент останова. Следует отметить, что (4.11) гарантирует плотность в пространстве Скорохода с метрикой d . Тем не менее, поскольку X_t^n , $n \geq 1$ — непрерывные процессы, (4.11) также гарантирует плотность и в метрическом пространстве $(C_{[0,T]}, \rho)$. При проверке (4.10) без потери общности можно предположить, что $\sup_n J(\bar{u}^n) < \infty$ и, значит, $\sup_n \mathbf{E} \int_0^T q(t, u_t^n) dt < \infty$. Поэтому (4.10) и (4.11) устанавливаются подобно (3.3) и (3.4).

Пусть $\{n_k\}$ — такая подпоследовательность последовательности $\{n\}$, что триплет $(X^{n_k}, U^{\pm, n_k})$ слабо сходится к пределу $(X^0, U^{\pm, 0})$. Повторяя детали доказательства теоремы 4.1 и ее следствия, можно установить, что процесс X_t^0 является слабым решением уравнения (4.8) и $\lim_{n_k \rightarrow \infty} \mathbf{E} \int_0^T q(t, \bar{u}_t^{n_k}) dt \geq \mathbf{E} \int_0^T q(t, \bar{u}_t^0) dt$. Это неравенство и лемма Фату (лемма 7.1) гарантируют $J_0 \geq J(\bar{u}^0)$. С другой стороны, имеет место очевидное неравенство $J_0 \leq J(\bar{u}^0)$. Поэтому $J_0 = J(\bar{u}^0)$. Теорема 4.2 доказана.

4.3. Существование δ -оптимальной липшицевой и марковской обратной связи. Теорема 4.2 утверждает, что в независимости от того, вырождается или нет диффузионный параметр $B^2(t, x)$, при условиях из § 2 существует оптимальная обратная связь, но не обязательно марковская обратная связь. Это утверждение слабее соответствующего утверждения для линейно-квадратической задачи, в которой при тех же самых предположениях оптимальное управление имеет вид марковской обратной связи. С другой стороны, в рамках данной постановки задачи мы должны предполагать существование оптимальной или δ -оптимальной липшицевой обратной связи для предельной модели. Если оптимальное управление не является таковым, а, скажем, релейного типа, то мы не можем гарантировать существования сильного решения уравнения (1.1). Более того, теорема 1.2 требует липшицевой оптимальной (δ -оптимальной) обратной связи. В этом пункте мы покажем, что при дополнительных условиях, в частности при невырожденной диффузии, существует δ -оптимальная липшицева обратная связь в предельной модели. Более того, это управление является марковским (по поводу существования оптимальных марковских управлений см., например, [10]).

Теорема 4.3. Пусть выполнены условия теоремы 4.2 и, кроме того, $|u^0(t, X_{[0,t]})| \leq \ell$ и диффузионный параметр не вырождается,

$B^2(t, x) \geq (1/\ell) > 0$. Тогда существует оптимальная марковская обратная связь

$$v^\circ(t, X_t) = \mathbf{E}^{Q^\circ} \left(u^\circ(t, X_{[0,t)}) \mid X_t \right).$$

Более того, существует липшицева δ -оптимальная марковская обратная связь.

З а м е ч а н и е 2. i) При использовании управления $v^\circ(t, \cdot)$ в допредельной модели вместо X_t берется X_{t-}^ε .

ii) Существование липшицевой δ -оптимальной обратной связи устанавливается при более слабом условии: $\mathbf{E}^{Q^\circ} \int_0^T [u^\circ(t, X_{[0,t)})]^{2n^*} dt < \infty$, где n^* из (С.1).

Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы 4.3. По теореме 4.2 оптимальный управляемый процесс X_t , заданный на стохастическом базисе $(C_{[0,T]}, \mathcal{B}^{Q^\circ}, (\mathcal{F}_t^{Q^\circ})_{t \geq 0}, Q^\circ)$, определяется уравнением (4.8). Установим теперь существование оптимальной марковской обратной связи. На измеримом пространстве $(C_{[0,T]}, \mathcal{B}^{Q^\circ})$ можно ввести другую вероятностную меру Q' такую, что на стохастическом базисе $(C_{[0,T]}, \mathcal{B}^{Q^\circ}, \mathcal{F}_t^{Q^\circ}, Q')$ существует новый винеровский процесс W'_t и

$$dX_t = \left[A_0(t, X_t) + a_1(t, X_t) v^\circ(t, X_t) \right] dt + B(t, X_t) dW'_t$$

(см. п. 7.6 в § 7). Очевидно, что $J(v^\circ) \geq J_0$. Чтобы проверить оптимальность v° , достаточно установить обратное неравенство $J(v^\circ) \leq J_0$. Принимая во внимание выпуклость по u функции $q(t, u)$ и применяя неравенство Иенсена, получаем

$$\begin{aligned} \mathbf{E}^{Q^\circ} \left(q(t, u^\circ(t, X_{[0,t)})) \mid X_t \right) &\geq q \left(t, \mathbf{E}^{Q^\circ} (u^\circ(t, X_{[0,t)}) \mid X_t) \right) \\ &= q(t, v^\circ(t, X_t)). \end{aligned}$$

Поэтому

$$J_0 \geq \mathbf{E}^{Q^\circ} \left\{ \int_0^T \left[p(t, X_t) + q(t, v^\circ(t, X_t)) \right] dt + r(X_T) \right\} := \underline{J}_0.$$

Применим теперь лемму 7.7, согласно которой $\mathbf{E}^{Q^\circ} f(X_t) = \mathbf{E}^{Q'} f(X_t)$ для каждой неотрицательной функции $f(x)$ и $t \leq T$. В соответствии с этим равенством $J(v^\circ) = \underline{J}_0$, т.е. требуемое обратное неравенство имеет место.

Существование липшицевой δ -оптимальной марковской обратной связи устанавливается при помощи леммы 7.7. Согласно этой лемме, существует последовательность мер Q^j и липшицевых обратных связей $v^j(t, X_t)$, $j \geq 1$, ограниченных не зависящей от j константой такой, что на стохастическом базисе $(C_{[0,T]}, \mathcal{B}^{Q^\circ}, (\mathcal{F}_t^{Q^\circ})_{t \geq 0}, Q^j)$ X_t является единственным сильным решением (относительно винеровского процесса W_t^j) уравнения Ито

$$dX_t = \left[A_0(t, X_t) + a_1(t, X_t) v^j(t, X_t) \right] dt + B(t, X_t) dW_t^j.$$

Следовательно, среди v^j , $j \geq 1$, можно подобрать кандидата для требуемой δ -оптимальной обратной связи при условии $\lim_j J(v^j) = J_0$. Таким кандидатом может быть v^{j^δ} , где номер j^δ выбирается таким, чтобы $J(v^{j^\delta}) \leq J_0 - \delta$. Для проверки требуемой сходимости обозначим

$$\begin{aligned}\mathcal{W}(X) &= \int_0^T [p(t, X_t) + q(t, v^0(t, X_t))] dt + r(X_T), \\ \mathcal{W}^j(X) &= \int_0^T [p(t, X_t) + q(t, v^j(t, X_t))] dt + r(X_T)\end{aligned}$$

и заметим, что эта сходимость эквивалентна $\lim_j \mathbf{E}^{Q^j} \mathcal{W}^j(X) = \mathbf{E}^{Q'} \mathcal{W}(X)$. С другой стороны, поскольку $|\mathbf{E}^{Q^j} \mathcal{W}^j(X) - \mathbf{E}^{Q'} \mathcal{W}(X)| \leq |\mathbf{E}^{Q'} \mathcal{W}^j(X) - \mathbf{E}^{Q^j} \mathcal{W}^j(X)| + |\mathbf{E}^{Q'} \mathcal{W}(X) - \mathbf{E}^{Q'} \mathcal{W}^j(X)|$, только равенства

$$\begin{aligned}\lim_j |\mathbf{E}^{Q'} \mathcal{W}^j(X) - \mathbf{E}^{Q^j} \mathcal{W}^j(X)| &= 0, \\ \lim_j |\mathbf{E}^{Q'} \mathcal{W}(X) - \mathbf{E}^{Q'} \mathcal{W}^j(X)| &= 0\end{aligned}\tag{4.12}$$

требуют проверки. По лемме 7.7 меры Q^j , $j \geq 1$, сходятся к Q' в норме полной вариации, и эта сходимость влечет за собой первую часть в (4.12) при условии равномерной интегрируемости семейства $\mathcal{W}^j(X)$, $j \geq 1$, относительно Q' и Q^j . Последнее устанавливается с учетом ограниченности v^j и (B.1), (B.2). Действительно, $\mathcal{W}^j(X) \leq \ell(1 + \sup_{t \leq T} |X_t|^{2\kappa})$, $\kappa = 1 \vee \zeta \vee \gamma_1$, и при $n^* > \kappa$ имеем $\mathbf{E}^{Q'} \sup_{t \leq T} |X_t|^{2n^*} < \infty$ и $\mathbf{E}^{Q^j} \sup_{t \leq T} |X_t|^{2n^*} \leq \ell < \infty$. Это свойство устанавливается аналогично доказательству теоремы 5.1. Второе соотношение в (4.12) проверяется с учетом

$$|\mathbf{E}^{Q'} \mathcal{W}(X) - \mathbf{E}^{Q'} \mathcal{W}^j(X)| \leq \mathbf{E}^{Q'} \int_0^T |q(t, v^0(t, X_t)) - q(t, v^j(t, X_t))| dt.$$

Поскольку функции v^j , $j \geq 1$, удовлетворяют (7.6) и ограничены, а $q(t, u)$ непрерывна (см. (B.1)), (4.12) имеет место. Теорема 4.3 доказана.

§ 5. Допредельная модель. Липшицева обратная связь

В предшествующем параграфе мы показали, что управление для предельной модели может быть взято в форме обратной связи и быть к тому же липшицевым. В этом параграфе такое же управление используется в допредельной модели: $u = u(t, x_{[0,t]})$, что позволяет формировать обратную связь $u(t, X_{[0,t]}^\varepsilon)$ и управляемый процесс с $X_0^\varepsilon = x_0$ (ср. с (1.1))

$$\begin{aligned}dX_t^\varepsilon &= [a_0(t, X_t^\varepsilon, \xi_{t/\varepsilon}) + a_1(t, X_t^\varepsilon) u(t, X_{[0,t]}^\varepsilon)] dt \\ &\quad + b_0(t) [\varepsilon^{-1/2} \eta_{t/\varepsilon}] dt + b_1(t, X_{t-}^\varepsilon, \xi_{t/\varepsilon}) dM_t^\varepsilon.\end{aligned}\tag{5.1}$$

Отметим, что условие Липшица (1.6) гарантирует существование единственного сильного решения уравнения (5.1), и, значит, управление в

действительности определяет «обратную связь». В следующих двух теоремах приводятся свойства X_t^ε , играющие принципиальную роль в установлении основных результатов работы.

Теорема 5.1. Пусть выполнены условия из § 2. Тогда $\sup_\varepsilon \mathbf{E} \sup_{t \leq T} |X_t^\varepsilon|^{2n^*} < \infty$, где n^* из (С.1).

Теорема 5.2. Пусть выполнены условия из § 2. Тогда семейство X_t^ε слабо сходится в топологии Скорохода, при $\varepsilon \rightarrow 0$, к пределу X_t (ср. с (4.1)):

$$dX_t = \left[A_0(t, X_t) + a_1(t, X_t) u(t, X_{[0,t)}) \right] dt + B(t, X_t) dW_t^X, \quad (5.2)$$

$$X_0 = x_0$$

с некоторым винеровским процессом W_t^X .

Доказательство теоремы 5.1. Заметим, что $X_t^\varepsilon = x_0 + \mathcal{A}_t^\varepsilon + \mathcal{M}_t^\varepsilon + \mathcal{S}_t^\varepsilon$, где

$$\mathcal{A}_t^\varepsilon = \int_0^t \left[a_0(s, X_s^\varepsilon, \xi_{s/\varepsilon}) + a_1(s, X_s^\varepsilon) u(s, X_{[0,s)}) \right] ds,$$

$$\mathcal{M}_t^\varepsilon = \int_0^t b_1(s, X_{s-}^\varepsilon, \xi_{s/\varepsilon}) dM_s^\varepsilon,$$

$$\mathcal{S}_t^\varepsilon = \int_0^t b_0(s) \varepsilon^{-1/2} \eta_{s/\varepsilon} ds.$$

Пусть $X_t^{\varepsilon,*} = \sup_{t' \leq t} |X_{t'}^\varepsilon|$ и $\mathcal{A}_t^{\varepsilon,*}$, $\mathcal{M}_t^{\varepsilon,*}$, $\mathcal{S}_t^{\varepsilon,*}$ определены подобным образом. Ясно (см. (А.1), (А.2) и (1.6)), что при каждом $t \leq T$ $\mathcal{A}_t^{\varepsilon,*} \leq \ell(1 + \int_0^t X_s^{\varepsilon,*} ds)$. Таким образом, $X_t^{\varepsilon,*} \leq \ell(1 + \mathcal{S}_T^{\varepsilon,*} + \mathcal{M}_T^{\varepsilon,*} + \int_0^t X_s^{\varepsilon,*} ds)$, $t \leq T$. По лемме Гронуолла–Беллмана получаем $X_t^{\varepsilon,*} \leq \ell(1 + \mathcal{S}_T^{\varepsilon,*} + \mathcal{M}_T^{\varepsilon,*})$. Возведение в степень $2n^*$ приводит к неравенству $(X_t^{\varepsilon,*})^{2n^*} \leq \ell(1 + (\mathcal{S}_T^{\varepsilon,*})^{2n^*} + (\mathcal{M}_T^{\varepsilon,*})^{2n^*})$. Далее, мы находим верхнюю границу для $\mathbf{E}(\mathcal{M}_t^{\varepsilon,*})^{2n^*}$. Применяя версию неравенства Дуба (см. теорему 1.9.2 в [16]), находим

$$\mathbf{E}(\mathcal{M}_t^{\varepsilon,*})^{2n^*} \leq \left(\frac{2n^*}{2n^* - 1} \right)^{2n^*} \mathbf{E}(\overline{\mathcal{M}_t^\varepsilon})^{2n^*}, \quad (5.3)$$

где $\overline{(\mathcal{M}_t^\varepsilon)^{2n^*}}$ — компенсатор процесса $(\mathcal{M}_t^\varepsilon)^{2n^*}$. Оценим этот компенсатор. Используем для этого разложение $(\mathcal{M}_t^\varepsilon)^{2n^*}$ на мартингал и возрастающий предсказуемый процесс. По формуле Ито

$$\begin{aligned} (\mathcal{M}_t^\varepsilon)^{2n^*} &= 2n^* \int_0^t (\mathcal{M}_{s-}^\varepsilon)^{2n^*-1} d\mathcal{M}_s^\varepsilon \\ &+ n^*(2n^* - 1) \int_0^t (\mathcal{M}_s^\varepsilon)^{2n^*-2} b_1^2(s, X_s^\varepsilon, \xi_{s/\varepsilon}) d\langle M^{\varepsilon,c} \rangle_s \\ &+ \sum_{s \leq t} \left[\left(\mathcal{M}_{s-}^\varepsilon + b_1(s, X_{s-}^\varepsilon, \xi_{s/\varepsilon}) \Delta M_s^\varepsilon \right)^{2n^*} - (\mathcal{M}_{s-}^\varepsilon)^{2n^*} \right. \\ &\quad \left. - 2n^* (\mathcal{M}_{s-}^\varepsilon)^{2n^*-1} b_1(s, X_{s-}^\varepsilon, \xi_{s/\varepsilon}) \Delta M_s^\varepsilon \right], \end{aligned} \quad (5.4)$$

где $\langle M^{\varepsilon, c} \rangle_t$ — квадратическая характеристика непрерывной части $M_t^{\varepsilon, c}$ мартингала M_t^ε и $\Delta M_t^\varepsilon = M_t^\varepsilon - M_{t-}^\varepsilon$. Сумму в правой части (5.4) обозначим L_t^ε . Ясно, что процесс L_t^ε допускает компенсатор

$$\begin{aligned} \tilde{L}_t^\varepsilon = \int_0^t \int \left[(\mathcal{M}_{s-}^\varepsilon + b_1(s, X_{s-}^\varepsilon, \xi_{s/\varepsilon}) z)^{2n^*} - (\mathcal{M}_{s-}^\varepsilon)^{2n^*} \right. \\ \left. - 2n^* (\mathcal{M}_{s-}^\varepsilon)^{2n^*-1} b_1(s, X_{s-}^\varepsilon, \xi_{s/\varepsilon}) z \right] \nu^\varepsilon(ds, dz), \end{aligned} \quad (5.5)$$

где ν^ε — компенсатор меры скачков процесса M_t^ε (см. (С.1)). Поскольку $L_t^\varepsilon - \tilde{L}_t^\varepsilon$ мартингал, компенсатор для $(M_t^\varepsilon)^{2n^*}$ определяется единственным образом:

$$\overline{(\mathcal{M}_t^\varepsilon)^{2n^*}} = n^*(2n^* - 1) \int_0^t (\mathcal{M}_s^\varepsilon)^{2n^*-2} b_1^2(s, X_s^\varepsilon, \xi_{s/\varepsilon}) d\langle M^{\varepsilon, c} \rangle_s + \tilde{L}_t^\varepsilon.$$

Оценим члены в правой части этого равенства. В силу (А.2), (С.1), (1.6) и полученной ранее верхней оценки для $X_t^{\varepsilon, *}$, находим

$$\begin{aligned} n^*(2n^* - 1) \int_0^t (\mathcal{M}_s^\varepsilon)^{2n^*-2} b_1^2(s, X_s^\varepsilon, \xi_{s/\varepsilon}) d\langle M^{\varepsilon, c} \rangle_s \\ \leq \ell \int_0^t (\mathcal{M}_s^\varepsilon)^{2n^*-2} \left[1 + (\mathcal{S}_T^{\varepsilon, *})^2 + (\mathcal{M}_s^{\varepsilon, *})^2 \right] ds \\ \leq \ell \int_0^t \left[1 + (\mathcal{S}_T^{\varepsilon, *})^2 (\mathcal{M}_s^{\varepsilon, *})^{2n^*-2} + (\mathcal{M}_s^{\varepsilon, *})^{2n^*} \right] ds \\ \leq \ell \int_0^t \left[1 + (\mathcal{S}_T^{\varepsilon, *})^{2n^*} + (\mathcal{M}_s^{\varepsilon, *})^{2n^*} \right] ds, \end{aligned}$$

где последнее неравенство вытекает из неравенства Минковского: $a^2 b^{2n^*-2} \leq a^{2n^*}/n^* + b^{2n^*}(2n^* - 2)/2n^*$. Оценим теперь $\tilde{L}_t^\varepsilon$. Применяя теорему о среднем, получаем $(x + y)^{2n} - x^{2n} - 2nx^{2n-1}y \leq n(2n - 1) \times 2^{2n-1}(x^{2n-2}y^2 + y^{2n})$. Поэтому в силу (А.2) (см. также (С.1)),

$$\begin{aligned} \tilde{L}_t^\varepsilon \leq \ell \int_0^t \int [z^2 + z^{2n^*}] K^\varepsilon(s, dz) \left[1 + (\mathcal{S}_T^{\varepsilon, *})^2 (\mathcal{M}_s^{\varepsilon, *})^{2n^*-2} + (\mathcal{M}_s^{\varepsilon, *})^{2n^*} \right] ds \\ \leq \ell \int_0^t \left[1 + (\mathcal{S}_T^{\varepsilon, *})^{2n^*} + (\mathcal{M}_s^{\varepsilon, *})^{2n^*} \right] ds, \end{aligned}$$

где $K^\varepsilon(s, dz)$ — переходное ядро компенсатора ν^ε . Все полученные выше неравенства влекут за собой

$$\mathbf{E}(\mathcal{M}_t^{\varepsilon, *})^{2n^*} \leq \ell \int_0^t \left[1 + \mathbf{E}(\mathcal{S}_T^{\varepsilon, *})^{2n^*} + \mathbf{E}(\mathcal{M}_s^{\varepsilon, *})^{2n^*} \right] ds$$

и, в соответствии с неравенством Гронуолла–Беллмана $\mathbf{E}(\mathcal{M}_T^{\varepsilon, *})^{2n^*} \leq \ell(1 + \mathbf{E}(\mathcal{S}_T^{\varepsilon, *})^{2n^*})$. Следовательно,

$$\mathbf{E}(X_T^{\varepsilon, *})^{2n^*} \leq \ell(1 + \mathbf{E}(\mathcal{S}_T^{\varepsilon, *})^{2n^*}).$$

Осталось теперь только показать, что $\mathbf{E}(\mathcal{S}_T^{\varepsilon, *})^{2n^*} < \infty$. Для этого заметим, что $\mathcal{S}_t^{\varepsilon, *} = \sup_{t' \leq t} |\varepsilon^{1/2} \int_0^{t'/\varepsilon} b_0(s\varepsilon) \eta_s ds|$. Последнее равенство,

в силу утверждения 4) леммы 7.5, влечет за собой

$$\begin{aligned} & \mathbf{E}(\mathcal{S}_{t'}^{\varepsilon,*})^{2n^*} \\ & \leq \varepsilon^{n^*} C_{2n^*} \left\{ 1 + (T/\varepsilon)^{n^*} \left[1 + \left(\int_0^{T/\varepsilon} |\varepsilon b'_0(s\varepsilon)|^{2n^*/(2n^*-1)} ds \right)^{2n^*-1} \right] \right\} \\ & \leq C_{2n^*} \left\{ 1 + T \left[1 + \left(\int_0^T |b'_0(s)|^{2n^*/(2n^*-1)} ds \right)^{2n^*-1} \right] \right\} < \infty. \end{aligned}$$

Теорема 5.1 доказана.

Доказательство теоремы 5.2. Для доказательства слабой сходимости семейства X_t^ε применим теорему 4.1 (гл. 1, § 4) из [4], согласно которой требуемая сходимость имеет место, если она имеет место с тем же пределом для другого семейства $Y_t^\varepsilon = X_t^\varepsilon - \Delta_t^\varepsilon$ с $\mathbf{P}\text{-}\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sup_{t \leq T} |\Delta_t^\varepsilon| = 0$. Возьмем $Y_0^\varepsilon = x_0$ и (ср. с (5.1))

$$\begin{aligned} dY_t^\varepsilon = & \left[a_0(t, Y_t^\varepsilon, \xi_{t/\varepsilon}) + a_1(t, Y_t^\varepsilon) u(t, Y_{[0,t)}^\varepsilon) \right] dt \\ & - b_0(t) \varepsilon^{-1/2} d\Psi_{t/\varepsilon} + b_1(t, Y_{t-}^\varepsilon, \xi_{t/\varepsilon}) dM_t^\varepsilon, \end{aligned} \quad (5.6)$$

где Ψ_t — мартингал из разложения 2) для $\int_0^t \eta_s ds$ в лемме 7.5. Установим сначала требуемое свойство для Δ_t^ε , а затем слабую сходимость для Y_t^ε . Из (5.1) и (5.6) выводим

$$\begin{aligned} d\Delta_t^\varepsilon = & \left[a_0(t, X_t^\varepsilon, \xi_{t/\varepsilon}) - a_0(t, Y_t^\varepsilon, \xi_{t/\varepsilon}) \right] dt \\ & + [a_1(t, X_t^\varepsilon) - a_1(t, Y_t^\varepsilon)] u(t, X_{[0,t)}^\varepsilon) dt \\ & + a_1(t, Y_t^\varepsilon) \left[u(t, X_{[0,t)}^\varepsilon) - u(t, Y_{[0,t)}^\varepsilon) \right] dt + b_0(t) \varepsilon^{-1/2} \eta_{t/\varepsilon} dt \\ & + [b_1(t, X_{t-}^\varepsilon, \xi_{t/\varepsilon}) - b_1(t, Y_{t-}^\varepsilon, \xi_{t/\varepsilon})] dM_t^\varepsilon + b_0(t) \varepsilon^{-1/2} d\Psi_{t/\varepsilon}. \end{aligned}$$

Полагая ($0/0 = 0$)

$$\begin{aligned} \alpha_t^\varepsilon &= \frac{a_0(t, X_t^\varepsilon, \xi_{t/\varepsilon}) - a_0(t, Y_t^\varepsilon, \xi_{t/\varepsilon})}{X_t^\varepsilon - Y_t^\varepsilon} + \frac{a_1(t, X_t^\varepsilon) - a_1(t, Y_t^\varepsilon)}{X_t^\varepsilon - Y_t^\varepsilon} u(t, X_{[0,t)}^\varepsilon), \\ \beta_t^\varepsilon &= \frac{b_1(t, X_{t-}^\varepsilon, \xi_{t/\varepsilon}) - b_1(t, Y_{t-}^\varepsilon, \xi_{t/\varepsilon})}{X_{t-}^\varepsilon - Y_{t-}^\varepsilon}, \\ \gamma_t^\varepsilon &= a_1(t, X_t^\varepsilon) \frac{u(t, X_{[0,t)}^\varepsilon) - u(t, Y_{[0,t)}^\varepsilon)}{\sup_{t' \leq t} |X_{t'}^\varepsilon - Y_{t'}^\varepsilon|}, \\ V_t^\varepsilon &= \int_0^t b_0(s) \varepsilon^{-1/2} dS_{s/\varepsilon} \end{aligned}$$

и используя $b_0(t) \varepsilon^{-1/2} \eta_{t/\varepsilon} dt = b_0(t) \varepsilon^{-1/2} dS_{t/\varepsilon} - b_0(t) \varepsilon^{-1/2} d\Psi_{t/\varepsilon}$, приходим к

$$\Delta_t^\varepsilon = \int_0^t \alpha_s^\varepsilon \Delta_s ds + \int_0^t \beta_s^\varepsilon \Delta_{s-} dM_s^\varepsilon + \int_0^t \gamma_s^\varepsilon \sup_{s' \leq s} |\Delta_{s'}^\varepsilon| ds + V_t^\varepsilon.$$

В силу (А.2) и (1.6), $|\beta_t^\varepsilon| \leq \ell$ и $|\gamma_t^\varepsilon| \leq \ell$. С другой стороны, (1.6) влечет за собой $|\alpha_t^\varepsilon| \leq \ell(1 + \sup_{t \leq T} |X_t^\varepsilon|)$. Поэтому по теореме 5.1 $|\alpha_t^\varepsilon|$ удовлетворяет условиям леммы 7.6. Кроме того, V_t^ε также удовлетворяет условиям леммы 7.6. Действительно, $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbf{E} \varepsilon^{-1/2} \sup_{t \leq T} S_{t/\varepsilon}^2 = 0$ (см. утверждение 1) в лемме 7.5) и, интегрируя по частям, получаем $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbf{E} \sup_{t \leq T} V_{t/\varepsilon}^2 = 0$. Таким образом, требуемое свойство Δ_t^ε следует теперь из леммы 7.6.

Слабую сходимость для семейства Y_t^ε мы выводим, применяя теорему 8.3.1(с) из [16]. В нашем случае для этого требуется проверить, что при $\varepsilon \rightarrow 0$ выполняются условия

$$\begin{aligned} \sup_{t \leq T} \left| \int_0^t [a_0(s, Y_s^\varepsilon, \xi_{s/\varepsilon}) - A_0(s, Y_s^\varepsilon)] ds \right| &\rightarrow 0, \\ \sup_{t \leq T} \left| \int_0^t [b_0^2(s) \varepsilon^{-1} d\langle \Psi \rangle_{s/\varepsilon} - b_0^2(s) \sigma_1^2 ds] \right| &\rightarrow 0, \\ \sup_{t \leq T} \left| \int_0^t [b_1^2(s, Y_s^\varepsilon, \xi_{s/\varepsilon}) m_s^\varepsilon - \sigma_0^2 B_1^2(s, Y_s^\varepsilon)] ds \right| &\rightarrow 0, \end{aligned} \quad (5.7)$$

где (см. (1.4))

$$A_0(t, x) = \int_{\mathbf{R}} a_0(t, x, y) \lambda(dy) \quad \text{и} \quad B_1^2(t, x) = \int_{\mathbf{R}} b_1^2(t, x, y) \lambda(dy).$$

Принимая во внимание, что разность $X_t^\varepsilon - Y_t^\varepsilon$ сходится по вероятности равномерно по t к нулю, можно заключить, что первое и последнее соотношения следуют из леммы 7.4 и (С.1), в то время как второе соотношение следует из утверждения 3) леммы 7.5 и непрерывной дифференцируемости функции $b_0(t)$. Теорема 5.2 доказана.

§ 6. Доказательство основных результатов

В этом параграфе приводится доказательство теорем 1.1 и 1.2.

Доказательство теоремы 1.1. Достаточно рассмотреть случай, когда при каждом фиксированном ε оптимальная цена J_0^ε (см. (1.2)) является конечной. Обозначим $\beta = \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} J_0^\varepsilon$ и выберем подпоследовательность $\varepsilon_k \downarrow 0$ такую, что $\beta = \lim_k J_0^{\varepsilon_k}$. Очевидно, что для всех достаточно больших значений k

$$\mathbf{E} \int_0^T q(t, u_t^{\varepsilon_k}) dt \leq 2\beta. \quad (6.1)$$

Определим возрастающие процессы $U_t^{\pm, \varepsilon_k}$ с $dU_t^{\pm, \varepsilon_k} = u_t^{\pm, \varepsilon_k} dt$, где $u_t^{\pm, \varepsilon_k}$ являются соответственно положительной и отрицательной частями управления $u_t^{\varepsilon_k}$. Управляемый процесс $X_t^{\varepsilon_k}$ в этом случае является решением уравнения (1.1) при применении $u_t^{\varepsilon_k}$. Условие (6.1) и теорема 3.1 гарантируют плотность семейства $(X^{\varepsilon_k}, U^{\pm, \varepsilon_k}) = (X_t^{\varepsilon_k}, U_t^{\pm, \varepsilon_k})_{t \leq T}$ в метрическом пространстве $(\mathbf{D}_{[0, T]}, (\mathbf{C}_{[0, T]}^+)^2, d \times \rho^2)$, где $\mathbf{D}_{[0, T]}$ и $\mathbf{C}_{[0, T]}^+$

являются пространством Скорохода и подпространством неубывающих функций из $C_{[0,T]}$ с скороходовской (d) и равномерной (ρ) метриками соответственно. Пусть $\tilde{\varepsilon}_k$ такая подпоследовательность подпоследовательности ε_k , что триплет $(X^{\tilde{\varepsilon}_k}, U^{\pm, \tilde{\varepsilon}_k})$ слабо сходится к $(X, U^{\pm}) = (X_t, U_t^{\pm})_{t \leq T}$. По теореме 4.1 процесс X_t определяется уравнением Ито (4.1) относительно $(\mathcal{F}_t^X)_{t \geq 0}$ -винеровского процесса W_t^X и $(\mathcal{F}_t^X)_{t \geq 0}$ -допустимого управления $\bar{u}_t$. Более того, в силу следствия к теореме 4.1 $\liminf_{\tilde{\varepsilon}_k} \mathbf{E} \int_0^T q(t, u_t^{\tilde{\varepsilon}_k}) dt \geq \mathbf{E} \int_0^T q(t, \bar{u}_t) dt$. Упомянутые неравенства вместе с леммой Фату (лемма 7.1) влекут за собой

$$\begin{aligned} \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbf{E} \left\{ \int_0^T [p(t, X_t^\varepsilon) + q(t, u_t^\varepsilon)] dt + r(X_T^\varepsilon) \right\} \\ \geq \mathbf{E} \left\{ \int_0^T [p(t, X_t) + q(t, \bar{u}_t)] dt + r(X_T) \right\}, \end{aligned}$$

и, поскольку правая часть последнего неравенства не меньше чем J_0 , то утверждение теоремы 1.1 имеет место.

Доказательство теоремы 1.2. Пусть $u^\circ(t, x_{[0,t]})$ — оптимальная липшицева обратная связь для предельной модели и $X_t^{\circ, \varepsilon}$ — соответственно управляемый процесс, определенный в (5.1). Поскольку $J_0^\varepsilon \leq J^\varepsilon(u^\circ)$, то $\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} J_0^\varepsilon \leq \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} J^\varepsilon(u^\circ)$. С другой стороны, по теореме 5.2 семейство $X_t^{\circ, \varepsilon}$ слабо сходится при $\varepsilon \rightarrow 0$ в топологии Скорохода к предельному диффузионному процессу X_t° , определяемому уравнением Ито (5.2) с $u^\circ(t, X_{[0,t]}^\circ)$. Для Z из пространства Скорохода положим

$$\mathcal{W}(Z) = \int_0^T [p(t, Z_t) + q(t, u^\circ(t, Z_{[0,t]}))] dt + r(Z_T)$$

и заметим, что $\mathbf{E} \mathcal{W}(X^\circ) = J(u^\circ) = J_0$ и в то же время $\mathbf{E} \mathcal{W}(X^{\circ, \varepsilon}) = J^\varepsilon(u^\circ)$. При сделанных в работе предположениях функция $\mathcal{W}(Z)$ является непрерывной в равномерной топологии и, значит, семейство случайных величин $\mathcal{W}(X^{\circ, \varepsilon})$ сходится по распределению при $\varepsilon \rightarrow 0$ к случайной величине $\mathcal{W}(X^\circ)$. С другой стороны, в силу (B.1) и (B.2) с n^* из (C.1) $\mathcal{W}(Z) \leq \ell(1 + \sup_{t \leq T} |Z_t|^{2n^*})$, т.е. случайная величина $\mathcal{W}(X^{\circ, \varepsilon})$ ограничена константой $\ell(1 + \sup_{t \leq T} |X_t^{\circ, \varepsilon}|^{2n^*})$. Применяя теперь теорему 5.1, можно показать, что семейство случайных величин $\mathcal{W}(X^{\circ, \varepsilon})$ является равномерно интегрируемым, что в свою очередь влечет за собой $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbf{E} \mathcal{W}(X^{\circ, \varepsilon}) = \mathbf{E} \mathcal{W}(X^\circ)$. Это последнее равенство позволяет заключить, что $\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} J_0^\varepsilon \leq J_0$. Кроме того, поскольку $\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} J_0^\varepsilon \geq J_0$ (теорема 1.1), имеет место равенство $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} J_0^\varepsilon = J_0$.

Пусть теперь $u^\delta(t, x_{[0,t]})$ есть δ -оптимальная липшицева обратная связь для предельной модели, т.е. $J(u^\delta) \leq J_0 + \delta$. Применяя это управление в допредельной модели и используя предшествующую аргументацию, получаем $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} J^\varepsilon(u^\delta) = J(u^\delta)$. Поэтому по теореме 1.1 $\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} (J^\varepsilon(u^\delta) - J_0^\varepsilon) \leq (J(u^\delta) - J_0) \leq \delta$. Теорема 1.2 доказана.

§ 7. Приложение

Этот параграф содержит все ранее используемые вспомогательные результаты.

7.1. Слабая сходимостъ и лемма Фату. Пусть $(X_t^\varepsilon)_{t \geq 0}$, $\varepsilon > 0$, — семейство случайных процессов с траекториями из пространства Скорохода $\mathbf{D}$, слабо сходящееся в топологии Скорохода–Линдвалла к предельному процессу $(X_t)_{t \geq 0}$.

Лемма 7.1 (Фату). Для любой непрерывной неотрицательной функции $f = f(t, x)$ и любого $T > 0$

$$\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbf{E} \int_0^T f(t, X_t^\varepsilon) dt \geq \mathbf{E} \int_0^T f(t, X_t) dt.$$

Доказательство. В силу слабой сходимости при любом $k \geq 1$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbf{E} \int_0^T [k \wedge f(t, X_t^\varepsilon)] dt \geq \mathbf{E} \int_0^T [k \wedge f(t, X_t)] dt, \quad k \geq 1.$$

Поэтому

$$\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbf{E} \int_0^T f(t, X_t^\varepsilon) dt \geq \mathbf{E} \int_0^T [k \wedge f(t, X_t)] dt, \quad k \geq 1.$$

Требуемое заключение выводится отсюда с применением теоремы о монотонной сходимости.

Пусть $(u_t^\varepsilon)_{t \geq 0}$, $\varepsilon \in (0, 1)$, — семейство измеримых процессов, $\int_0^T |u_t^\varepsilon| dt < \infty$. Положим $U_t^{\pm, \varepsilon} = \int_0^t u_s^{\pm, \varepsilon} ds$, где $u_s^{+, \varepsilon} = 0 \vee u_s^\varepsilon$ и $u_s^{-, \varepsilon} = -[0 \wedge u_s^\varepsilon]$. Обозначим $\mathbf{C}_{[0, T]}^+$ подпространство неубывающих функций пространства $\mathbf{C}_{[0, T]}$ и ρ равномерную метрику. Следующая лемма является переформулировкой теоремы 5.1 из [17].

Лемма 7.2. (i) Пусть $U_t^{\pm, \varepsilon}$ сходятся слабо в метрическом пространстве $((\mathbf{C}_{[0, T]}^+)^2, \rho^2)$ к $U_t^\pm$. Если $\sup_\varepsilon \mathbf{E} \int_0^T |u_t^\varepsilon|^{1+\gamma} dt < \infty$, $\gamma > 0$, то найдутся неотрицательные измеримые процессы $(u_t^\pm)_{t \leq T}$ такие, что $dU_t^\pm = u_t^\pm dt$ (с $u_t = u_t^+ - u_t^-$ и $\mathbf{E} \int_0^T |u_t^\pm|^{1+\gamma} dt < \infty$).

(ii) Пусть $q(t, x)$ — неотрицательная непрерывная функция, выпуклая по x , и для γ из (i) найдется положительная константа c такая, что $q(t, x) \geq c|x|^{1+\gamma}$. Если $\sup_\varepsilon \mathbf{E} \int_0^T q(t, u_t^\varepsilon) dt < \infty$, то $\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbf{E} \int_0^T q(t, u_t^\varepsilon) dt \geq \mathbf{E} \int_0^T q(t, u_t) dt$.

7.2. Непрерывные функционалы. Пусть $V = V(t) \in \mathbf{C}_{[0, T]}$ — непрерывная функция ограниченной вариации. Для любых $t \leq T$ и $v = v(t) \in \mathbf{C}_{[0, T]}$ положим $G_t = \int_0^t v(s) dV(s)$ и рассмотрим $G_t = G_t(v, V', V'')$ как функцию четырех переменных t, v, V', V'' . Здесь $V' = V'(t)$ и $V'' = V''(t)$ являются минимальными неубывающими функциями такими, что $V = V' - V''$.

Лемма 7.3. $G_t(v, V', V'')$ непрерывна по v, V', V'' равномерно по t .

Доказательство. Пусть v неотрицательная, а V неубывающая функции. В этом случае $V = V'$ и утверждение леммы

можно переформулировать таким образом: если $\lim_n \sup_{t \leq T} |v^n(t) - v^0(t)| = 0$ и $\lim_n \sup_{t \leq T} |V^n(t) - V^0(t)| = 0$, то $\lim_n \sup_{t \leq T} |G_t(v^n, V^n, 0) - G_t(v^0, V^0, 0)| = 0$.

В силу теоремы Хелли, $\lim_n \int_0^t v^0(s) d(V^n(s) - V^0(s)) = 0$. Поскольку

$$\begin{aligned} |G_t(v^n, V^n, 0) - G_t(v^0, V^0, 0)| &\leq \sup_{t \leq T} |v^n(t) - v^0(t)| V^n(T) \\ &\quad + \left| \int_0^t v^0(s) d(V^n(s) - V^0(s)) \right|, \end{aligned}$$

при каждом t получаем $\lim_n |G_t(v^n, V^n, 0) - G_t(v^0, V^0, 0)| = 0$. Равномерная сходимость по t следует из теоремы Пойя (см. задачу 5.3.2 в [16]) и того факта, что $G_t(v^n, V^n, 0)$ и $G_t(v^0, V^0, 0)$ — непрерывные неубывающие по t функции.

В общем случае используется разложение

$$\begin{aligned} G_t(v, V', V'') &= G_t(v^+, V', 0) - G_t(v^-, V', 0) \\ &\quad - G_t(v^+, 0, V'') + G_t(v^-, 0, V''). \end{aligned}$$

Лемма 7.3 доказана.

7.3. Обобщенный принцип усреднения. Пусть ξ_t — эргодический процесс: существует вероятностная мера $\lambda = \lambda(dy)$ такая, что для любой ограниченной непрерывной функции $f = f(y)$ $\mathbf{P}\text{-}\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_0^1 f(\xi_{t/\epsilon}) dt = \int_{\mathbf{R}} f(y) \lambda(dy)$.

Лемма 7.4. Пусть $g = g(t, x, y)$, $x, y \in \mathbf{R}$, $t \leq T$, — непрерывная функция, удовлетворяющая условиям линейного роста и Липшица по x (равномерно по (t, y)). Положим $G(t, x) = \int_{\mathbf{R}} g(t, x, y) \lambda(dy)$. Пусть семейство случайных процессов $(X_t^\epsilon)_{t \leq T}$, $\epsilon \in (0, 1)$, с траекториями из $\mathbf{D}_{[0, T]}$ удовлетворяет следующим условиям:

$$\lim_{c \rightarrow \infty} \left[\limsup_{\epsilon \rightarrow 0} \mathbf{P} \left\{ \sup_{t \leq T} |X_t^\epsilon| > c \right\} \right] = 0;$$

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \left\{ \limsup_{\epsilon \rightarrow 0} \left[\sup_{t' < T} \mathbf{P} \left\{ \sup_{0 \leq t \leq \delta} |X_{t'+t}^\epsilon - X_{t'}^\epsilon| > \nu \right\} \right] \right\} = 0, \quad \forall \nu > 0.$$

Тогда $\mathbf{P}\text{-}\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \sup_{t \leq T} \left| \int_0^t [g(s, X_s^\epsilon, \xi_{s/\epsilon}) - G(s, X_s^\epsilon)] ds \right| = 0$.

Доказательство леммы подобно доказательству (6.8) в [17].

7.4. Свойства слабо зависимых стационарных процессов.

Пусть $(\eta_t)_{t \in \mathbf{R}}$ — стационарный в узком смысле эргодический процесс $((\mathcal{F}_t^\eta)_{t \in \mathbf{R}}$ — семейство σ -алгебр, порожденное η_t и удовлетворяющее общим условиям). Предположим, что выполнены следующие условия «слабой зависимости»:

1. $\mathbf{E}\eta_0 = 0$;

2. Для $p > 1$, $\|\eta_0\|_{2p} < \infty$ и $\int_0^\infty \|\mathbf{E}(\eta_t | \mathcal{F}_0^\eta)\|_{2p} dt < \infty$.

Лемма 7.5. Пусть выполнены (С.2)(i) и (С.2)(ii). Тогда процесс $\int_0^t \eta_s ds$, $t \geq 0$, имеет следующие свойства:

1) существует семимартингал $(S_t, \mathcal{F}_t^\eta)_{t \geq 0}$ с $S_0 = -\int_0^\infty \mathbf{E}(\eta_t | \mathcal{F}_0^\eta) dt$, $\mathbf{E}\|S_0\|_{2p} < \infty$ и такой, что $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbf{E}\varepsilon^{-1} \sup_{t \leq T} S_{t/\varepsilon}^2 = 0$;

2) $(\Psi_t, \mathcal{F}_t^\eta)_{t \geq 0}$, с $\Psi_t = S_t - S_0 - \int_0^t \eta_s ds$, является квадратично интегрируемым мартингалом, $\mathbf{E}\Psi_t^2 = \sigma_1^2 t$ (напомним, что $\sigma_1^2 = 2 \int_0^\infty \mathbf{E}(\eta_s \eta_0) ds$) и $\|\Psi_t\|_{2p} < \infty$;

3) случайный объект $(S_t, \eta_t, \text{приращения } \Psi_t, [\Psi, \Psi]_t, \langle \Psi \rangle_t)_{t \geq 0}$ образует стационарный в узком смысле эргодический процесс ($[\Psi, \Psi]_t$ и $\langle \Psi \rangle_t$ являются квадратической вариацией и квадратической характеристикой мартингала Ψ_t соответственно). В частности,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^{-1} \langle \Psi \rangle_{t/\varepsilon} = \sigma_1^2 t, \quad \mathbf{P}\text{-п.н.}, \quad t > 0;$$

4) для каждой ограниченной и непрерывно дифференцируемой функции $k(s)$ и каждого $p \geq 2$ существует константа C_p такая, что для любого $t > 0$

$$\mathbf{E} \sup_{t' \leq t} \left(\int_0^{t'} k(s) \eta_s ds \right)^{2p} \leq C_p \left\{ 1 + t^p \left[1 + \left(\int_0^t |k'(s)|^{2p/(2p-1)} ds \right)^{2p-1} \right] \right\}.$$

Доказательство. Утверждения 1)–3) можно найти в лемме 9.2.1 и следствии к теореме 4.11.3 из [16]. Для утверждения 4) мы только намечаем доказательство.

Если $t \leq 1$, $\mathbf{E} \sup_{t' \leq t} \left(\int_0^{t'} k(s) \eta_s ds \right)^{2p} \leq \sup_s |k(s)|^{2p} \|\eta\|_{2p}^{2p} t^{2p-1}$ вытекает из неравенства Гёльдера. Так как для $p \geq 2$ справедливо $2p - 1 > p$, требуемый результат имеет место. В случае $t > 1$ покажем (здесь и далее $Y_t^* \equiv \sup_{t' \leq t} |Y_{t'}|$), что $\mathbf{E}(S_t^*)^{2p} < \infty$ и $\mathbf{E}[\Psi, \Psi]_1^p < \infty$. В силу 1), $S_1^* \leq |S_0| + \int_0^1 |\eta_t| dt + \Psi_1^*$. Поэтому $\|S_1^*\|_{2p}^{2p} \leq 3^{2p-1} [\mathbf{E}|S_0|^{2p} + \|\eta_0\|_{2p}^{2p} + \mathbf{E}(\Psi_1^*)^{2p}]$. Далее, по неравенству Дуба $\mathbf{E}(\Psi_1^*)^{2p} \leq (2p/(2p-1))^{2p} \mathbf{E}\Psi_1^{2p} (< \infty)$. Поэтому первое неравенство выполняется. Второе же следует в силу неравенства Буркхольдера–Ганди $\mathbf{E}[\Psi, \Psi]_1^p \leq K_p \mathbf{E}(\Psi_1^*)^{2p}$. Остальная часть доказательства использует следующий факт: существует константа c_p такая, что

$$\mathbf{E}(S_t^*)^{2p} \leq c_p t \quad \text{и} \quad \mathbf{E}[\Psi, \Psi]_t \leq c_p (1+t)^p. \quad (7.1)$$

Чтобы проверить первое неравенство в (7.1), положим $\alpha_k = \sup_{k-1 \leq t' \leq k} |S_{t'}|$ и заметим, что $S_t^* \leq \max_{k \leq t} \alpha_k$. Так как α_k , $k \geq 1$, является стационарным процессом, то $\mathbf{E}(S_t^*)^{2p} \leq \mathbf{E} \max_{k \leq t} \alpha_k^{2p} \leq \sum_{k \leq t} \mathbf{E} \alpha_k^{2p} \leq t \mathbf{E} \alpha_1^{2p}$ (заметим, что $\alpha_1 = S_1^*$ и, значит, $\mathbf{E} \alpha_1^{2p} < \infty$). Для доказательства второй части (7.1) используем тот факт, что $[\Psi, \Psi]_t$ — возрастающий процесс со стационарными приращениями ($[z]$ — целая часть z):

$$[\Psi, \Psi]_t \leq [\Psi, \Psi]_{1+[t]} \leq [\Psi, \Psi]_1 + \sum_{k=1}^{[t]} ([\Psi, \Psi]_{k+1} - [\Psi, \Psi]_k).$$

Положим $\beta_k = ([\Psi, \Psi]_{k+1} - [\Psi, \Psi]_k)$ и воспользуемся тем, что β_k имеет то же распределение, что и $[\Psi, \Psi]_1$. По неравенству Гёльдера

$$\mathbf{E}[\Psi, \Psi]_t^p \leq (1 + [t])^{p-1} \left[\mathbf{E}\beta_1^p + \mathbf{E} \sum_{k=1}^{[t]} \beta_k^p \right] = (1 + [t])^p \mathbf{E}\beta_1^p.$$

Таким образом, (7.1) имеет место.

Используя утверждение 1) и интегрируя по частям, получаем

$$\int_0^t k(s) \eta_s ds = k(t) S_t - k(0) S_0 - \int_0^t S_s k'(s) ds - \int_0^t k(s) d\Psi_s.$$

Поэтому по неравенству Гёльдера

$$\begin{aligned} & \sup_{t' \leq t} \left(\int_0^{t'} k(s) \eta_s ds \right)^{2p} \\ & \leq 4^{2p-1} \left\{ \sup_{t \leq T} |k(t)|^{2p} \sup_{t' \leq t} |S_{t'}|^{2p} + |k(0)|^{2p} |S_0|^{2p} \right. \\ & \quad \left. + \left(\int_0^t |S_s| |k'(s)| ds \right)^{2p} + \sup_{t' \leq t} \left| \int_0^{t'} k(s) d\Psi_s \right|^{2p} \right\}. \quad (7.2) \end{aligned}$$

Нам осталось только взять математическое ожидание от обеих частей (7.2) и оценить соответствующие члены. Поскольку $k(t)$ ограничена и (7.1) выполнено, только два последних члена в правой части (7.2) требуют оценки. Применяя неравенство Гёльдера, получаем (напомним, что $t > 1$)

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \left(\int_0^t |S_s| |k'(s)| ds \right)^{2p} & \leq \left(\int_0^t |k'(s)|^{2p/(2p-1)} ds \right)^{2p-1} \int_0^t \mathbf{E} |S_s|^{2p} ds \\ & \leq t^p \mathbf{E} |S_0|^{2p} \left(\int_0^t |k'(s)|^{2p/(2p-1)} ds \right)^{2p-1}. \end{aligned}$$

С другой стороны, неравенства Буркхольдера–Ганди и (7.1) влекут за собой

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \sup_{t' \leq t} \left| \int_0^{t'} k(s) d\Psi_s \right|^{2p} & \leq K_{2p} \left(\int_0^t k^2(s) d[\Psi, \Psi]_s \right)^p \\ & \leq K_{2p} \sup_{t \leq T} |k(t)|^{2p} [\Psi, \Psi]_t \leq K_{2p} \sup_{t \leq T} |k(t)|^{2p} c_p (1 + t)^p, \end{aligned}$$

и, значит, утверждение 4) выполнено. Лемма 7.5 доказана.

7.5. Равномерная сходимость. Пусть случайные процессы α_t^ε , β_t^ε , γ_t^ε , M_t^ε и V_t^ε определены на стохастическом базисе $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t^\varepsilon)_{t \leq T}, \mathbf{P})$; $|\alpha_t^\varepsilon| \leq \pi_t^\varepsilon$, π_t^ε и β_t^ε являются $\mathcal{F}_t^\varepsilon$ -предсказуемыми, M_t^ε — квадратично интегрируемый мартингал, V_t^ε — непрерывный процесс. Пусть $\langle M^\varepsilon \rangle_t$ имеет плотность m_t^ε .

Лемма 7.6. Предположим, что $|\beta_t^\varepsilon| \leq \ell$, $|\gamma_t^\varepsilon| \leq \ell$, $m_t^\varepsilon \leq \ell$ и $\sup_\varepsilon \mathbf{E} \sup_{t \leq T} (\pi_t^\varepsilon)^2 < \infty$. Пусть

$$\Delta_t^\varepsilon = \int_0^t \left[\alpha_s^\varepsilon \Delta_s^\varepsilon + \gamma_s^\varepsilon \sup_{s' \leq s} |\Delta_{s'}^\varepsilon| \right] ds + \int_0^t \beta_s^\varepsilon \Delta_{s-}^\varepsilon dM_s^\varepsilon + V_t^\varepsilon.$$

Если $\mathbf{P}\text{-}\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sup_{t \leq T} |V_t^\varepsilon| = 0$, то $\mathbf{P}\text{-}\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sup_{t \leq T} |\Delta_t^\varepsilon| = 0$.

Доказательство. Поскольку V_t^ε — непрерывный процесс, можно показать, что $\mathbf{P}\text{-}\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sup_{t \leq T} |V_t^\varepsilon| = 0$ влечет за собой $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbf{E} \sup_{t \leq T \wedge \tau_n^\varepsilon} |V_t^\varepsilon|^2 = 0$, где $\tau_n^\varepsilon = \inf\{t: |V_t^\varepsilon| \geq n\}$. Поэтому без потери общности можно предположить, что $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbf{E} \sup_{t \leq T} |V_t^\varepsilon|^2 = 0$. В этом случае положим

$$\delta_t^\varepsilon = \sup_{t' \leq t} (\Delta_{t'}^\varepsilon)^2 I\left(\sup_{t' \leq t} \pi_{t'}^\varepsilon \leq N\right).$$

Поэтому (здесь ℓ может зависеть от N , но не от ε)

$$\delta_t^\varepsilon \leq \ell \left(\int_0^t \delta_s^\varepsilon ds + \sup_{t' \leq t} \left(\int_0^{t'} I\left(\sup_{t' \leq s} \pi_{t'}^\varepsilon \leq N\right) \beta_s^\varepsilon \Delta_{s-}^\varepsilon dM_s^\varepsilon \right)^2 + \sup_{t' \leq T} |V_{t'}^\varepsilon|^2 \right).$$

Беря математическое ожидание от обеих частей и применяя неравенство Дуба ко второму члену в правой части:

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \sup_{t' \leq t} \left(\int_0^{t'} I\left(\sup_{t' \leq s} \pi_{t'}^\varepsilon \leq N\right) \beta_s^\varepsilon \Delta_{s-}^\varepsilon dM_s^\varepsilon \right)^2 \\ \leq 4 \mathbf{E} \int_0^t I\left(\sup_{t' \leq s} \pi_{t'}^\varepsilon \leq N\right) (\beta_s^\varepsilon)^2 (\Delta_{s-}^\varepsilon)^2 m_s^\varepsilon ds, \end{aligned}$$

получаем $D_t^\varepsilon \leq \ell \left(\int_0^t D_s^\varepsilon ds + \mathbf{E} \sup_{t' \leq T} |V_{t'}^\varepsilon|^2 \right)$, $\forall t \leq T$, где $D_t^\varepsilon = \mathbf{E} \delta_t^\varepsilon$. Теперь, применяя неравенство Гронуолла–Беллмана, приходим к $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} D_T^\varepsilon = 0$ и, в силу произвольности N , можем заключить, что для каждого $\kappa > 0$

$$\begin{aligned} \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbf{P} \left\{ \sup_{t \leq T} |\Delta_t^\varepsilon| > \kappa \right\} &\leq \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbf{P} \left\{ \sup_{t \leq T} \pi_t^\varepsilon > N \right\} \\ &\leq \frac{1}{N^2} \sup_\varepsilon \mathbf{E} \sup_{t' \leq T} (\pi_{t'}^\varepsilon)^2 \rightarrow 0, \quad N \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Лемма 7.6 доказана.

7.6. Ограниченная марковская обратная связь. Управляемый процесс X_t , заданный на стохастическом базисе $(\mathcal{C}_{[0,T]}, \mathcal{B}^Q, (\mathcal{F}_t^Q)_{t \geq 0}, Q)$, является единственным решением уравнения Ито с винеровским процессом W_t и начальным условием $X_0 = x_0$:

$$dX_t = \left[A_0(t, X_t) + a_1(t, X_t) u(t, X_{[0,t)}) \right] dt + B(t, X_t) dW_t. \quad (7.3)$$

Функции $A_0(t, x)$, $a_1(t, x)$ и $B(t, x)$ удовлетворяют условиям из § 2, а обратная связь $u(t, X_{[0,t)})$ ограничена константой L . Предположим также, что

$$B^2(t, x) \geq \frac{1}{\ell} > 0. \quad (7.4)$$

Выберем $v(t, X_t) = \mathbf{E}^Q(u(t, X_{[0,t]}) | X_t)$, точнее, такую версию условного математического ожидания, что функция $v(t, x)$ является измеримой по t, x и ограниченной той же константой L (напомним, что $\mathbf{E}^Q$ означает математическое ожидание по мере Q). Теперь определим управляемый процесс X_t на новом стохастическом базисе $(C_{[0,T]}, \mathcal{B}^Q, (\mathcal{F}_t^Q)_{t \geq 0}, Q')$ с Q' -винеровским процессом W'_t :

$$dX_t = [A_0(t, X_t) + a_1(t, X_t)v(t, X_t)]dt + B(t, X_t)dW'_t. \quad (7.5)$$

При этом мера Q' определяется следующим образом: $dQ' = \Lambda_T dQ$ с

$$\Lambda_T = \exp \left\{ \int_0^T h(s, X_{[0,s]}) dW_s - \frac{1}{2} \int_0^T h^2(t, X_{[0,s]}) ds \right\},$$

где $h(t, X_{[0,t]}) = (a_1(t, X_t)/B(t, X_t)) [v(t, X_t) - u(t, X_{[0,t]})]$. Заметим, что $h(t, X_{[0,t]})$ ограничена и, значит, $\mathbf{E}^Q \Lambda_T = 1$.

Аппроксимируем $v(t, x)$ функциями $v^j(t, x)$, $j \geq 1$, таким образом, чтобы

$$Q' - \lim_j \int_0^T [v(t, X_t) - v^j(t, X_t)]^2 dt = 0 \quad (7.6)$$

и, кроме того, при каждом j функция $v^j(t, x)$ ограничена и удовлетворяет условию Липшица по x равномерно по $t \leq T$. На измеримом пространстве $(C_{[0,T]}, \mathcal{B}^{Q^j})$ введем меру Q^j , эквивалентную Q' ($Q^j \sim Q'$) такую, что процесс X_t , определенный на стохастическом базисе $(C_{[0,T]}, \mathcal{B}^{Q^j}, (\mathcal{F}_t^{Q^j})_{t \geq 0}, Q^j)$, является слабым решением уравнения Ито (относительно нового винеровского процесса W_t^j)

$$dX_t = [A_0(t, X_t) + a_1(t, X_t)v^j(t, X_t)]dt + B(t, X_t)dW_t^j. \quad (7.7)$$

Очевидно, что

$$\frac{dQ^j}{dQ'} := \lambda^j = \exp \left\{ \int_0^T h^j(t, X_t) dW'_t - \frac{1}{2} \int_0^T (h^j(t, X_t))^2 dt \right\},$$

где $h^j(t, X_t) = (a_1(t, X_t)/B(t, X_t)) [v^j(t, X_t) - v(t, X_t)]$.

Обозначим $\|Q' - Q^j\|$ полную вариацию разности $Q' - Q^j$.

Лемма 7.7. При сделанных предположениях

1) $\lim_j \|Q' - Q^j\| = 0$;

2) $(X_t, \mathcal{F}_t^{Q^j}, Q')$ является марковским процессом;

3) для каждой $t \leq T$ и неотрицательной измеримой функции $f(x)$ справедливо равенство $\mathbf{E}^{Q^j} f(X_t) = \mathbf{E}^{Q'} f(X_t)$.

Доказательство. 1) Заметим, что $\|Q' - Q^j\| = \mathbf{E}^{Q'} |1 - \lambda^j|$. В силу (7.6), ограниченность $a_1(t, x)$ (см. (A.2)) и (7.4) влекут за собой $Q' - \lim_j \int_0^T (h^j(t, X_t))^2 dt = 0$. Поэтому (см. задачу 1.9.2 в [16]) также $Q' - \lim_j \int_0^T h^j(t, X_t) dW'_t = 0$. Следовательно, $Q' - \lim_j \lambda^j = 1$, и по теореме Шеффе (см. [4]) $\lim_j \mathbf{E}^{Q'} |1 - \lambda^j| = 0$.

2) Для проверки марковского свойства покажем, что для каждого $t > t'$ и любой ограниченной измеримой функции $g(x)$: $\mathbf{E}^{Q'}(g(X_t) | \mathcal{F}_{t'}^{Q^x}) = \mathbf{E}^{Q'}(g(X_t) | X_{t'})$ Q' -п.н. В силу свойств условного математического ожидания

$$\begin{aligned} & \mathbf{E}^{Q'} \left(\mathbf{E}^{Q'}(g(X_t) | \mathcal{F}_{t'}^{Q^x}) - \mathbf{E}^{Q'}(g(X_t) | X_{t'}) \right)^2 \\ &= \mathbf{E}^{Q'} \left(g(X_t) - \mathbf{E}^{Q'}(g(X_t) | X_{t'}) \right)^2 - \mathbf{E}^{Q'} \left(g(X_t) - \mathbf{E}^{Q'}(g(X_t) | \mathcal{F}_{t'}^{Q^x}) \right)^2. \end{aligned}$$

Марковское свойство имеет место, если совпадают

$$\mathbf{E}^{Q'} \left(g(X_t) - \mathbf{E}^{Q'}(g(X_t) | X_{t'}) \right)^2 \quad \text{и} \quad \mathbf{E}^{Q'} \left(g(X_t) - \mathbf{E}^{Q'}(g(X_t) | \mathcal{F}_{t'}^{Q^x}) \right)^2.$$

С другой стороны, очевидно, что уравнение Ито (7.7) имеет единственное сильное решение и $(X_t, \mathcal{F}_t^{Q'}, Q^j)$ — марковский процесс:

$$\mathbf{E}^{Q^j} \left(g(X_t) - \mathbf{E}^{Q^j}(g(X_t) | X_{t'}) \right)^2 = \mathbf{E}^{Q^j} \left(g(X_t) - \mathbf{E}^{Q^j}(g(X_t) | \mathcal{F}_{t'}^{Q^x}) \right)^2.$$

Следовательно марковское свойство имеет место, если

$$\begin{aligned} & \lim_j \mathbf{E}^{Q^j} \left(g(X_t) - \mathbf{E}^{Q^j}(g(X_t) | \mathcal{F}_{t'}^{Q^x}) \right)^2 \\ &= \mathbf{E}^{Q'} \left(g(X_t) - \mathbf{E}^{Q'}(g(X_t) | \mathcal{F}_{t'}^{Q^x}) \right)^2, \\ & \lim_j \mathbf{E}^{Q^j} \left(g(X_t) - \mathbf{E}^{Q^j}(g(X_t) | X_{t'}) \right)^2 \\ &= \mathbf{E}^{Q'} \left(g(X_t) - \mathbf{E}^{Q'}(g(X_t) | X_{t'}) \right)^2. \end{aligned} \tag{7.8}$$

Чтобы проверить первую часть в (7.8), напомним свойство условного математического ожидания быть оптимальной в среднеквадратическом смысле оценкой. В соответствии с этим получаем верхнюю оценку $\mathbf{E}^{Q^j} (g(X_t) - \mathbf{E}^{Q^j}(g(X_t) | \mathcal{F}_{t'}^{Q^x}))^2 \leq \mathbf{E}^{Q^j} (g(X_t) - \mathbf{E}^{Q'}(g(X_t) | \mathcal{F}_{t'}^{Q^x}))^2$, которая вместе с доказанным утверждением 1) влечет за собой

$$\begin{aligned} & \limsup_j \mathbf{E}^{Q^j} \left(g(X_t) - \mathbf{E}^{Q^j}(g(X_t) | \mathcal{F}_{t'}^{Q^x}) \right)^2 \\ &\leq \mathbf{E}^{Q'} \left(g(X_t) - \mathbf{E}^{Q'}(g(X_t) | \mathcal{F}_{t'}^{Q^x}) \right)^2. \end{aligned} \tag{7.9}$$

С другой стороны, $\mathbf{E}^{Q'} (g(X_t) - \mathbf{E}^{Q^j}(g(X_t) | \mathcal{F}_{t'}^{Q^x}))^2 \geq \mathbf{E}^{Q'} (g(X_t) - \mathbf{E}^{Q'}(g(X_t) | \mathcal{F}_{t'}^{Q^x}))^2$, и, поскольку

$$\begin{aligned} & \mathbf{E}^{Q^j} \left(g(X_t) - \mathbf{E}^{Q^j}(g(X_t) | \mathcal{F}_{t'}^{Q^x}) \right)^2 \\ &\geq \mathbf{E}^{Q'} \left(g(X_t) - \mathbf{E}^{Q^j}(g(X_t) | \mathcal{F}_{t'}^{Q^x}) \right)^2 - \ell \|Q' - Q^j\|, \end{aligned}$$

можно заключить, что

$$\begin{aligned} & \liminf_j \mathbf{E}^{Q^j} \left(g(X_t) - \mathbf{E}^{Q^j}(g(X_t) | \mathcal{F}_{t'}^{Q^x}) \right)^2 \\ &\geq \mathbf{E}^{Q'} \left(g(X_t) - \mathbf{E}^{Q'}(g(X_t) | \mathcal{F}_{t'}^{Q^x}) \right)^2. \end{aligned} \tag{7.10}$$

Первая часть в (7.8), таким образом, вытекает из (7.9) и (7.10). Вторая часть в (7.8) проверяется аналогично.

Для доказательства утверждения 3) достаточно проверить утверждение только для ограниченной функции $f(x)$. Используем теперь тот факт, что $Q \sim Q'$ и $dQ/dQ' = \Lambda_T^{-1}$. Применяя очевидное равенство

$$\mathbf{E}^{Q'} f(X_t) \Lambda_T^{-1} = \mathbf{E}^{Q^x} f(X_t),$$

покажем, что

$$\mathbf{E}^{Q'} f(X_t) [\Lambda_T^{-1} - 1] = 0.$$

Наряду со случайной величиной Λ_T определим случайный процесс Λ_t , $0 \leq t \leq T$, с

$$\Lambda_t = \exp \left\{ \int_0^t h(s, X_{[0,s]}) dW_s - \frac{1}{2} \int_0^t h^2(s, X_{[0,s]}) ds \right\}.$$

Поскольку $\Lambda_T = dQ'/dQ$, процесс Λ_t^{-1} является Q' -мартингалом и, в силу формулы Ито,

$$\Lambda_T^{-1} - 1 = \int_0^T \Lambda_s^{-1} \frac{a_1(s, X_s)}{B(s, X_s)} [u(s, X_{[0,s]}) - v(s, X_s)] dW'_s.$$

Аналогичное представление для $f(X_t)$ получается с помощью мартингала

$$Y_{t'} := \mathbf{E}^{Q'}(f(X_t) | \mathcal{F}_{t'}^{Q^x}), \quad t' \leq t,$$

и использования того факта, что Q' -п.н. $Y_t = f(X_t)$. Так как $f(x)$ ограничена, то Y_t п.н. ограничена той же константой и, значит, $Y_{t'}$, $t' \leq t$, — квадратично интегрируемый мартингал. Более того, поскольку уравнение (7.5) имеет единственное слабое решение, в силу задачи 4.8.1(d) из [16], $Y_{t'}$ может быть представлено в виде интеграла Ито: $Y_{t'} = \mathbf{E}^{Q'} f(X_t) + \int_0^{t'} H(s, X_{[0,s]}) dW'_s$, с $\mathcal{F}_t^{Q^x}$ -предсказуемым подынтегральным выражением $H(s, X_{[0,s]}) = \{B(s, X_s)\}^{-1} d\langle Y, W' \rangle_s / ds$. Взаимная квадратическая характеристика $\langle Y, W' \rangle_t$ определяется как предел по Q' -вероятности величин $\sum_{t_i^n \leq t'} \mathbf{E}^{Q'}([Y_{t_i^n} - Y_{t_{i-1}^n}][W'_{t_i^n} - W'_{t_{i-1}^n}] | \mathcal{F}_{t_{i-1}^n}^{Q^x})$ с $0 \equiv t_0^n < t_1^n < \dots < t_n^n \equiv t'$, $n \geq 1$, таких, что $\max_j (t_j^n - t_{j-1}^n) \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$. С другой стороны, в силу марковского свойства $(X_t, \mathcal{F}_t^{Q^x}, Q')$, условное математическое ожидание $\mathbf{E}^{Q'}(\cdot | \mathcal{F}_{t_{i-1}^n}^{Q^x})$ в последней формуле заменяется на $\mathbf{E}^{Q'}(\cdot | X_{t_{i-1}^n})$. Это позволяет заключить, что $d\langle Y, W' \rangle_s / ds$ является функцией s и X_s , или, другими словами, что существует версия $H(s, X_s)$ интегранта $H(s, X_{[0,s]})$. Последнее влечет за собой

$$Y_t = \mathbf{E}^{Q'} f(X_t) + \int_0^t H(s, X_s) dW'_s.$$

Отсюда

$$\begin{aligned} & \mathbf{E}^{Q'} f(X_t) [\Lambda_T^{-1} - 1] \\ &= \int_0^t \mathbf{E}^{Q'} \left(\Lambda_s^{-1} \frac{a_1(s, X_s)}{B(s, X_s)} [u(s, X_{[0,s)}) - v(s, X_s)] H(s, X_s) \right) ds \\ &= \int_0^t \mathbf{E}^{Q^X} \left(\frac{a_1(s, X_s)}{B(s, X_s)} [u(s, X_{[0,s)}) - v(s, X_s)] H(s, X_s) \right) ds = 0. \end{aligned}$$

Лемма 7.7 доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Aldous D. J. Stopping time and tightness. — Ann. Probab., 1978, v. 6, p. 335–340.
2. Bensoussan A. Stochastic Control by Functional Analysis Methods. Amsterdam: North-Holland, 1982, 410 p.
3. Bensoussan A., Blankenship G. L. Singular perturbations in stochastic control. — Lectures Notes in Control and Inform. Sci., 1987, v. 90, p. 171–260.
4. Billingsley P. Convergence of Probability Measures. New York: Wiley, 1979.
5. Borkar V. S. Optimal Control of Diffusion Processes. Harlow/New York: Longman/Wiley, 1989, 196 p.
6. Fleming W. H., Nisio M. On stochastic relaxed controls for partially observed diffusions. — Nagoya Math. J., 1984, v. 93, p. 71–108.
7. Fleming W. H., Rishel R. W. Deterministic and Stochastic Optimal Control. Berlin: Springer-Verlag, 1975.
8. Жакоб Ж., Ширяев А. Н. Предельные теоремы для случайных процессов. Т. 1, 2. М.: Физматлит, 1994, 544 с.; 368 с.
9. Крылов Н. В. Управляемые процессы диффузионного типа. М.: Наука, 1977, 399 с.
10. Крылов Н. В. Об одном подходе к управляемым диффузионным процессам. — Теория вероятн. и ее примен., 1986, т. XXXI, в. 4, с. 685–709.
11. Kushner H. J. Approximation and Weak Convergence Methods for Random Processes, with Applications to Stochastic Systems Theory. Cambridge: MIT Press, 1984.
12. Kushner H. J., Runggaldier W. J. Nearly optimal state feedback controls for stochastic systems with wideband noise disturbances. — SIAM J. Control Optim., 1987, v. 25, p. 289–315.
13. Kushner H. J., Runggaldier W. J. Filtering and control for wide bandwidth noise driven systems. — IEEE Trans. Automat. Control, 1987, v. 23, p. 123–133.
14. Kushner H. J. Weak Convergence Methods and Singularly Perturbed Stochastic Control and Filtering Problems. Basel: Birkhäuser, 1990.
15. Kushner H. J., Dupuis P. G. Numerical Methods for Stochastic Control Problems in Continuous Time. New York: Springer-Verlag, 1992.
16. Лунцер Р. Ш., Ширяев А. Н. Теория мартингалов. М.: Наука, 1986, 512 с.
17. Liptser R. S., Runggaldier W. J., Taksar M. Deterministic approximation for stochastic control problem. — SIAM J. Control Optim., 1996, v. 34, p. 161–178.
18. Прагараускас Г. О теории управления разрывными случайными процессами. — Труды школы-семинара по теории случайных процессов (Друскининкай, 1974). Вильнюс: ИФМ АН ЛитССР, 1975, с. 252–281.
19. Sethi S. P., Zhang Q. Multilevel hierarchical decision making in stochastic marketing-production systems. — SIAM J. Control Optim., 1995, v. 33, № 2, p. 528–553.

Поступила в редакцию
12.I.1998