Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Боровков, Переходные явления для случайных блужданий с разнораспределенными скачками, имеющими бесконечные дисперсии, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2005, том 50, выпуск 2, 224–240

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp105>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.80.73.141

26 апреля 2023 г., 15:17:29

© 2005 г.

БОРОВКОВ А. А.*

ПЕРЕХОДНЫЕ ЯВЛЕНИЯ ДЛЯ СЛУЧАЙНЫХ БЛУЖДЕНИЙ С РАЗНОРАСПРЕДЕЛЕННЫМИ СКАЧКАМИ, ИМЕЮЩИМИ БЕСКОНЕЧНЫЕ ДИСПЕРСИИ¹⁾

Пусть $\zeta_1, \zeta_2, \dots$ — независимые случайные величины,

$$Z_n = \sum_{i=1}^n \zeta_i, \quad \bar{Z}_n = \max_{k \leq n} Z_k, \quad Z = \bar{Z}_\infty.$$

Хорошо известно, что если ζ_i одинаково распределены, то Z есть собственная случайная величина при $E\zeta_i = -a < 0$ и $Z = \infty$ п.н., если $a = 0$. Предельное распределение $\bar{Z}_n$ при $n \rightarrow \infty$, $a \rightarrow 0$ (в схеме серий) и $E\zeta_i^2 < \infty$ изучено достаточно полно (см., например, [1]–[3]).

В работе изучается предельное распределение $\bar{Z}_n$ при $E\zeta_i \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$, в случае, когда $E\zeta_i^2 = \infty$, а слагаемые ζ_i являются разнораспределенными.

Ключевые слова и фразы: случайные блуждания, максимум сумм, переходные явления, сходимость к устойчивым процессам, разнораспределенные слагаемые, бесконечная дисперсия.

1. Введение. Под переходными явлениями в задачах о пересечении границы траекторией случайного блуждания обычно понимают следующее. Пусть $\zeta, \zeta_1, \zeta_2, \dots$ — независимые одинаково распределенные случайные величины,

$$Z_n = \sum_{i=1}^n \zeta_i, \quad \bar{Z}_n = \max_{k \leq n} Z_k, \quad Z = \bar{Z}_\infty.$$

Хорошо известно, что если $E\zeta = -a < 0$, то Z есть собственная случайная величина, и $Z = \infty$ п.н., если $a = 0$. Переходными называют явления, возникающие при изучении распределения Z (или максимума конечного числа сумм), когда $0 < a \rightarrow 0$. Чтобы сделать постановку задачи более точной, надо ввести в рассмотрение *схему серий*, когда

* Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, просп. Академика Коптюга, 4, 630090 Новосибирск, Россия; e-mail: borovkov@math.nsc.ru

¹⁾ Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 02-01-00902) и INTAS (проект № 03-51-5018).

распределение ζ зависит от некоторого меняющегося параметра, который в нашем случае может быть отождествлен с a , и рассматривать ситуацию, когда $a \rightarrow 0$. Иногда бывает удобным рассматривать и традиционную схему серий, т.е. последовательности $\zeta_{1,n}, \zeta_{2,n}, \dots$, где распределение $\zeta_{k,n}$ зависит от номера серии n . В этом случае $a = a(n)$ зависит от n таким образом, что $a(n) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Однако при изучении распределения Z введение схемы серий с параметром n может оказаться искусственным, так как этот параметр в постановке задачи может вообще не участвовать. Поскольку, кроме того, все нормирующие множители в последующем будут функциями от a (а не от n), то часто первый подход к введению схемы серий (с помощью параметра a) представляется более предпочтительным.

В дальнейшем мы будем считать, что имеет место схема серий, в которой распределение $\zeta = \zeta^{(a)}$ зависит от a , но индекс (a) , указывающий на эту зависимость, будем для краткости опускать.

Далее, нам будет удобнее иметь дело с центрированными случайными величинами $\xi_i = \zeta_i + a$, так что $\mathbf{E}\xi_i = 0$. Тогда изучаемый функционал Z от последовательности сумм Z_k будет иметь вид

$$Z = \bar{S}(a) = \sup_{k \geq 0} (S_k - ak), \quad S_n = \sum_{i=1}^n \xi_i.$$

Мы будем рассматривать также максимумы конечного числа сумм

$$\bar{S}_n(a) = \max_{k \leq n} (S_k - ak).$$

Изучение переходных явлений во многом стимулировалось приложениями. В задачах, связанных с системами обслуживания, задача о переходных явлениях возникает в ситуации, когда система работает в условиях «тяжелой нагрузки», т.е. в случае, когда интенсивность входного потока требований близка к максимально возможной интенсивности обслуживания. В этом случае — например, для простейшей одноканальной системы обслуживания, длина очереди (или время обслуживания) в которой в момент n может быть описана с помощью случайной величины $\bar{S}_n(a)$, — мы будем иметь ситуацию, когда a мало.

Известно, что если $\mathbf{E}\xi^2 = \sigma_a^2 \rightarrow \sigma^2 < \infty$ при $a \rightarrow 0$, то для $n = Ta^{-2}$, где $T \leq \infty$ фиксировано, существует предельное распределение $a\bar{S}_n(a)$:

$$\lim_{a \rightarrow 0} \mathbf{P}\{a\bar{S}_n(a) > z\} = \mathbf{P}\left\{\max_{t \leq T} (\sigma w(t) - t) > z\right\}, \quad (1)$$

где $w(t)$ — стандартный винеровский процесс. В частности, при $T = \infty$ правая часть в (1) превращается в $e^{-(2z)/\sigma^2}$. Подробнее об этом см., например, [1]–[3].

В случае $\mathbf{E}\xi^2 = \infty$ нам известны лишь некоторые частные результаты, относящиеся к предельному распределению Z для специальных

типов распределений ζ , см. [4]–[6]. Эти результаты не позволяют понять природу предельных распределений в общем случае. Аналитические методы исследования в названных работах, связанные с факторизационными тождествами, обладают известной ограниченностью, что делает рассматриваемые задачи в их более общей постановке труднодоступными для этих методов.

2. Основные предельные теоремы о сходимости к устойчивым процессам. Мы будем рассматривать более общую постановку задачи, чем описанная во введении. Именно, мы будем предполагать, что *слагаемые ζ_i являются разнораспределенными независимыми случайными величинами в схеме серий*, при этом

$$\mathbf{E}|\zeta_i| < \infty, \quad \text{но} \quad \max_i \mathbf{E}\zeta_i^2 = \infty.$$

В первых двух теоремах, приведенных ниже и относящихся к предельному распределению Z_n при $n \rightarrow \infty$, нам будет удобнее в качестве параметра схемы серий выбрать n . В последующих утверждениях параметр схемы серий будет заменен на значение $a \rightarrow 0$, ассоциированное со средними $n^{-1} \sum_{j=1}^n a_j \rightarrow 0$, а под n мы будем понимать функцию $n = n(a) \uparrow \infty$ при $a \downarrow 0$. В теореме 3 она будет конкретизирована.

В случае бесконечных вторых моментов величин ζ_i отыскание предельных распределений Z_n , $\bar{Z}_n$ возможно лишь в случае, когда распределения сумм $S_n = \sum_{i=1}^n \xi_i$ центрированных случайных величин $\xi_i = \zeta_i + a_i$, $a_i = -\mathbf{E}\zeta_i$, сходятся (после соответствующей нормировки) к устойчивому закону, а средние значения $-a_i$ ведут себя достаточно правильным образом. Это означает, что мы должны предполагать выполненными условия, которые обеспечивали бы такие сходимость и правильность.

Введем в рассмотрение нужные нам обозначения и условия. Пусть $\mathbf{F}_j$ — распределение случайной величины ξ_j . Почти все накладываемые ниже условия будут относиться к «усредненным» распределениям

$$\mathbf{F} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \mathbf{F}_j$$

при n , выбранном подходящим образом. Положим

$$V_j(t) = \mathbf{F}_j((t, \infty)), \quad W_j(t) = \mathbf{F}_j((-\infty, -t)),$$

$$\mathbf{F}_j(t) = V_j(t) + W_j(t) = \mathbf{P}\{|\xi_j| > t\},$$

$$V(t) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n V_j(t), \quad W(t) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n W_j(t), \quad F(t) = V(t) + W(t).$$

Функции V , W , F будем называть *усредненными хвостами*. Там, где надо будет подчеркнуть их зависимость от n , мы будем писать $V^{(n)}$, $W^{(n)}$, $F^{(n)}$ соответственно.

Мы будем предполагать, что усредненные хвосты $F(t)$ удовлетворяют следующим условиям «равномерного правильного изменения» [UR] (uniform regularity).

[UR]. Существует фиксированная (не зависящая от параметра схемы серий) правильно меняющаяся функция $G(t) = t^{-\alpha} L(t)$ ($\alpha \in (1, 2)$), L — медленно меняющаяся функция такая, что

$$1) \quad \lim_{t \rightarrow \infty, n \rightarrow \infty} \frac{F^{(n)}(t)}{G(t)} = 1, \quad (2)$$

другими словами, для любого заданного $\delta > 0$ найдутся n_δ, t_δ , для которых

$$2) \quad \sup_{n \geq n_\delta, t \geq t_\delta} \left| \frac{F^{(n)}(t)}{G(t)} - 1 \right| < \delta; \quad (3)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty, n \rightarrow \infty} \frac{V^{(n)}(t)}{G(t)} = \rho_+ \in [0, 1].$$

Из последнего условия следует, что существует также

$$\lim_{t \rightarrow \infty, n \rightarrow \infty} \frac{W^{(n)}(t)}{G(t)} = \rho_- = 1 - \rho_+ \in [0, 1].$$

Везде в дальнейшем мы будем предполагать, что

$$\mathbf{E} \xi_j = 0.$$

Мы можем сформулировать теперь основную предельную теорему о сходимости к устойчивому закону, которую мы будем использовать. Положим

$$X_n = \frac{S_n}{b(n)}, \quad b(n) = G^{(-1)}\left(\frac{1}{n}\right) = \inf \left\{ t: G(t) \leq \frac{1}{n} \right\}$$

и обозначим через [S] условие «пренебрежимой малости» слагаемых $\xi_j/b(n)$.

[S]. Для любого $\varepsilon > 0$

$$\max_{j \leq n} \mathbf{P}\{|\xi_j| > \varepsilon b(n)\} = \max_{j \leq n} G_j(\varepsilon b(n)) \rightarrow 0$$

при $n \rightarrow \infty$.

Теорема 1. Пусть усредненные хвосты $F^{(n)}$ удовлетворяют условиям [UR]. Тогда при выполнении [S] и при $n \rightarrow \infty$ распределения X_n слабо сходятся к устойчивому распределению $\mathbf{F}^{(\alpha, \rho)}$: $X_n \Rightarrow X^{(\alpha, \rho)}$, $\rho = \rho_+ - \rho_-$, где $X^{(\alpha, \rho)}$ имеет характеристическую функцию

$$\varphi^{(\alpha, \rho)}(t) = \mathbf{E} e^{itX^{(\alpha, \rho)}} = \exp \{ |t|^\alpha B(\alpha, \rho, \phi) \}, \quad \phi = \text{sign } t,$$

$$B(\alpha, \rho, \phi) = \frac{\Gamma(2 - \alpha)}{1 - \alpha} \left[i \rho \phi \sin \frac{\alpha \pi}{2} - \cos \frac{\alpha \pi}{2} \right].$$

Доказательство. Воспользуемся общей теоремой о сходимости к безгранично делимым законам (см., например, [7]). В наших условиях эта теорема приобретает следующий вид.

Пусть $E\xi_j = 0$ и выполнено условие [S]. Для того чтобы при $n \rightarrow \infty$ имела место сходимость

$$X_n \Rightarrow X^{(\alpha, \rho)}, \quad \rho = \rho_+ - \rho_-,$$

необходимо и достаточно выполнение следующих двух условий:

$$1) \quad nV^{(n)}(tb(n)) \rightarrow \rho_+ t^{-\alpha}, \quad nW^{(n)}(tb(n)) \rightarrow \rho_- t^{-\alpha}, \quad (4)$$

$$2) \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \limsup_{n \rightarrow \infty} n \int_{|t| < \varepsilon} t^2 F^{(n)}(b(n) dt) = 0. \quad (5)$$

Для доказательства теоремы 1 нам достаточно убедиться, что условия [UR] влекут за собой (4), (5). Выполнение (4) почти очевидно: для каждого фиксированного t при $n \rightarrow \infty$

$$nV^{(n)}(tb(n)) \sim n\rho_+ G(tb(n)) \sim n\rho_+ t^{-\alpha} G(b(n)) \sim \rho_+ t^{-\alpha}$$

(если $\rho_+ = 0$, то $nV^{(n)}(tb(n)) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$).

Аналогичное соотношение справедливо для $W^{(n)}$.

Для проверки (5) рассмотрим сначала

$$I_+ = n \int_0^\varepsilon t^2 F(b(n) dt) = -\frac{n}{b^2(n)} \int_0^{\varepsilon b(n)} u^2 dV(u) \leq \frac{2n}{b^2(n)} \int_0^{\varepsilon b(n)} uV(u) du.$$

Пусть t_1, n_1 таковы, что в силу условий [UR] $V(u) < 2\rho_+ G(u)$ при $u \geq t_1$, $n \geq n_1$. Тогда при $n \geq n_1$

$$I_+ \leq \frac{nt_1^2}{b^2(n)} + \frac{4n\rho_+}{b^2(n)} \int_{t_1}^{\varepsilon b(n)} uG(u) du, \quad (6)$$

где последнее слагаемое в правой части в силу свойств правильно меняющихся функций асимптотически эквивалентно при $n \rightarrow \infty$ ($b(n) \rightarrow \infty$) величине

$$\frac{4n\rho_+(\varepsilon b(n))^2 G(\varepsilon b(n))}{b^2(n)(2-\alpha)} \sim \frac{4\varepsilon^{2-\alpha}\rho_+}{2-\alpha} nG(b(n)) \sim \frac{4\varepsilon^{2-\alpha}\rho_+}{2-\alpha}.$$

Первое слагаемое в правой части (6) сходится к нулю при $n \rightarrow \infty$, так как $b(n) = n^{1/\alpha} L_b(n)$ (L_b — медленно меняющаяся функция), $\alpha < 2$, $b^2(n) \gg n$.

Из сказанного следует, что

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \limsup_{n \rightarrow \infty} I_+ = 0.$$

Аналогично определяется и оценивается значение I_- . Выполнение условий (4), (5), а вместе с ними и утверждение теоремы, доказаны.

Обозначим далее через $X^{(\alpha, \rho)}(t)$ устойчивый случайный процесс на $[0, T]$, $T > 0$, с распределением $\mathbf{F}^{(\alpha, \rho)}$ для $X^{(\alpha, \rho)}(1)$ и положим

$$X_n(t) = \frac{S_{[nt]}}{b(n)}, \quad t \in [0, T].$$

Пусть $D(0, T)$ — пространство функций на $[0, T]$ без разрывов второго рода с метрикой Скорохода

$$d(f_1, f_2) = \inf_{\lambda} \sup_t [|f_2(t) - f_1(\lambda(t))| + |\lambda(t) - t|],$$

где инфимум берется по всем непрерывным возрастающим функциям $\lambda(t)$ на $[0, T]$ таким, что $\lambda(0) = 0$, $\lambda(T) = 1$.

Нам понадобятся также условия слабой сходимости при $n \rightarrow \infty$ распределений процессов $X_n(\cdot)$ в пространстве $D(0, T)$ к распределению процесса $X^{(\alpha, \rho)}(\cdot)$.

Рассмотрим произвольное фиксированное $\Delta \in (0, T)$ и совокупность случайных величин $\xi_{k+1}, \dots, \xi_{k+[n\Delta]}$ из n -й серии. Для них введем усредненное распределение

$$\mathbf{F}_{(k, \Delta)} = \frac{1}{[n\Delta]} \sum_{j=k+1}^{k+[n\Delta]} \mathbf{F}_j$$

и усредненные хвосты

$$F_{(k, \Delta)}(t) = \frac{1}{[n\Delta]} \sum_{j=k+1}^{k+[n\Delta]} \mathbf{F}_j(t), \quad V_{(k, \Delta)}(t) = \frac{1}{[n\Delta]} \sum_{j=k+1}^{k+[n\Delta]} V_j(t).$$

Для сходимости процессов $X_n(\cdot)$ к однородным устойчивым процессам нам понадобятся однородные условия равномерного правильного изменения, в основе которых лежат условия [UR].

[UR] $_{\Delta}$. Существует фиксированная правильно меняющаяся функция $G(t) = t^{-\alpha} L(t)$ такая, что при каждом фиксированном $\Delta > 0$

$$\begin{aligned} 1) \quad & \lim_{t \rightarrow \infty, n \rightarrow \infty} \frac{n F_{(k, \Delta)}(t)}{G(t)} = 1, \\ 2) \quad & \lim_{t \rightarrow \infty, n \rightarrow \infty} \frac{n V_{(k, \Delta)}(t)}{G(t)} = \rho_+, \end{aligned}$$

где сходимость к пределам равномерна по $k \leq n(T - \Delta)$.

Теорема 2. Пусть усредненные распределения $\mathbf{F}_{(k, \Delta)}$ удовлетворяют условиям [UR] $_{\Delta}$. Тогда при $n \rightarrow \infty$

$$X_n(\cdot) \Rightarrow X^{(\alpha, \rho)}(\cdot), \quad (7)$$

т.е. распределения процесса $X_n(\cdot)$ слабо сходятся в $D(0, T)$ к распределению процесса $X^{\alpha, \rho}(\cdot)$.

Очевидно, что условия теоремы 2 будут выполнены, если найдется $n_0 = o(n)$, $n_0 \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$, такое, что усредненные в n -й серии распределения

$$\mathbf{F}_{(k)} = \frac{1}{n_0} \sum_{j=k+1}^{k+n_0} \mathbf{F}_j \quad (8)$$

равномерно по k удовлетворяют условиям [UR] (при выполнении $\mathbf{E}\xi_j = 0$).

Доказательство теоремы 2. Положим, не ограничивая общности, $T = 1$. Для того чтобы установить сходимость (8), мы должны убедиться, что выполнены следующие два условия (см., например, [8, § 15]).

1. Конечномерные распределения $X_n(\cdot)$ сходятся к соответствующим распределениям $X^{(\alpha, \rho)}(\cdot)$.

2. Выполнены условия компактности (плотности) семейства распределений процессов $X_n(\cdot)$ в пространстве $D(0, 1)$.

Сходимость конечномерных распределений вытекает из теоремы 1, так как усредненные распределения $\mathbf{F}_{(k, \Delta)}$ удовлетворяют условиям [UR]. Кроме того, условия $[\text{UR}]_\Delta$ влекут за собой выполнение условий пренебрежимой малости [S]. Действительно, при $j \in (k, k + \Delta n)$ и всех достаточно больших n

$$\mathbf{P}\{|\xi_j| > \varepsilon b(n)\} \leq n\Delta F_{(k, \Delta)}(\varepsilon b(n)) \leq 2\Delta n G(\varepsilon b(n)) \leq 3\Delta \varepsilon^{-\alpha}.$$

Так как Δ может быть выбрано сколь угодно малым, а левая часть этих неравенств от Δ не зависит, то с необходимостью получаем

$$\max_{j \leq n} \mathbf{P}\{|\xi_j| > \varepsilon b(n)\} \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty.$$

Для выполнения условий компактности достаточно, чтобы при каждых фиксированных $t_1 < t < t_2$ выполнялось

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}\left\{|X_n(t) - X_n(t_1)| \geq v, |X_n(t_2) - X_n(t)| \geq v\right\} \leq cv^{-\gamma} |t_2 - t_1|^{1+\delta} \quad (9)$$

при некоторых $c < \infty$, $\gamma > 0$, $\delta > 0$ (см. [9]). В силу сходимости конечномерных распределений при $n \rightarrow \infty$, $\Delta = t - u > 0$, $m = [nt] - [nu] \sim n\Delta$, $S'_m = S_{[nt]} - S_{[nu]}$ выполняется

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\left\{|X_n(t) - X_n(u)| \geq v\right\} &= \mathbf{P}\left\{|S'_m| \geq vb(n)\right\} \sim \mathbf{P}\left\{|X^{(\alpha, \rho)}| \geq \frac{vb(n)}{b(m)}\right\} \\ &\sim \mathbf{P}\{|X^{(\alpha, \rho)}| > v\Delta^{-1/\alpha}\} \leq cv^{-\alpha}\Delta. \end{aligned} \quad (10)$$

Последнее неравенство вытекает из свойств устойчивых распределений.

Так как события под знаком вероятности в (9) независимы, то в силу (10) эта вероятность не превосходит $c^2 v^{-2\alpha} (t_2 - t_1)^2$. Неравенство (9) выполнено. Теорема 2 доказана.

3. Переходные явления. Вернемся теперь к исходной постановке задачи о предельном распределении максимума сумм

$$\bar{Z}_n = \max_{k \leq n} Z_k$$

нецентрированных слагаемых ζ_i . Теперь в качестве параметра схемы серий мы будем рассматривать значения $a \rightarrow 0$, а под n понимать некоторую функцию $n = n(a) \uparrow \infty$ при $a \downarrow 0$. Основные предпосылки для изучения распределения $\bar{Z}_n$, связанные со свойствами *центрированных* слагаемых ξ_i , мы изложили в п. 2. Как уже отмечалось, другой предпосылкой является правильное изменение средних $a_i = -E\zeta_i$. Мы будем предполагать в дальнейшем, что выполнено следующее условие.

[g]. *Параметр схемы серий a сходится к 0, а средние значения a_i таковы, что существует*

$$\lim_{a \rightarrow 0, k \rightarrow \infty} \frac{g_k}{ak} = 1, \quad g_k = \sum_{i=1}^k a_i, \quad \max_{k \leq 1/a} |a_k| < c.$$

Другими словами, средние значения $g_k = -EZ_k$ ведут себя асимптотически линейно с малым коэффициентом роста a .

В новых условиях через $\bar{S}_n(a)$ мы обозначим функционал

$$\bar{S}_n(a) = \max_{k \leq n} (S_k - g_k),$$

так что $\bar{S}_n(a) = \bar{Z}_n$.

Применительно к приложениям условие [g] можно назвать условием *асимптотически равномерной тяжелой нагрузки*. Можно рассматривать и асимптотически нелинейные «границы» g_k , как это сделано при изучении вероятностей больших отклонений $\bar{S}_n(a)$ в [9]. В этом случае, предполагая известную правильность изменения g_k , также можно исследовать предельное распределение $\bar{S}_n(a)$, но оно будет иным, чем в теореме 3, приведенной ниже.

Мы можем сформулировать теперь основные утверждения настоящей работы. Положим

$$D(t) = tG(t), \quad d(v) = D^{(-1)}(v) = \inf \{u: D(u) < v\}, \quad n_1 = n_1(a) = \frac{d(a)}{a}.$$

Нетрудно проверить, что если G — правильно меняющаяся функция с показателем $-\alpha$, то d и n_1 также будут правильно меняющимися функциями с показателями $1/(1-\alpha)$ и $\alpha/(1-\alpha)$ соответственно.

Теорема 3. Пусть выполнены условия теоремы 2 при замене в них n на $n_1 = d(a)/a$ (т.е. выполнены условия $[UR]_\Delta$ при замене в них n на n_1). Пусть далее выполнено условие [g], $a \rightarrow 0$ и $n = n(a)$ таково,

что существует

$$\lim_{a \rightarrow 0} \frac{n(a)}{n_1(a)} = T < \infty.$$

Тогда

$$\frac{\bar{S}_n(a)}{d(a)} \Rightarrow Z^{(\alpha, \rho)}(T),$$

т.е. распределение $\bar{S}_n(a)/d(a)$ слабо сходится при $a \rightarrow 0$ к распределению

$$Z^{(\alpha, \rho)}(T) = \sup_{u \leq T} (X^{(\alpha, \rho)}(u) - u). \quad (11)$$

Можно показать, что распределение случайной величины $Z^{(\alpha, \rho)}(T)$ непрерывно. Это вместе с теоремой 3 будет означать, что при всех v и при $a \rightarrow 0$

$$\mathbf{P} \left\{ \frac{\bar{S}_n(a)}{d(a)} > v \right\} \rightarrow \mathbf{P} \{ Z^{(\alpha, \rho)}(T) > v \}. \quad (12)$$

Доказательство теоремы 3. Пусть, как и прежде, $b(n) = G^{(-1)}(1/n)$. Сначала будем считать для простоты, что $a_i = a$ и функция $G(t)$ непрерывна при достаточно больших t . Заметим предварительно, что тогда

$$d(a) = b(n_1). \quad (13)$$

Это следует из равенств

$$a \equiv D(d(a)) = d(a) G(d(a)), \quad G(d(a)) = \frac{a}{d(a)} = \frac{1}{n_1},$$

$$d(a) = G^{-1} \left(\frac{1}{n_1} \right) = b(n_1).$$

Поэтому

$$\frac{\bar{S}_n(a)}{d(a)} = \max_{k \leq n} \left(\frac{S_k}{b(n_1)} - \frac{ak}{b(n_1)} \right) = \max_{k \leq n} \left(X_{n_1} \left(\frac{k}{n_1} \right) - \frac{k\theta}{n_1} \right), \quad (14)$$

где в силу (13)

$$\theta = \frac{n_1 a}{b(n_1)} = \frac{d(a)}{b(n_1)} = 1.$$

Но функционал

$$f_T(X) = \sup_{u \leq T} (X(u) - u)$$

непрерывен в метрике Скорохода и обладает свойством

$$f_T(X_{n_1}) = \max_{k \leq n} \left(X_{n_1} \left(\frac{k}{n_1} \right) - \frac{k}{n_1} \right),$$

так что в силу (14)

$$\frac{\bar{S}_n(a)}{d(a)} = f_T(X_{n_1}).$$

Остается воспользоваться теоремой 2.

В общем случае, когда функция $G(t)$ не является непрерывной при больших t , вместо равенства (13) будет иметь место асимптотическая эквивалентность $d(a) \sim b(n_1)$ при $a \rightarrow 0$ и все рассуждения доказательства (при замене в них ряда равенств на асимптотическую эквивалентность) сохранятся. То же самое произойдет, если ak в (14) заменить в соответствии с условием $[g]$ на $g_k \sim ak$ при $a \rightarrow 0$, $k \rightarrow \infty$. При этом вторая часть условия $[g]$ обеспечивает отсутствие «выбросов» у нормированной границы вблизи начала координат.

Теорема 3 доказана.

Рассмотрим теперь случай, когда $n \gg n_1$ и, в частности, случай $n = \infty$.

Положим $Z^{(\alpha, \rho)}(\infty) = Z^{(\alpha, \rho)}$.

Теорема 4. Пусть выполнены условия теоремы 3 и $T = \infty$. Тогда при $a \rightarrow 0$

$$\frac{\bar{S}_\infty(a)}{d(a)} \Rightarrow Z^{(\alpha, \rho)}. \quad (15)$$

Доказательство. Пусть

$$\eta(x, a) = \min\{k: S_k - g_k > x\}.$$

Положим для краткости

$$X(n, a) = \frac{\bar{S}_n(a)}{d(a)}.$$

Выберем большое фиксированное число T и обозначим $n_T = n_1 T$. Тогда

$$\mathbf{P}\{X(\infty, a) > v\} = \mathbf{P}\{X(n_T, a) > v\} + \mathbf{P}\{\infty > \eta(vd(a), a) > n_T\}. \quad (16)$$

По теореме 3 первое слагаемое в правой части (16) сходится при $a \rightarrow 0$ к $\mathbf{P}\{Z^{(\alpha, \rho)}(T) > v\}$. Для второго слагаемого в силу следствий 3.1, 3.2 в [9] при $x = vd(a)$ получаем

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{\infty > \eta(vd(a), a) > n_T\} &= \mathbf{P}\left\{\infty > \eta(x, a) > \frac{Tx}{av}\right\} \leq cn_1 \hat{V}_{(1)}(x) \left\{\frac{T}{v}\right\}^{1-\alpha} \\ &\leq c_1 n_1 F_{(1)}(x) \left\{\frac{T}{v}\right\}^{1-\alpha}, \end{aligned} \quad (17)$$

где хвосты $\hat{V}_{(1)} = \max(V_{(1)}, W_{(1)})$, $F_{(1)}$ соответствуют усредненному распределению

$$\mathbf{F}_{(1)} = \frac{1}{n_1} \sum_{j=1}^{n_1} \mathbf{F}_j$$

(можно рассматривать также усредненные распределения $\mathbf{F}_{(T)} = n_T^{-1} \sum_{j=1}^{n_T} \mathbf{F}_j$). Заметим теперь, что в (17)

$$n_1 F_{(1)}(x) = \frac{d(a)}{a} F_{(1)}(vd(a)) \sim \frac{d(a)}{a} G(vd(a)) \sim \frac{v^{-\alpha}}{a} D(d(a)) \sim v^{-\alpha}$$

и, стало быть, равномерно по a

$$R(v, T) \equiv \mathbf{P}\{\infty > \eta(vd(a), a) > n_T\} \leq \frac{c_1}{v} T^{1-\alpha},$$

где правая часть выбором T может быть сделана сколь угодно малой. Из сказанного следует, что

$$\begin{aligned} \overline{\lim}_{a \rightarrow 0} \mathbf{P}\{X(\infty, a) > v\} &\leq \mathbf{P}\{Z^{(\alpha, \rho)}(T) > v\} + R(v, T) \\ &\leq \mathbf{P}\{Z^{(\alpha, \rho)} > v\} + R(v, T). \end{aligned} \quad (18)$$

Так как левая часть этого неравенства от T не зависит, а правая может быть выбором T сделана сколь угодно близкой к $\mathbf{P}\{Z^{(\alpha, \rho)} > v\}$, то

$$\overline{\lim}_{a \rightarrow 0} \mathbf{P}\{X(\infty, a) > v\} \leq \mathbf{P}\{Z^{(\alpha, \rho)} > v\}.$$

С другой стороны, при любом T

$$\underline{\lim}_{a \rightarrow 0} \mathbf{P}\{X(\infty, a) > v\} \geq \mathbf{P}\{Z^{(\alpha, \rho)}(T) > v\},$$

где $\mathbf{P}\{Z^{(\alpha, \rho)}(T) > v\} \uparrow \mathbf{P}\{Z^{(\alpha, \rho)} > v\}$ при $T \uparrow \infty$. Учитывая, как и в (18), независимость левой части от T , мы получаем

$$\underline{\lim}_{a \rightarrow 0} \mathbf{P}\{X(\infty, a) > v\} \geq \mathbf{P}\{Z^{(\alpha, \rho)} > v\}.$$

Сказанное означает, что существует

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \mathbf{P}\{X(\infty, a) > v\} = \mathbf{P}\{Z^{(\alpha, \rho)} > v\}.$$

Теорема доказана.

4. О явном виде предельных распределений. Найти в общем случае явный вид собственных предельных распределений в теоремах 3, 4 (т.е. распределений $Z^{(\alpha, \rho)}(T)$) вряд ли возможно (вероятности больших отклонений величин $\bar{S}_n(a)/d(a)$ изучены в теореме 3.1 и следствии 3.1 в [9]). Однако в двух крайних случаях $\rho = -1$ и $\rho = 1$ при $T = \infty$ это удастся сделать. Рассмотрим сначала случай $\rho = -1$ или, что то же, $V(t) = o(W(t))$ при $t \rightarrow \infty$. Тогда, очевидно, $W(t) \sim G(t)$.

Теорема 5. *Справедливо равенство*

$$\mathbf{P}\{Z^{(\alpha, -1)} > v\} = e^{-bv},$$

где $b = (\Gamma(2 - \alpha)/(\alpha - 1))^{1/(1-\alpha)}$.

Если принять $\Gamma(1 - \alpha) = \Gamma(2 - \alpha)/(1 - \alpha)$ при $\alpha \in (1, 2)$, то b можно записать также в виде $b = (-\Gamma(1 - \alpha))^{1/(1-\alpha)}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из определения случайных величин $Z^{(\alpha, \rho)}$ видно, что оно не зависит от вида хвостов V и W и определяется лишь параметрами α и ρ . Поэтому, чтобы найти распределение $Z^{(\alpha, -1)}$, достаточно найти предельное распределение $\bar{S}_\infty(a)/d(a)$ при $a \rightarrow 0$ и каких-нибудь конкретных V и W , удовлетворяющих условиям теорем 3, 4. Возьмем, например, в качестве исходной последовательности $\xi_1, \xi_2, \dots$ случайные величины, распределение $\mathbf{F}$ которых имеет хвосты

$$V(t) = \frac{1}{2} e^{-\gamma t}, \quad W(t) = \frac{1}{2} \min(1, t)^{-\alpha}, \quad t > 0, \quad (19)$$

при подходящем $\gamma > 0$ таком, что $\mathbf{E}\xi_j = 0$. Так как в нашем случае $a_+ = \mathbf{E} \max(0, \xi_j) = 1/(2\gamma)$, $a_- = \mathbf{E} \min(0, \xi_j) = -\frac{1}{2}(1 + 1/(\alpha - 1)) = -\alpha/(2(\alpha - 1))$, то при $\gamma = (\alpha - 1)/\alpha$ будет выполняться $\mathbf{E}\xi_j = a_+ + a_- = 0$. Далее, $V(t) = o(W(t))$ и выполнены все условия теорем 3, 4 при $\rho = -1$, $d(a) \sim (2a)^{1/(1-\alpha)}$.

Но для экспоненциальных правых хвостов распределение $\bar{S}(a)$ известно в явном виде. Именно, в этом случае (см., например, [3])

$$\mathbf{E}e^{\lambda \bar{S}(a)} = p + \frac{(1-p)\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda}, \quad p = \mathbf{P}\{\bar{S}(a) = 0\}, \quad (20)$$

так что хвост распределения $\bar{S}(a)$ также является экспоненциальным:

$$\mathbf{P}\{\bar{S}(a) > x\} = (1-p)e^{-\lambda_1 x}, \quad x > 0. \quad (21)$$

Здесь $\lambda_1 > 0$ — решение уравнения $\psi(\lambda) = 1$, $\psi(\lambda) = \mathbf{E}e^{\lambda(\xi - a)}$ (ясно, что $p \rightarrow 0$ при $a \rightarrow 0$). Для отыскания значения λ_1 надо найти асимптотическое представление для

$$\psi(\lambda) = e^{-a\lambda} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\lambda t} \mathbf{F}(dt)$$

при $\lambda \rightarrow 0$.

Лемма 1. *Справедливо следующее соотношение.*

$$\psi(\lambda) = 1 - \lambda a + \frac{W(1/\lambda)}{(\alpha - 1)} \Gamma(2 - \alpha)(1 + o(1)) \quad (22)$$

при $\lambda \rightarrow 0$,

$$\lambda_1^{-1} \sim D^{(-1)}\left(\frac{a}{b_1}\right) \sim bd(a), \quad b_1 = b^{1-\alpha} = \frac{\Gamma(2 - \alpha)}{\alpha - 1}. \quad (23)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Имеем $e^{a\lambda}\psi(\lambda) = I_1 + I_2$, где

$$I_1 = \int_{-\infty}^0 e^{\lambda t} \mathbf{F}(dt) = W(0) + \lambda \int_{-\infty}^0 t \mathbf{F}(dt) + \int_{-\infty}^0 (e^{\lambda t} - 1 - \lambda t) \mathbf{F}(dt).$$

Здесь

$$\int_{-\infty}^0 (e^{\lambda t} - 1 - \lambda t) \mathbf{F}(dt) = \lambda \int_0^{\infty} (1 - e^{-\lambda t}) W(t) dt = \lambda^2 \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} W^I(t) dt,$$

где $W^I(t) = \int_t^{\infty} W(u) du = tW(t)/(\alpha - 1)$ при $t \geq 1$. Поэтому при $\lambda \rightarrow 0$ ($\lambda t = u$)

$$\lambda^2 \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} W^I(t) dt \sim \lambda W^I\left(\frac{1}{\lambda}\right) \int_0^{\infty} e^{-u} u^{-\alpha+1} du \sim \frac{W(1/\lambda)}{\alpha - 1} \Gamma(2 - \alpha).$$

Таким образом,

$$I_1 = \frac{1}{2} + \lambda a_- + \frac{W(1/\lambda)}{\alpha - 1} \Gamma(2 - \alpha)(1 + o(1)).$$

Очевидно также, что для $\mathbf{E}(\xi^+)^2 < \infty$

$$I_2 = \frac{1}{2} + \lambda a_+ + O(\lambda^2), \quad e^{-a\lambda} = 1 - a\lambda + O(\lambda^2).$$

Это доказывает (22).

Далее, при $b_1 = \Gamma(2 - \alpha)/(\alpha - 1)$ искомое значение λ_1 есть решение уравнения

$$\lambda a = b_1 W\left(\frac{1}{\lambda}\right)(1 + o(1))$$

или, что то же,

$$\lambda a = b_1 G\left(\frac{1}{\lambda}\right)(1 + o(1)), \quad D\left(\frac{1}{\lambda}\right) \sim \frac{a}{b_1},$$

поскольку в нашем случае $W(t) \sim G(t)$ при $t \rightarrow \infty$. Отсюда находим

$$\lambda_1^{-1} \sim d\left(\frac{a}{b_1}\right) \sim b_1^{1/(\alpha-1)} d(a).$$

Лемма 1 доказана.

Возвращаясь к (21) и полагая $x = vd(a)$, находим

$$\mathbf{P}\left\{\frac{\bar{S}(a)}{d(a)} > v\right\} \sim e^{-bv}, \quad \mathbf{P}\{Z^{(\alpha, -1)} > v\} = e^{-bv}.$$

Теорема 5 доказана.

Рассмотрим теперь вторую возможность $\rho = 1$ отыскания явного вида распределения $Z^{(\alpha, \rho)}$, т.е. случай $W(t) = o(V(t))$ при $t \rightarrow \infty$. На этот раз удастся найти в явном виде лишь характеристическую функцию $Z^{(\alpha, 1)}$.

Теорема 6. *Справедливо следующее равенство:*

$$\mathbf{E}e^{i\lambda Z^{(\alpha, 1)}} = \left[1 + \frac{i\phi|\lambda|^{\alpha-1}}{\alpha-1} A(\alpha-1, \phi)\right]^{-1}, \quad \phi = \text{sign } \lambda,$$

где $A(\gamma, \phi) = \int_0^{\infty} e^{i\phi v} v^{-\gamma} dv = \Gamma(1 - \gamma) e^{i\phi(1-\gamma)\pi/2}$.

Нетрудно заметить следующую связь между характеристическими функциями случайных величин $Z^{(\alpha,1)}$ и $X^{(\alpha-1,1)}$:

$$\mathbf{E}e^{i\mu Z^{(\alpha,1)}} = [1 - \ln \varphi^{(\alpha-1,1)}(\mu)]^{-1}.$$

Вероятности больших отклонений для $Z^{(\alpha,\rho)}$ (или $\bar{S}(a)/d(a)$) изучены в [9].

Доказательство теоремы 6. Используя те же рассуждения, что и в теореме 5, мы можем считать, не ограничивая общности (при отыскании распределения $Z^{(\alpha,1)}$), что ξ_j одинаково распределены и имеют хвосты того же вида, что и в (19), но V и W надо поменять местами, так что

$$W(t) = \mathbf{P}\{\xi_j < -t\} = \frac{1}{2} e^{-\gamma t}, \quad \gamma = -\frac{1}{2} a_-^{-1}, \quad a_- = \mathbf{E} \min(0, \xi).$$

Тогда по-прежнему $\mathbf{E}\xi_j = 0$, а первая отрицательная сумма χ_- будет иметь экспоненциальное распределение: $\mathbf{P}\{\chi_- < -t\} = e^{-\gamma t}$, $\mathbf{E}e^{i\lambda\chi_-} = \gamma/(i\lambda + \gamma)$. В силу факторизационных тождеств (см., например, [3])

$$\mathbf{E}e^{i\lambda\bar{S}(a)} = \frac{p}{1 - \varphi_a(\lambda)} [1 - \mathbf{E}e^{i\lambda\chi_-}] = \frac{pi\lambda}{(1 - \varphi_a(\lambda))(i\lambda + \gamma)},$$

где

$$\varphi_a(\lambda) = \mathbf{E}e^{i\lambda(\xi-a)}, \quad p = \mathbf{P}\{\bar{S}(a) = 0\}.$$

Выясним асимптотическое поведение $\varphi_a(\lambda) - 1$ при $\lambda \rightarrow 0$. Для $\varphi(\lambda) = \varphi_0(\lambda) = \mathbf{E}e^{i\lambda\xi}$ имеем

$$\varphi(\lambda) - 1 = \phi \int_0^{|\lambda|} \varphi'(u\phi) du, \quad \phi = \text{sign } \lambda, \quad (24)$$

где

$$\varphi'(\lambda) = i \left[- \int_0^\infty x e^{i\lambda x} dV(x) + \int_0^\infty x e^{-i\lambda x} dW(x) \right] \equiv I_+(\lambda) + I_-(\lambda). \quad (25)$$

Так как $x dV(x) = d(xV(x)) - V(x) dx$, то

$$\begin{aligned} I_+(\lambda) &\equiv -i \int_0^\infty x e^{i\lambda x} dV(x) = -\lambda \int_0^\infty x V(x) e^{i\lambda x} dx + iV^I(0) \\ &\quad - \lambda \int_0^\infty V^I(x) e^{i\lambda x} dx = iV^I(0) - \lambda \int_0^\infty \tilde{V}(x) e^{i\lambda x} dx, \end{aligned}$$

где

$$V^I(x) = \int_x^\infty V(u) du, \quad \tilde{V}(x) = xV(x) + V^I(x).$$

Здесь в силу наших предположений

$$V^I(x) \sim \frac{xV(x)}{\alpha - 1}, \quad \tilde{V}(x) \sim \frac{\alpha xV(x)}{\alpha - 1}$$

при $x \rightarrow \infty$. Далее, при $m = 1/|\lambda| \rightarrow \infty$, $z = x/m$ находим

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \tilde{V}(x) e^{i\lambda x} dx &= \int_0^1 + \int_1^\infty; \\ m^{-1} \int_1^\infty &= \int_{m^{-1}}^\infty \tilde{V}(zm) e^{iz\phi} dz \sim \tilde{V}(m) \int_0^\infty z^{-\alpha+1} e^{iz\phi} dz \\ &\sim \frac{\alpha m V(m)}{\alpha - 1} A(\alpha - 1, \phi), \end{aligned}$$

где

$$A(\gamma, \phi) = \int_0^\infty e^{iv\phi} v^{-\gamma} dv = \Gamma(1 - \gamma) e^{i\phi(1-\gamma)\pi/2}$$

(см. [10]). Так как $m^{-1} \int_0^1 \tilde{V}(x) e^{i\lambda x} dx = O(m^{-1})$, то в итоге получаем, что при $\lambda \rightarrow 0$

$$I_+(\lambda) = iV^I(0) - \frac{\alpha V(m)}{\lambda(\alpha - 1)} A(\alpha - 1, \phi)(1 + o(1)).$$

Аналогично находим

$$I_-(\lambda) = -iW^I(0) + O(m^{-1}).$$

Таким образом,

$$I_+(\lambda) + I_-(\lambda) = -\frac{\alpha V(m)}{\lambda(\alpha - 1)} A(\alpha - 1, \phi)(1 + o(1)).$$

Так как при $\lambda \rightarrow 0$

$$\int_0^{|\lambda|} \frac{1}{u} V\left(\frac{1}{u}\right) du \sim \frac{1}{\alpha} V\left(\frac{1}{|\lambda|}\right),$$

то, интегрируя $I_+(u) + I_-(u)$ в пределах от 0 до $|\lambda|$, мы в силу (24), (25) находим

$$\varphi(\lambda) - 1 = -\frac{V(m)}{\alpha - 1} A(\alpha - 1, \phi)(1 + o(1)).$$

Стало быть,

$$\begin{aligned} 1 - \varphi_a(\lambda) &= i\lambda a + \frac{V(m)}{\alpha - 1} A(\alpha - 1, \phi)(1 + o(1)) \\ &= i\lambda a \left(1 - \frac{iV(m)}{\lambda a(\alpha - 1)} A(\alpha - 1, \phi)(1 + o(1)) \right), \\ \mathbf{E} e^{i\lambda \bar{S}(a)} &= \frac{p}{a} \left[1 + \frac{iV(m)}{\lambda a(\alpha - 1)} A(\alpha - 1, \phi)(1 + o(1)) \right]^{-1} (i\lambda + \gamma)^{-1}. \end{aligned}$$

Полагая $\lambda = \mu/d(a)$ при фиксированном μ и $a \rightarrow 0$, находим

$$\mathbf{E} e^{i\mu \bar{S}(a)/d(a)} = \frac{p}{aq} \left[1 + \frac{i\phi D(d(a)/|\mu|)}{a(\alpha - 1)} A(\alpha - 1, \phi)(1 + o(1)) \right]^{-1} \left(1 + \frac{i\mu}{d(a)} \right)^{-1},$$

где $a^{-1}D(d(a)/|\mu|) \sim |\mu|^{\alpha-1}$, $\phi = \text{sign } \mu$. Так как

$$\frac{\bar{S}(a)}{d(a)} \rightarrow Z^{(\alpha,1)},$$

то отсюда следует, что с необходимостью $p/(aq) \rightarrow 1$,

$$\mathbf{E}e^{i\mu\bar{S}(a)/d(a)} \rightarrow \left[1 + \frac{i\phi|\mu|^{\alpha-1}}{\alpha-1} A(\alpha-1, \phi)\right]^{-1}.$$

Теорема 6 доказана.

Так как $\rho = -1$ тогда и только тогда, когда процесс $X^{(\alpha,\rho)}(t)$ (или $Y(t) = X^{(\alpha,\rho)} - t$) не содержит положительных скачков (непрерывен сверху), то экспоненциальный характер распределения $Z^{(\alpha,-1)}$ будет вытекать (вместе с обратным утверждением) из следующего просто доказываемого общего факта.

Теорема 7. Пусть $Y(t)$, $t \geq 0$, — произвольный однородный процесс с независимыми приращениями такой, что $Z = \sup_{t \geq 0} Y(t) < \infty$ п.н. Для того чтобы случайная величина Z имела экспоненциальное распределение

$$\mathbf{P}\{Z > x\} = e^{-bx}, \quad b > 0, \quad (26)$$

необходимо и достаточно, чтобы траектории $Y(t)$ были непрерывны сверху (не имели положительных скачков).

Доказательство. Положим $\eta(x) = \inf\{t \geq 0: Y(t) > x\}$, если $\bar{Z} > x$, и $\eta(x) = \infty$, если $\bar{Z} \leq x$. На множестве $\bar{Z} > x$ определена случайная величина $\chi(x) = Y(\eta(x)) - x$. Пусть для определенности траектории процесса $Y(t)$ непрерывны справа. Тогда $\chi(x) \geq 0$; при этом $\chi(x) \equiv 0$ тогда и только тогда, когда процесс $Y(t)$ непрерывен сверху.

Для произвольного y , $0 < y < x$, имеем

$$P(x) \equiv \mathbf{P}\{Z > x\} = \mathbf{E}[\mathbf{P}\{Z > x \mid \eta(y)\}; \eta(y) < \infty], \quad (27)$$

где в силу строго марковского свойства $Y(\cdot)$

$$\mathbf{P}\{Z > x \mid \eta(y)\} = \mathbf{P}\{Z' > x - y - \chi(y)\}. \quad (28)$$

Здесь $Z' = \sup_{t \geq 0} Y'(t)$, процесс $Y'(t)$ устроен так же, как $Y(t)$, и не зависит от $Y(t)$. Поэтому, если процесс $Y(\cdot)$ непрерывен сверху, то $\mathbf{P}\{Z > x \mid \eta(y)\} = \mathbf{P}\{Z' > x - y\} = P(x - y)$,

$$P(x) = P(x - y) \mathbf{P}\{\eta(y) < \infty\} = P(y) P(x - y).$$

Решения этого уравнения в классе монотонно убывающих функций имеют вид

$$P(x) = e^{-bx}, \quad b \geq 0.$$

Так как $\mathbf{P}\{Z > x\} \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \infty$, то $b > 0$ и выполнено (26).

Пусть теперь выполнено (26). Допустим, что процесс $Y(\cdot)$ имеет положительные скачки и, стало быть, $P\{\chi(y) > 0\} > 0$. Тогда в силу (26)–(28)

$$P\{Z' > x - y - \chi(y)\} > P(x - y), \quad P(x) > P(y) P(x - y).$$

Это противоречит (26).

Теорема 7 доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Kingman J. F. C.* On queues in heavy traffic. — *J. Roy. Statist. Soc. Ser. B*, 1962, v. 24, p. 383–392.
2. *Прохоров Ю. В.* Переходные явления в процессах массового обслуживания. — *Литов. матем. сб.*, 1963, т. 1, с. 199–206.
3. *Боровков А. А.* Вероятностные процессы в теории массового обслуживания. М.: Наука, 1972, 367 с.
4. *Cohen J. W.* Random walk with a heavy-tailed jump distribution. — *Queueing Syst.*, 2002, v. 40, № 1, p. 35–73.
5. *Boxma O. J., Cohen J. W.* Heavy-traffic analysis for the GI/G/1 queue with heavy-tailed distributions. — *Queueing Systems Theory Appl.*, 1999, v. 33, № 1–3, p. 177–204.
6. *Cohen J. W.* A heavy-traffic theorem for the GI/G/1 queue with Pareto-type service time distribution. — *J. Appl. Math. Stochastic Anal.*, 1998, v. 11, № 3, p. 247–254.
7. *Гнеденко Б. В., Колмогоров А. Н.* Предельные распределения для сумм независимых случайных величин. М.: Гостехиздат, 1949, 264 с.
8. *Биллингсли П.* Сходимость вероятностных мер. М.-Л.: Наука, 1977, 352 с.
9. *Боровков А. А.* Большие отклонения для случайных блужданий с разнораспределенными скачками, имеющими бесконечную дисперсию. — *Сиб. матем. журн.*, 2005, т. 46, № 1, с. 46–70.
10. *Градштейн И. С., Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Физматгиз, 1962.

Поступила в редакцию
16.VIII.2004