Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Н. Соловьев, К теории минимаксно-байесовского оценивания, *Теория вероятн. и ее примен.*, 1999, том 44, выпуск 4, 738–756

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp1063>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.183.62

26 апреля 2023 г., 05:42:35

© 1999 г.

СОЛОВЬЕВ В. Н.*

К ТЕОРИИ МИНИМАКСНО-БАЙЕСОВСКОГО
ОЦЕНИВАНИЯ¹⁾

Получены обобщения теоремы о нормальной корреляции, устанавливающие линейность минимаксно-байесовских оценок и нормальность наименее благоприятных распределений. Даны приложения к оцениванию параметров в линейных моделях наблюдения.

Ключевые слова и фразы: минимаксное оценивание, двойственная задача, ковариационная матрица, нормальное распределение.

Введение. Различные постановки задач минимаксного оценивания были независимо и примерно в одно и то же время предложены А. Н. Колмогоровым, Н. Н. Красовским, М. Л. Лидовым и П. Хьюбером (см. библиографию в [9]). Одна из первых таких задач была поставлена А. Н. Колмогоровым в 1963 г. в связи с исследованиями солнечной активности. В предложенной им модели наблюдений предполагалось, что измерения $\gamma(t_j) = f(t_j) + \varepsilon_j$, $E\varepsilon_j = 0$, содержат тренд $f(t)$ с непрерывной производной $|f^{(m)}(t)| \leq \text{const}$. Заменяя тренд $f(t)$ его тейлоровским разложением и затем включая последний член этого разложения в суммарные ошибки ξ_j , получим, что $\gamma(t_j) = \sum_{k=0}^{m-1} \theta_k t_j^k / k! + \xi_j$, где $\theta_k = f^{(k)}(0)$ и суммарные ошибки ξ_j имеют ограниченные первые моменты: $|E\xi_j| \leq \text{const} |t_j|^m / m!$. Из других соображений к весьма близкой задаче пришел М. Л. Лидов, который предполагал, что ошибки являются суммой белого шума и произвольно коррелированной помехи (в этом случае получаются суммарные ошибки с ограниченными вторыми моментами).

В п. 1 вводятся классы распределений случайного вектора $Y = (\gamma, \theta)$ с ограниченными вторыми моментами. В п. 2 получены обобщения теоремы о нормальной корреляции, в которых установлена линейность минимаксно-байесовских оценок и нормальность наименее благоприятных распределений. В п. 3 рассмотрены минимаксно-байесовские оценки параметров в линейных моделях наблюдения $\gamma = A\theta + \rho$, в которых

*Московский государственный социальный университет; e-mail: solovio@org.ru

¹⁾ Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 97-01-01005.

вектор случайных параметров θ некоррелирован с вектором ошибок ρ , а ковариационные матрицы этих векторов принадлежат априорно заданным классам. Самым простым априорным ограничением на параметры служит точность $\mathbf{E}|\theta - \theta_0|^2 \leq \sigma^2$ априорной оценки $\mathbf{E}\theta = \theta_0$ параметров θ . Оказывается, что если оценивать весь вектор параметров, то при $\theta_0 = 0$ минимаксно-байесовская оценка является простым сжатием МНК-оценки. В п. 4 рассмотрены минимаксно-байесовские оценки параметров θ в линейной модели наблюдений $\gamma = A\theta + \rho$, $\mathbf{E}\theta = \theta_0$, $\mathbf{E}\rho = 0$ в той крайней ситуации, когда нам ничего не известно о взаимной ковариации векторов θ и ρ и мы ожидаем самого худшего. Оказалось, что если оценивать весь вектор параметров, то для получения минимаксной оценки нужно по одним направлениям взять МНК-оценки параметров, а по остальным довольствоваться их априорными значениями. В п. 5 доказаны вспомогательные результаты.

1. Постановка задачи. Обозначим через $\mathcal{P} = \mathcal{P}_0$ класс всех распределений $P(y)$ случайного вектора $Y = (\gamma, \theta)$ с компонентами $\gamma \in \mathbf{R}^n$, $\theta \in \mathbf{R}^m$, имеющего известное среднее $\mathbf{E}_P Y = Y_0 = (\gamma_0, \theta_0)$, но неизвестную матрицу ковариаций $K = \text{cov}(Y, Y)$, которая принадлежит априорно заданному классу $\mathcal{K}$ неотрицательно определенных матриц порядка $n+m$. Пусть по наблюдениям компоненты γ нужно найти оценку $\hat{l} = \hat{l}(\gamma)$ для вектора $l = C^T \theta \in \mathbf{R}^r$. В качестве характеристики точности этой оценки примем величину

$$D(\hat{l}) := \sup_{P \in \mathcal{P}} \mathbf{E}_P |\hat{l} - l|^2. \quad (1.1)$$

Для отыскания минимаксно-байесовской оценки $\hat{l}_*(\gamma)$ нужно на классе всех измеримых функций $\hat{l}(\gamma): \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^r$ найти решение задачи

$$D_{\min} := \inf_{\hat{l}(\cdot)} D(\hat{l}). \quad (1.2)$$

Мы покажем, что в минимаксной задаче (1.1)–(1.2) существует седловая точка $(\hat{l}_*, P_*)$, и поэтому она эквивалентна двойственной

$$D_{\min} = \sup_{P \in \mathcal{P}} \inf_{\hat{l}(\cdot)} \mathbf{E}_P |\hat{l} - l|^2. \quad (1.3)$$

Распределение $P_* \in \mathcal{P}$, которое доставляет максимум в (1.3), мы будем называть наименее благоприятным. Введем обозначения

$$K = \begin{pmatrix} K_{\gamma\gamma} & K_{\gamma\theta} \\ K_{\theta\gamma} & K_{\theta\theta} \end{pmatrix}, \quad \text{где} \quad \begin{matrix} K_{\gamma\gamma} = \text{cov}(\gamma, \gamma), \\ K_{\gamma\theta} = \text{cov}(\gamma, \theta), \end{matrix}$$

$\text{Sp } K$ — след матрицы K ; $\langle A, B \rangle = \text{Sp } AB^T$ — скалярное произведение матриц A и B ; K^+ — псевдообратная матрица.

2. Линейность минимаксно-байесовских оценок.

Теорема 2.1. Если множество $\mathcal{X}$ компактно и выпукло, то

$$D_{\min} = \max_{K \in \mathcal{X}} \langle (K_{\theta\theta} - K_{\theta\gamma} K_{\gamma\gamma}^+ K_{\gamma\theta}) C, C \rangle. \quad (2.1)$$

Наименее благоприятным в априорном классе $\mathcal{P}_0$ является нормальное распределение $Y \sim N(Y_0, \bar{K})$, в котором $\bar{K} \in \mathcal{X}$ — любое решение задачи (2.1). Решение исходной задачи (1.1)–(1.2) дает линейная оценка $\hat{l}_*$, которая в случае невырожденной матрицы $\bar{K}_{\gamma\gamma}$ имеет вид

$$\hat{l}_* = C^T (\theta_0 + \bar{K}_{\theta\gamma} \bar{K}_{\gamma\gamma}^{-1} (\gamma - \gamma_0)). \quad (2.2)$$

Доказательство. Сначала рассмотрим случай $l = \theta$ (т.е. $C = I_m$). Решим задачу сперва для класса линейных оценок $\hat{\theta} = L^T \gamma + q$, $L \in \mathbf{R}^{nm}$, $q \in \mathbf{R}^m$:

$$\tilde{D}_{\min} = \inf_{\hat{\theta} = L^T \gamma + q} \sup_{P \in \mathcal{P}} \mathbf{E}_P |\hat{\theta} - \theta|^2. \quad (2.3)$$

Для линейных оценок величина $\mathbf{E}_P |\hat{\theta} - \theta|^2 = \langle KX, X \rangle + |q + X^T Y_0|^2$, $X^T := (L^T, -I_m)$, зависит от распределения P только через соответствующую матрицу ковариаций $K = \mathbf{E}_P (Y - Y_0)(Y - Y_0)^T$. Кроме того, она линейна по переменной K на выпуклом компакте $\mathcal{X}$, и выпукла по переменным X и q в совокупности на аффинном подпространстве. Поэтому по несимметричной теореме о минимаксе [4]

$$\tilde{D}_{\min} = \sup_{P \in \mathcal{P}} \inf_{\hat{\theta} = L^T \gamma + q} \mathbf{E}_P |\hat{\theta} - \theta|^2. \quad (2.4)$$

Для фиксированного распределения $P \in \mathcal{P}$ нижняя грань по $\hat{\theta}$ достигается на оценке

$$\hat{\theta} = \theta_0 + K_{\theta\gamma} K_{\gamma\gamma}^+ (\gamma - \gamma_0) \quad (2.5)$$

и равна

$$\inf_{\hat{\theta} = L^T \gamma + q} \mathbf{E}_P |\hat{\theta} - \theta|^2 = \text{Sp}(K_{\theta\theta} - K_{\theta\gamma} K_{\gamma\gamma}^+ K_{\gamma\theta}). \quad (2.6)$$

Для дальнейшего существенно, что оценка (2.5) дает единственное решение задачи (2.6), если матрица $K_{\gamma\gamma}$ невырождена. Действительно, очевидно, что оптимален выбор вектора

$$q = -X^T Y_0 = \theta_0 - L^T \gamma_0, \quad (2.7)$$

а поскольку градиент функции $\mathbf{E}_P |\hat{\theta} - \theta|^2 = \text{Sp} K_{\theta\theta} - 2\langle L, K_{\gamma\theta} \rangle + \langle K_{\gamma\gamma} L, L \rangle$ по переменной $L \in \mathbf{R}^{nm}$ равен $2(K_{\gamma\gamma} L - K_{\gamma\theta})$, то ее единственная точка минимума — это $L = K_{\gamma\gamma}^{-1} K_{\gamma\theta}$, что дает соотношения (2.5) и (2.6) в

случае невырожденной матрицы $K_{\gamma\gamma}$. Общий случай рассматривается аналогично.

В силу (2.4), (2.6) получаем

$$\tilde{D}_{\min} = \sup_{K \in \mathcal{K}} \text{Sp}(K_{\theta\theta} - K_{\theta\gamma} K_{\gamma\gamma}^+ K_{\gamma\theta}). \quad (2.8)$$

Как минимум семейства линейных по переменной K величин $\mathbf{E}_P |\hat{\theta} - \theta|^2$, функция (2.8) вогнута и полунепрерывна сверху по переменной K на выпуклом компакте $\mathcal{K}$, поэтому задача (2.8) имеет решение $\bar{K} \in \mathcal{K}$ [4]. Тем самым, и двойственная задача (2.4) имеет решение $P_* = \mathbf{N}(Y_0, \bar{K})$.

Покажем, что исходная задача (2.3) тоже имеет решение $\hat{\theta}_*$. Очевидно, что оптимален выбор вектора (2.7). Тогда

$$\tilde{D}_{\min} = \inf \left\{ D(X): X^T = (L^T, -I_m) \in \mathbf{R}^{m(n+m)} \right\},$$

где функция $D(X) := \max_{K \in \mathcal{K}} \langle KX, X \rangle$ однородна степени 2, выпукла и неотрицательна. Поэтому она является квадратом некоторой полунормы [6], и указанная задача эквивалентна минимизации этой полунормы на аффинном подпространстве $\mathcal{L}$ в $\mathbf{R}^{(n+m)m}$. Нетрудно сообразить, что она имеет решение (так как всякая полунорма — это норма, заданная на линейном подпространстве, то можно искать минимум этой нормы на проекции аффинного подпространства $\mathcal{L}$ на это линейное подпространство). Поэтому задача (2.3) тоже имеет решение.

Таким образом, мы доказали, что двойственные задачи (2.3), (2.4) имеют решения $\hat{\theta}_*$, P_* , и значения этих задач совпадают. Отсюда следует, что $(\hat{\theta}_*, P_*)$ — седловая точка в задаче (2.3) (см. [10, с. 172]), т.е. для всех линейных оценок $\hat{\theta}$ и распределений $P \in \mathcal{P}$ имеют место неравенства

$$\mathbf{E}_P |\hat{\theta}_* - \theta|^2 \leq \mathbf{E}_{P_*} |\hat{\theta}_* - \theta|^2 \leq \mathbf{E}_{P_*} |\hat{\theta} - \theta|^2. \quad (2.9)$$

Поскольку $\hat{\theta}_*$ — решение задачи (2.6), которое для невырожденной матрицы $\bar{K}_{\gamma\gamma}$ единственно, то в этом случае $\hat{\theta}_*$ имеет вид (2.2).

Теперь рассмотрим задачу (1.1)–(1.2) для класса произвольных измеримых функций $\hat{\theta}(\cdot)$. По теореме о нормальной корреляции [1], [3] в действительности правое неравенство в (2.9) выполняется для любой нелинейной оценки $\hat{\theta}$, т.е. $(\hat{\theta}_*, P_*)$ — седловая точка в исходной задаче (1.1)–(1.2). Отсюда следует, что линейная оценка $\hat{\theta}_*$ дает решение задачи (1.1)–(1.2) и равенство (2.1).

Наконец, рассмотрим произвольный оцениваемый параметр $l = C^T \theta \in \mathbf{R}^r$. Случайный вектор $\tilde{Y} = (\gamma, l)$ имеет произвольное распределение, удовлетворяющее ограничениям

$$\mathbf{E}_P \tilde{Y} = (\gamma_0, l_0), \quad l_0 := C^T \theta_0, \quad \text{cov}(\tilde{Y}, \tilde{Y}) = \begin{pmatrix} K_{\gamma\gamma} & K_{\gamma\theta} C \\ C^T K_{\gamma\gamma} & C^T K_{\theta\theta} C \end{pmatrix}. \quad (2.10)$$

Поэтому для него выполнены все условия теоремы 2.1, доказанной выше для случая $l = \theta$, что с учетом (2.8), (2.5) и (2.10) дает равенства (2.1) и (2.2). Теорема 2.1 доказана.

Теорема 2.1 является обобщением теоремы о нормальной корреляции [1], [3], в котором мы использовали идеи замечательной работы [16]. В случае, когда все распределения $P \in \mathcal{P}_0$ имеют известные среднее Y_0 и матрицу ковариаций K , этот результат получен в [5]. Пользуясь методами теории двойственных экстремальных задач, можно распространить его на общий случай распределений, первые и вторые моменты которых лежат в априорно заданных классах [7]–[9], [15]–[17]. Близкие задачи рассмотрены в [11], [12].

Теорема 2.2. *Если множество $\mathcal{K}$ компактно и содержит неотрицательно определенные матрицы, то все утверждения теоремы 2.1 останутся справедливы, если выпукло не само это множество, а матричное множество $\{\tilde{K}: \exists K \in \mathcal{K}, K \geq \tilde{K}\}$.*

Доказательство. Обозначим через $\mathcal{P} = \widetilde{\mathcal{P}}_0$ класс всех распределений $P(y)$ случайного вектора Y , имеющего известное среднее $E_P Y = Y_0$, но неизвестную ковариационную матрицу $\text{cov}(Y, Y) \in \mathcal{K}$, где $\mathcal{K} := \{\tilde{K} \geq 0: \exists K \in \mathcal{K}, K \geq \tilde{K}\}$. Легко проверить, что множество $\tilde{K}$ выпукло и компактно. Поскольку $\mathcal{K} \subset \tilde{\mathcal{K}}$, то $\mathcal{P}_0 \subset \widetilde{\mathcal{P}}_0$. Поэтому, согласно (1.1), $D(\hat{l}) \leq \tilde{D}(\hat{l})$, где $\tilde{D}(\hat{l})$ и $\tilde{D}_{\min}$ обозначают величины (1.1) и (1.2), вычисленные для класса распределений $\widetilde{\mathcal{P}}_0$. Из этого неравенства получаем $D_{\min} \leq \tilde{D}_{\min}$. Более того, имеем (см. [10])

$$D_{\min} := \inf_{\hat{l}(\cdot)} \sup_{P \in \mathcal{P}} E_P |\hat{l} - l|^2 \geq \sup_{P \in \mathcal{P}} \inf_{\hat{l}(\cdot)} E_P |\hat{l} - l|^2 \geq \sup_{P \in \mathcal{N}} \inf_{\hat{l}(\cdot)} E_P |\hat{l} - l|^2,$$

где $\mathcal{N}$ обозначает подкласс всех нормальных распределений из априорного класса $\mathcal{P} = \mathcal{P}_0$. По теореме о нормальной корреляции отсюда

$$D_{\min} \geq \max_{K \in \mathcal{K}} \langle (K_{\theta\theta} - K_{\theta\gamma} K_{\gamma\gamma}^+ K_{\gamma\theta}) C, C \rangle.$$

С другой стороны, поскольку $\tilde{\mathcal{K}}$ — выпуклый компакт, то по теореме 2.1 получаем

$$\tilde{D}_{\min} = \max_{\tilde{K} \in \tilde{\mathcal{K}}} \langle (\tilde{K}_{\theta\theta} - \tilde{K}_{\theta\gamma} \tilde{K}_{\gamma\gamma}^+ \tilde{K}_{\gamma\theta}) C, C \rangle. \quad (2.11)$$

В действительности правые части последних двух соотношений совпадают, ибо хотя множество $\mathcal{K}$ и меньше $\tilde{\mathcal{K}}$, но в то же время для любой матрицы $\tilde{K} \in \tilde{\mathcal{K}}$ существует матрица $K \in \mathcal{K}$ такая, что $K \geq \tilde{K}$. Легко проверить, что в этом случае

$$\langle (K_{\theta\theta} - K_{\theta\gamma} K_{\gamma\gamma}^+ K_{\gamma\theta}) C, C \rangle \geq \langle (\tilde{K}_{\theta\theta} - \tilde{K}_{\theta\gamma} \tilde{K}_{\gamma\gamma}^+ \tilde{K}_{\gamma\theta}) C, C \rangle.$$

Таким образом, окончательно получаем

$$\tilde{D}_{\min} \geq D_{\min} \geq \max_{K \in \mathcal{K}} \langle (K_{\theta\theta} - K_{\theta\gamma} K_{\gamma\gamma}^+ K_{\gamma\theta}) C, C \rangle = \tilde{D}_{\min},$$

т.е. $D_{\min} = \tilde{D}_{\min}$. Это доказывает (2.1). Поскольку $\mathcal{K} \subset \tilde{\mathcal{K}}$, любое решение $\bar{K} \in \mathcal{K}$ в задаче (2.1) дает также и решение задачи (2.11). Пусть $\hat{l}_*$ — линейная оценка, дающая решение задачи (1.2) для априорного класса распределений $\mathcal{P}_0$, а P_* — нормальное распределение $Y \sim N(Y_0, \bar{K})$. Тогда, как было доказано в теореме 2.1, для всех нелинейных оценок $\hat{l}$ и распределений $P \in \tilde{\mathcal{P}}_0$ будут выполнены неравенства $E_P |\hat{l}_* - l|^2 \leq E_{P_*} |\hat{l}_* - l|^2 \leq E_{P_*} |\hat{l} - l|^2$. В частности, они будут выполнены для всех нелинейных оценок $\hat{l}$ и распределений $P \in \mathcal{P}_0 \subset \tilde{\mathcal{P}}_0$. Как мы уже заметили, это означает, что наименее благоприятным в априорном классе $\mathcal{P}_0$ является нормальное распределение $Y \sim N(Y_0, \bar{K})$ и что решение исходной задачи (1.1)–(1.2) дает линейная оценка $\hat{l}_*$. Теорема 2.2 доказана.

Заметим, что формально теорема 2.1 — частный случай этого результата. Другой частный случай, когда (невыпуклое) компактное множество $\mathcal{K}$ состоит из неотрицательно определенных матриц и содержит максимальный элемент (т.е. существует матрица $\bar{K} \in \mathcal{K}$ такая, что $K \leq \bar{K}$ при всех $K \in \mathcal{K}$), был указан в [16]. Очевидно, что в этом случае $\bar{K}$ и есть решение задачи (2.1).

Использованный нами прием расширения априорного класса можно применить и тогда, когда $\mathcal{K}$ — произвольное невыпуклое, компактное множество, состоящее из неотрицательно определенных матриц. В этом случае вместо исходного класса $\mathcal{P} = \mathcal{P}_0$ можно рассмотреть более широкий класс $\mathcal{P} = \tilde{\mathcal{P}}_0$ всех распределений $P(y)$ вектора Y , имеющих известное среднее $E_P Y = Y_0$ и ковариационную матрицу $\text{cov}(Y, Y) \in \mathcal{K}$, где $\tilde{\mathcal{K}} := \text{conv } \mathcal{K}$ — выпуклая оболочка множества $\mathcal{K}$. На этом более широком классе распределений минимаксно-байесовская оценка уже будет линейной. Поэтому в условиях весьма значительной неопределенности статистических характеристик распределения P можно смело рекомендовать использование линейных оценок, как из соображений их большей устойчивости, так и из соображений их несомненной простоты.

3. Минимаксно-байесовские оценки параметров в линейных моделях наблюдения. Пусть в линейной модели $\gamma = A\theta + \rho$ вектор случайных параметров θ некоррелирован с вектором ошибок ρ , а ковариационные матрицы этих векторов принадлежат априорным классам $\mathcal{T}$ и $\mathcal{R}$:

$$\begin{aligned} E\theta = \theta_0, \quad E\rho = 0, \quad \text{cov}(\theta, \theta) = T \in \mathcal{T}, \\ \text{cov}(\theta, \rho) = 0, \quad \text{cov}(\rho, \rho) = R \in \mathcal{R}. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Теорема 3.1. Если множества $\mathcal{T}$ и $\mathcal{R}$ выпуклы и компактны и содержат положительно определенные матрицы, то

$$D_{\min} = \max_{T \in \mathcal{T}, R \in \mathcal{R}} \langle (T^{-1} + A^T R^{-1} A)^{-1} C, C \rangle. \quad (3.2)$$

Минимаксно-байесовской для вектора $l = C^T \theta$ является линейная оценка

$$\hat{l}_* = C^T (\bar{T}^{-1} + A^T \bar{R}^{-1} A)^{-1} (A^T \bar{R}^{-1} \gamma + \bar{T}^{-1} \theta_0), \quad (3.3)$$

в которой $\bar{T} \in \mathcal{T}$, $\bar{R} \in \mathcal{R}$ — любое решение задачи (3.2). При этом наименее благоприятны нормальные распределения $\theta \sim N(\theta_0, \bar{T})$, $\rho \sim N(0, \bar{R})$.

Доказательство. Для линейной модели наблюдений $\gamma = A\theta + \rho$, удовлетворяющей (3.1), блоки ковариационной матрицы $K = \text{cov}(Y, Y)$ случайного вектора $Y = (\gamma, \theta)$ имеют вид

$$K_{\theta\theta} = T, \quad K_{\gamma\theta} = AT, \quad K_{\gamma\gamma} = ATA^T + R. \quad (3.4)$$

Поскольку множество $\mathcal{K}$ всех таких матриц компактно и выпукло, то в силу (2.1), (2.2) остается воспользоваться равенством $E\gamma = \gamma_0 = A\theta_0$ и известными тождествами (см. [14])

$$\begin{aligned} K_{\theta\theta} - K_{\theta\gamma} K_{\gamma\gamma}^{-1} K_{\gamma\theta} &= (T^{-1} + A^T R^{-1} A)^{-1}, \\ K_{\theta\gamma} K_{\gamma\gamma}^{-1} &= (T^{-1} + A^T R^{-1} A)^{-1} A^T R^{-1}. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Теорема 3.1 доказана.

Самым простым априорным ограничением на параметры служит точность априорной оценки θ_0 :

$$E\theta = \theta_0, \quad E|\theta - \theta_0|^2 \leq \sigma^2. \quad (3.6)$$

В такой ситуации естественно оценивать весь вектор параметров $l = \theta$ на классе $\mathcal{P}_0$ всех распределений случайных векторов θ и ρ , удовлетворяющих ограничениям (3.1) и (3.6). Напомним, что если известно точное значение $R = \text{cov}(\rho, \rho)$ ковариационной матрицы ошибок наблюдений ρ , а априорные данные о векторе параметров отсутствуют, то популярная оценка параметров получается по методу наименьших квадратов (МНК):

$$\hat{\theta}_1 = (A^T R^{-1} A)^{-1} A^T R^{-1} \gamma. \quad (3.7)$$

Теорема 3.2. Пусть матрица A имеет ранг t и $\bar{R} \in \mathcal{R}$ — наименее благоприятная матрица ковариаций для МНК-оценок (3.7), являющаяся решением задачи

$$\max_{R \in \mathcal{R}} \text{Sp } D(R), \quad D(R) := (A^T R^{-1} A)^{-1}. \quad (3.8)$$

Тогда минимаксно-байесовской является линейная оценка параметров

$$\hat{\theta}_* = \frac{\sigma^2 \hat{\theta}_1 + \text{Sp } D(\bar{R}) \theta_0}{\sigma^2 + \text{Sp } D(\bar{R})}, \quad (3.9)$$

в которой $\hat{\theta}_1$ — это МНК-оценка (3.7), вычисленная для матрицы $\bar{R}$. Наименее благоприятными являются нормальные распределения $\theta \sim N(\theta_0, \sigma^2 D(\bar{R}) / \text{Sp } D(\bar{R}))$ и $\rho \sim N(0, \bar{R})$, причем

$$D_{\min} = \frac{\sigma^2 \text{Sp } D(\bar{R})}{\sigma^2 + \text{Sp } D(\bar{R})}. \quad (3.10)$$

Доказательство. Сначала рассмотрим случай одноточечного множества $\mathcal{R} = \{\bar{R}\}$ и априорного множества

$$\mathcal{T}_\epsilon = \{T \geq \epsilon I_m, \text{Sp } T \leq \sigma^2\}, \quad (3.11)$$

где $\epsilon > 0$. Пусть $P_* \in \mathcal{P}$ будет нормальным распределением вектора $Y = (\gamma, \theta)$, указанным в теореме 3.2. Проверим, что пара $(\hat{\theta}_*, P_*)$ образует седловую точку в задаче (1.1)–(1.2).

Чтобы показать, что $\hat{\theta}_* = \mathbf{E}_{P_*}(\theta | \gamma)$, воспользуемся представлением условного среднего $\hat{\theta}_* = \mathbf{E}_{P_*}(\theta | \gamma)$ в виде (3.3) с невырожденной матрицей ковариаций

$$\bar{T} = \frac{\sigma^2}{\text{Sp } D(\bar{R})} D(\bar{R}). \quad (3.12)$$

С учетом обозначения (3.8) получаем

$$(\bar{T}^{-1} + A^T \bar{R}^{-1} A)^{-1} = \frac{\sigma^2}{\sigma^2 + \text{Sp } D(\bar{R})} D(\bar{R}).$$

Тогда равенство (3.3) переходит в (3.9), т.е. $\hat{\theta}_* = \mathbf{E}_{P_*}(\theta | \gamma)$.

Покажем, что распределение P_* наименее благоприятно для оценки $\hat{\theta}_*$. Имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_P |\hat{\theta}_* - \theta|^2 &= \mathbf{E}_P \left| \frac{\sigma^2}{\sigma^2 + \text{Sp } D(\bar{R})} D(\bar{R}) A^T \bar{R}^{-1} \rho - \frac{\text{Sp } D(\bar{R})}{\sigma^2 + \text{Sp } D(\bar{R})} (\theta - \theta_0) \right|^2 \\ &= \left[\frac{\sigma^2}{\sigma^2 + \text{Sp } D(\bar{R})} \right]^2 \text{Sp } D(\bar{R}) + \left[\frac{\text{Sp } D(\bar{R})}{\sigma^2 + \text{Sp } D(\bar{R})} \right]^2 \text{Sp } T \end{aligned} \quad (3.13)$$

в силу некоррелированности векторов ρ и θ и принятого соглашения $\text{cov}(\rho, \rho) = \bar{R}$. Отсюда видно, что при достаточно малых $\epsilon > 0$ максимум величины (3.13) по априорным матрицам T , удовлетворяющим ограничениям (3.11), достигается на матрице (3.12).

Таким образом, $(\hat{\theta}_*, P_*)$ — седловая точка, и поэтому при фиксированной матрице $R = \bar{R}$ максимум по $T \in \mathcal{T}_\varepsilon$ в задаче (3.2) достигается на матрице (3.12). Подставляя ее в (3.13), получим

$$D_{\min} = \mathbf{E}_{P_*} |\hat{\theta}_* - \theta|^2 = \frac{\sigma^2 \text{Sp } D(\bar{R})}{\sigma^2 + \text{Sp } D(\bar{R})}. \quad (3.14)$$

Теперь заметим, что так как матричная функция (3.12) непрерывно зависит от переменной $\bar{R}$ на компакте $\mathcal{R}$, то найдется $\varepsilon_0 > 0$ такое, что $\bar{T} \in \mathcal{T}_\varepsilon$ сразу для всех $\bar{R} \in \mathcal{R}$ и $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$. В случае произвольного выпуклого компакта $\mathcal{R}$ это означает, что максимум в (3.2) равен максимуму величины (3.14) по всем матрицам $\bar{R} \in \mathcal{R}$. Поскольку эта величина монотонно возрастает относительно переменной $\text{Sp } D(\bar{R})$, то решение задачи (3.2) дают матрица $\bar{R}$, являющаяся решением задачи (3.8), и соответствующая ей матрица $\bar{T}$ вида (3.12). Как мы только что убедились, этой паре матриц соответствует условное среднее $\hat{\theta}_* = \mathbf{E}_{P_*}(\theta | \gamma)$ вида (3.9). Таким образом, соотношения (3.9), (3.10) нами доказаны для априорного множества $\mathcal{T}_\varepsilon$ при $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$.

Наконец, заметим, что поскольку $(\hat{\theta}_*, P_*)$ — седловая точка в задаче (1.1)–(1.2), то неравенство (2.9) выполняется для всех оценок $\hat{\theta}$ и распределений $P(y)$ таких, что $R \in \mathcal{R}$, $T \in \mathcal{T}_\varepsilon$, $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$. В силу линейности величины $\mathbf{E}_P |\hat{\theta}_* - \theta|^2$ по переменной T в действительности оно справедливо для любой матрицы $T \in \mathcal{T}_0 = \mathcal{T}$ (см. (3.11)), т.е. $(\hat{\theta}_*, P_*)$ — седловая точка в задаче (1.1)–(1.2) для исходного класса распределений, удовлетворяющих априорным ограничениям (3.6). Тогда в этой задаче наименее благоприятными являются распределения $\theta \sim N(\theta_0, \sigma^2 D(\bar{R}) / \text{Sp } D(\bar{R}))$ и $\rho \sim N(0, \bar{R})$. Теорема 3.2 доказана.

Отметим, что если известно точное значение $R = \bar{R}$ ковариационной матрицы ошибок наблюдений ρ , то формула (3.9) дает аналитическое выражение для минимаксно-байесовской оценки параметров, причем при $\theta_0 = 0$ эта оценка является простым сжатием МНК-оценки (3.7). Интересно, что в этом случае апостериорная точность $\mathbf{E}_P |\hat{\theta}_* - \theta|^2$ будет одной и той же для всех распределений $P \in \mathcal{P}_0$ с одинаковой величиной априорной точности $\mathbf{E}_P |\theta - \theta_0|^2$ и что в этом случае оценка (3.9) оптимальна в совсем иной задаче [13].

4. Минимаксно-байесовские оценки параметров в случае произвольной корреляции сигнала и шума. Пусть теперь в модели

$$\begin{aligned} \gamma &= A\theta + \rho, & \mathbf{E}\theta &= \theta_0, & \mathbf{E}\rho &= 0, \\ \text{cov}(\theta, \theta) &:= T \in \mathcal{T}, & \text{cov}(\rho, \rho) &:= R \in \mathcal{R} \end{aligned} \quad (4.1)$$

нам ничего не известно о взаимной ковариации θ и ρ , кроме неотрицательной определенности матрицы ковариаций вектора $(\theta, \rho) \in \mathbf{R}^{n+m}$, и

мы ожидаем самого худшего. Здесь мы будем считать, что ранг матрицы A равен m и что $\mathcal{T}$ и $\mathcal{R}$ — выпуклые компакты положительно определенных матриц.

Теорема 4.1. *Справедливо равенство*

$$D_{\min} = \max_{D \geq 0, T \in \mathcal{T}, R \in \mathcal{R}} \left\{ \text{Sp } C^T D C : D \leq T, D \leq (A^T R^{-1} A)^{-1} \right\}. \quad (4.2)$$

Наименее благоприятно в задаче (1.2), (4.1) нормальное распределение вектора (θ, ρ) в случае

$$\text{cov}(\theta, \theta) = T_*, \quad \text{cov}(\rho, \rho) = R_*, \quad \text{cov}(\rho, \theta) = -AD_*, \quad (4.3)$$

где D_*, T_*, R_* — решение задачи (4.2), а минимаксно-байесовская оценка $\hat{I}_*$ линейна.

Доказательство. Случайный вектор $Y = (\gamma, \theta)$ с компонентами $\gamma \in \mathbf{R}^n$, $\theta \in \mathbf{R}^m$ имеет известное среднее $\mathbf{E}Y = Y_0 = (A\theta_0, \theta_0)$ и неизвестную ковариационную матрицу $K = \text{cov}(Y, Y)$, которая принадлежит выпуклому компакту

$$\mathcal{K} = \left\{ K \geq 0 : K_{\theta\theta} = T \in \mathcal{T}, K_{\gamma\gamma} - K_{\gamma\theta} A^T - A K_{\theta\gamma} + A K_{\theta\theta} A^T = R \in \mathcal{R} \right\}. \quad (4.4)$$

По теореме 2.1 поэтому справедливо равенство (2.1), причем оценка $\hat{I}_*$ будет линейна. Для любой матрицы $K \in \mathcal{K}$ фигурирующая в нем матрица

$$D = K_{\theta\theta} - K_{\theta\gamma} K_{\gamma\gamma}^+ K_{\gamma\theta} \quad (4.5)$$

удовлетворяет неравенствам $0 \leq D \leq K_{\theta\theta} = T$ (см. [1]). Кроме того, поскольку она является ковариационной матрицей оптимальной оценки (2.5) для нормального распределения $P = N(Y_0, K)$, то

$$D \leq \text{cov}(\hat{\theta}_1 - \theta, \hat{\theta}_1 - \theta) = D(R) := (A^T R^{-1} A)^{-1},$$

где $\hat{\theta}_1$ обозначает МНК-оценку (3.7), а ее ковариационная матрица берется относительно распределения $P = N(Y_0, K)$. Следовательно, матрица (4.5) удовлетворяет ограничениям задачи (4.2), и поэтому значение этой задачи не меньше значения задачи (2.1).

Наоборот, пусть D — произвольная матрица, удовлетворяющая ограничениям задачи (4.2):

$$0 \leq D \leq T, \quad D \leq D(R). \quad (4.6)$$

Докажем, что матрица

$$K = \begin{pmatrix} R + A(T - 2D) A^T & A(T - D) \\ (T - D) A^T & T \end{pmatrix}, \quad (4.7)$$

формально соответствующая выбору $\text{cov}(\rho, \theta) = -AD$, действительно является ковариационной для случайного вектора Y (т.е. принадлежит матричному множеству $\mathcal{K}$, определенному в (4.4)) и удовлетворяет неравенству

$$K_{\theta\theta} - K_{\theta\gamma} K_{\gamma\gamma}^+ K_{\gamma\theta} \geq D \quad (4.8)$$

(в этот момент $K_{\theta\theta}, K_{\theta\gamma}, K_{\gamma\gamma}$ обозначают просто блоки матрицы K).

Для этого вычислим квадратичную форму $\langle Kx, x \rangle$ с вектором $x := (x_0, x_1) \in \mathbf{R}^{n+m}$, где $x_0 \in \mathbf{R}^n$, $x_1 \in \mathbf{R}^m$. Формально она равна дисперсии случайной величины $\langle x_0, \gamma \rangle + \langle x_1, \theta \rangle = \langle x_0, \rho \rangle + \langle A^T x_0 + x_1, \theta \rangle$. Поэтому для любого $x \in \mathbf{R}^{n+m}$ имеем

$$\begin{aligned} \langle Kx, x \rangle &= \langle Rx_0, x_0 \rangle + \left\langle T(A^T x_0 + x_1), A^T x_0 + x_1 \right\rangle \\ &\quad - 2\langle AD(A^T x_0 + x_1), x_0 \rangle \equiv \langle (R - ADA^T)x_0, x_0 \rangle \\ &\quad + \left\langle (T - D)(A^T x_0 + x_1), A^T x_0 + x_1 \right\rangle + \langle Dx_1, x_1 \rangle. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Чтобы показать, что матрица (4.7) неотрицательно определена, мы должны проверить, что $\langle Kx, x \rangle \geq 0$ для любого $x \in \mathbf{R}^{n+m}$.

Согласно (4.6), $T - D \geq 0$, $D \geq 0$, поэтому последние два слагаемых в тождестве (4.9) неотрицательны. Покажем, что и первое тоже:

$$R - ADA^T \geq 0. \quad (4.10)$$

В силу (4.6) $ADA^T \leq A(A^T R^{-1} A)^{-1} A^T = R^{1/2} Q R^{1/2}$, где $Q := R^{-1/2} A (A^T R^{-1} A)^{-1} A^T R^{-1/2}$ — это оператор ортогонального проектирования ($Q^T = Q$, $Q^2 = Q$). Поскольку $Q \leq I_n$, то $R^{1/2} Q R^{1/2} \leq R^{1/2} R^{1/2} = R$, что с учетом предыдущего неравенства дает неравенство (4.10).

Таким образом, в силу (4.9), (4.10) и (4.6) имеем $\langle Kx, x \rangle \geq \langle Dx_1, x_1 \rangle \geq 0$ для любого $x \in \mathbf{R}^{n+m}$. Это означает, что матрица (4.7) является ковариационной. Кроме того, взяв в последнем неравенстве минимум по $x_0 \in \mathbf{R}^n$, получим неравенство $\langle (K_{\theta\theta} - K_{\theta\gamma} K_{\gamma\gamma}^+ K_{\gamma\theta}) x_1, x_1 \rangle \geq \langle Dx_1, x_1 \rangle$, эквивалентное (4.8). Очевидно, что $\text{cov}(\rho, \rho) = R$, т.е. матрица (4.7) удовлетворяет всем равенствам (4.4), так что $K \in \mathcal{K}$.

В силу (4.8) для этой матрицы K выполнено неравенство $\text{Sp } C^T (K_{\theta\theta} - K_{\theta\gamma} K_{\gamma\gamma}^+ K_{\gamma\theta}) C \geq \text{Sp } C^T D C$, поэтому значение задачи (2.1) не меньше значения задачи (4.2). Формула (4.2) доказана.

Пусть теперь D_*, T_*, R_* — решение задачи (4.2). Обозначим соответствующую матрицу (4.7) через $\bar{K}$. Тогда в силу предыдущего неравенства получим $\text{Sp } C^T (\bar{K}_{\theta\theta} - \bar{K}_{\theta\gamma} \bar{K}_{\gamma\gamma}^+ \bar{K}_{\gamma\theta}) C \geq \text{Sp } C^T D_* C = D_{\min}$, т.е. $\bar{K}$ — решение задачи (2.1). Следовательно, по теореме 2.1 наименее благоприятным будет нормальное распределение вектора (θ, ρ) в случае (4.3), и минимаксно-байесовская оценка будет линейна. Теорема 4.1 доказана.

Следствие 4.1. Матрица условной ковариации вектора $l = C^T \theta$ относительно вектора $\gamma = A\theta + \rho$ для наименее благоприятного распределения P_* равна $C^T D_* C$.

Доказательство. Обозначим через $\bar{D}$ матрицу (4.5), соответствующую матрице $\bar{K}$. Как мы только что показали, матрица $\bar{D}$ удовлетворяет ограничениям задачи (4.2) и неравенству $\bar{D} \geq D_*$ (см. (4.8)). Поэтому $C^T \bar{D} C \geq C^T D_* C$. В действительности здесь достигается равенство, ибо в противном случае мы получили бы, что $C^T \bar{D} C = C^T D_* C + U$, где $U \geq 0$, $U \neq 0$. Тогда $\text{Sp } U > 0$, и поэтому $\text{Sp } C^T \bar{D} C > \text{Sp } C^T D_* C$, т.е. D_* — не решение задачи (4.2). Следствие 4.1 доказано.

Статистический смысл этого результата заключается в том, что матрица условной ковариации $C^T D_* C$ вектора $l = C^T \theta$ для наименее благоприятного распределения равна, грубо говоря, минимальной из ковариационных матриц

$$D_0 := C^T T_* C, \quad D_1 := C^T (A^T R_*^{-1} A)^{-1} C \quad (4.11)$$

оценок вектора l , полученных из априорных данных θ_0 и методом наименьших квадратов по измерениям γ (поскольку отношение $D_0 \geq D_1$ задает лишь частичный порядок на матрицах ковариаций, то упорядочивание производится относительно скалярной величины $\mathbf{E}|\hat{l} - l|^2$). Далее мы покажем, что если оценивается весь вектор параметров, то для получения минимаксной оценки в случае произвольной корреляции сигнала и шума нужно по одним направлениям взять МНК-оценки параметров, а по остальным довольствоваться априорными значениями этих параметров.

Случай известных ковариаций векторов θ и ρ . Здесь мы будем считать, что ковариационные матрицы векторов θ и ρ нам точно известны, так что $\mathcal{P} = \mathcal{P}_0$ — класс всех распределений $P(y)$ случайного вектора $Y = (A\theta + \rho, \theta)$, удовлетворяющих (4.1) при $\mathcal{T} = \{T\}$, $\mathcal{R} = \{R\}$, $T = T_*$, $R = R_*$. По-видимому, даже в этом случае не существует простого выражения для гарантированной точности $D(\hat{l})$ на классе всех линейных оценок $\hat{l}(\gamma)$. Поэтому сначала мы рассмотрим задачу (1.2) на более узком классе оценок

$$\hat{l} = Q\hat{l}_1 + (I - Q)\hat{l}_0, \quad Q^T = Q, \quad Q^2 = Q, \quad (4.12)$$

в которых Q — это ортогональный проектор в $\mathbf{R}^r$, $\hat{l}_0 = l_0 = C^T \theta_0$ — априорная оценка вектора $l = C^T \theta$, а $\hat{l}_1 = C^T \hat{\theta}_1 = C^T (A^T R_*^{-1} A)^{-1} A^T R_*^{-1} \gamma$ — МНК-оценка этого вектора (см. (3.7)). Оказывается, что в этом случае величина апостериорной точности $\mathbf{E}_P |\hat{l} - l|^2$ будет одной и той же для всех распределений $P(y)$ с фиксированными $\text{cov}(\theta, \theta)$, $\text{cov}(\rho, \rho)$ и произвольной взаимной ковариацией векторов θ и ρ .

Теорема 4.2. Точность ортогональной оценки (4.12) не зависит от взаимной ковариации случайных параметров θ и вектора ошибок ρ :

$$D(\hat{l}) \equiv \mathbf{E}_P |\hat{l} - l|^2 = \text{Sp}[Q D_1 + (I_r - Q) D_0] \quad \forall P \in \mathcal{P}_0, \quad (4.13)$$

и оптимальной в таком классе будет оценка

$$\hat{l}_\perp = Q_\perp \hat{l}_1 + (I_r - Q_\perp) \hat{l}_0, \quad (4.14)$$

в которой $Q_\perp$ — это ортогональный проектор на положительное собственное пространство матрицы $D_0 - D_1$. Если к тому же оценивается весь вектор параметров, т.е.

$$\text{rank } C = r = m, \quad (4.15)$$

то

$$D(\hat{l}_\perp) = \sup_D \left\{ \text{Sp } C^T D C : D \leq T, D \leq D(R) \right\}, \quad (4.16)$$

причем задача (4.16) имеет единственное решение $D_\perp$, определяемое равенством

$$C^T D_\perp C = Q_\perp D_1 + (I_m - Q_\perp) D_0. \quad (4.17)$$

Поясним, что если симметрическая матрица H имеет собственные числа $\lambda_j = \lambda_j(H)$ и ортонормированные собственные векторы p_j , то ортогональный проектор на ее положительное собственное пространство равен

$$Q_\perp = \sum_{j: \lambda_j > 0} p_j p_j^T. \quad (4.18)$$

Доказательство. Поскольку $\hat{l} = l_0 + X^T(\gamma - \gamma_0)$, где $X^T := Q C^T (A^T R^{-1} A)^{-1} A^T R^{-1} = Q C^T D(R) A^T R^{-1}$, то

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_P |\hat{l} - l|^2 &= \mathbf{E}_P \left| (A^T X - C)^T \theta + X^T \rho \right|^2 = \langle T(A^T X - C), A^T X - C \rangle \\ &\quad + \langle R X, X \rangle + 2 \text{Sp } X (A^T X - C)^T \text{cov}(\theta, \rho). \end{aligned}$$

Отсюда следует, что эта величина не зависит от $\text{cov}(\theta, \rho)$, ибо

$$\begin{aligned} X (A^T X - C)^T &= X (C Q - C)^T = R^{-1} A D(R) C Q (Q - I_r) C^T \\ &= R^{-1} A D(R) C (Q^2 - Q) C^T = 0. \end{aligned}$$

Так как обе матрицы Q и $I_r - Q$ суть проекторы, то

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_P |\hat{l} - l|^2 &= \langle T(C Q - C), C Q - C \rangle + \langle R X, X \rangle = \text{Sp } T C (Q - I_r)^2 C^T \\ &\quad + \text{Sp } A D(R) C Q^2 C^T D(R) A^T R^{-1} = \text{Sp } C^T T C (I_r - Q) \\ &\quad + \text{Sp } C Q C^T D(R) = \text{Sp } C^T T C (I_r - Q) + \text{Sp } Q C^T D(R) C, \end{aligned}$$

что с учетом обозначений (4.11) дает (4.13).

Теперь из (4.13) и леммы 5.2 (см. также замечание 5.1) вытекает, что оценка (4.14) оптимальна на классе ортогональных оценок (4.12). При выполнении условия (4.15) стоящая в правой части (4.16) экстремальная задача эквивалентна задаче

$$\sup_D \{ \text{Sp } D : D \leq D_k, k = 0, 1 \},$$

которая по лемме 5.3 имеет единственное решение, определяемое равенством (4.17). Равенство (4.16) следует из следствия 5.1 и замечания 5.1. Теорема 4.2 доказана.

С этого места до конца п. 4 предполагается выполненным условие (4.15).

Следствие 4.2. Если матрица $D_{\perp}$ в (4.17) неотрицательно определена, то она дает решение двойственной задачи (4.2), а ортогональная оценка (4.14) дает решение исходной задачи (1.2).

Доказательство. В этом случае матрица $D_{\perp}$ удовлетворяет всем ограничениям двойственной задачи (4.2) и максимизирует функционал $\text{Sp } C^T D C$ даже на более широком множестве $\{D : D \leq T, D \leq D(R)\}$. Тогда по равенству (4.16) $D(\hat{l}_{\perp}) = \text{Sp } C^T D_{\perp} C = D_{\min}$, т.е. оценка (4.14) дает решение исходной задачи (1.2).

Следствие 4.3. Если матрицы (4.11) коммутируют, то ортогональная оценка (4.14) дает решение исходной задачи (1.2).

Доказательство. Если D_0 и D_1 коммутируют, то они имеют общий набор ортонормированных собственных векторов $\{p_j, j = 1, \dots, m\}$, совпадающий с набором таких векторов для матрицы $D_0 - D_1$. Поэтому матрица (4.17) имеет тот же набор ортонормированных собственных векторов и принимает вид

$$C^T D_{\perp} C = \sum_{j=1}^m \min(\lambda_j(D_0), \lambda_j(D_1)) p_j p_j^T.$$

Эта матрица неотрицательно определена, так как $\lambda_j(D_k) \geq 0$, $j = 1, \dots, m$, $k = 0, 1$, поэтому матрица $D_{\perp}$ тоже неотрицательно определена. Следствие 4.3 доказано.

Стоит отметить, что в этом случае

$$\hat{l}_{\star} = \sum_{j \in \omega_1} \langle \hat{l}_1, p_j \rangle p_j + \sum_{j \in \omega_0} \langle \hat{l}_0, p_j \rangle p_j,$$

где ω_1 — набор тех индексов, для которых собственные числа матрицы D_1 меньше соответствующих собственных чисел матрицы D_0 , а ω_0 — его дополнение.

Следствие 4.4. Если $l = \theta$ и $T := \text{cov}(\theta, \theta) = \sigma^2 I_m$, то

$$\hat{\theta}_{\star} = \sum_{\lambda_j < \sigma^2} \langle \hat{\theta}_1, p_j \rangle p_j + \sum_{\lambda_j \geq \sigma^2} \langle \hat{\theta}_0, p_j \rangle p_j,$$

где λ_j и p_j , $j = 1, \dots, m$, — это собственные числа и ортонормированные собственные векторы матрицы $D_1 = (A^T R_*^{-1} A)^{-1}$. Наименее благоприятно нормальное распределение в случае $\text{cov}(\rho, \theta) = -AD_*$ и матрицы

$$D_* = \sum_{j=1}^m \min(\sigma^2, \lambda_j(D_1)) p_j p_j^T.$$

Сравнивая (4.16) с (4.2), легко заметить, что ортогональная оценка (4.14) будет оптимальной только в том случае, когда матрица $D_\perp$ неотрицательно определена. Но даже когда это не так, оказывается, что минимаксно-байесовская оценка имеет вид

$$\hat{l}_* = Q_* \hat{l}_1 + (I_m - Q_*) \hat{l}_0, \quad Q_*^2 = Q_*, \quad (4.19)$$

на этот раз с неортогональным проектором Q_* . Следующий результат показывает, что для ее нахождения мы можем сначала вычислить ортогональные оценки $\hat{l}_\perp$ для всех векторных параметров $l = Vl$, $V \geq I_m$, а потом выбрать среди них самую лучшую.

Теорема 4.3. *Исходная задача (1.2) сводится к задаче*

$$\inf_{V \geq I_m} \{D(\hat{l}_\perp): l := Vl\}, \quad (4.20)$$

т.е. а) значения задач (1.2) и (4.20) одинаковы; б) если V_* — решение задачи (4.20), то минимаксно-байесовской будет линейная оценка $\hat{l}_* = V_*^{-1} \hat{l}_\perp$, в которой $\hat{l}_\perp = Q_\perp \hat{l}_1 + (I_m - Q_\perp) \hat{l}_0$ — ортогональная оценка (4.14) вектора $l := V_* l = V_* C^T \theta$, $\hat{l}_1 := V_* \hat{l}_1$ — МНК-оценка этого вектора, $\hat{l}_0 := V_* \hat{l}_0 = V_* C^T \theta_0$ — его априорная оценка, а $Q_\perp$ — это ортогональный проектор на положительное собственное пространство матрицы $V_*(D_0 - D_1)V_*$.

Доказательство. Согласно (4.16), задачу (4.20) можно записать в таком виде: $\inf_{V \geq I_m} \sup_D \{\text{Sp}(CV)^T D(CV): D \leq T, D \leq D(R)\}$. По лемме 5.4 это выражение совпадает с правой частью (4.2), т.е. значения задач (1.2) и (4.20) одинаковы.

Пусть V_* будет решением задачи (4.20) и $\nu := \hat{l}_* - l$. Тогда, согласно (4.20) и (4.13), получим

$$\begin{aligned} D_{\min} &= D(\hat{l}_\perp) \equiv \mathbf{E}_P |\hat{l}_\perp - l|^2 = \mathbf{E}_P |V_*(\hat{l}_* - l)|^2 \\ &= \text{Sp } \mathbf{E}_P [(V_* \nu)(V_* \nu)^T] = \text{Sp } V_*^2 \mathbf{E}_P [\nu \nu^T] \quad \forall P \in \mathcal{P}_0. \end{aligned} \quad (4.21)$$

Поскольку матрица $\mathbf{E}_P [\nu \nu^T]$ неотрицательно определена и $V_*^2 \geq I_m$, то из (4.21) получаем (см. [2])

$$D_{\min} = \text{Sp } V_*^2 \mathbf{E}_P [\nu \nu^T] \geq \text{Sp } \mathbf{E}_P [\nu \nu^T] = \mathbf{E}_P |\hat{l}_* - l|^2 \quad \forall P \in \mathcal{P}_0,$$

и, следовательно, $D_{\min} \geq \sup_{P \in \mathcal{P}} \mathbf{E}_P |\hat{l}_* - l|^2 := D(\hat{l}_*) \geq D_{\min}$. Это означает, что $D_{\min} = D(\hat{l}_*) = D(\hat{l}_\perp)$, т.е. $\hat{l}_*$ — решение исходной задачи (1.2). Теорема 4.3 доказана.

З а м е ч а н и е. Минимаксную оценку $\hat{l}_*$ можно представить в виде (4.19) с неортогональным проектором $Q_* = V_*^{-1} Q_\perp V_*$.

5. Вспомогательные результаты.

Лемма 5.1. Для любой симметрической матрицы C

$$\inf_{B \geq C} \langle A, B \rangle = \begin{cases} \langle A, C \rangle, & A \geq 0, \\ -\infty, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если $A \geq 0$, то (см. [2]) $\langle A, B \rangle \geq \langle A, C \rangle$. Иначе $\langle Ax, x \rangle < 0$ для некоторого вектора $x \neq 0$, и для матриц $B = C + \alpha xx^T$ получим $\langle Bu, u \rangle = \langle Cu, u \rangle + \alpha \langle x, u \rangle^2 \geq \langle Cu, u \rangle$ при всех u и $\alpha > 0$, т.е. $B \geq C$. В то же время $\langle A, B \rangle = \langle A, C \rangle + \alpha \langle Ax, x \rangle \rightarrow -\infty$ при $\alpha \rightarrow +\infty$.

Лемма 5.2. Если D_0, D_1 — симметрические матрицы порядка r , то

$$\inf_{0 \leq Q \leq I_r} \text{Sp}\{QD_1 + (I_r - Q)D_0\} \quad (5.1)$$

достигается на ортогональном проекторе (4.18) на положительное собственное пространство матрицы $D_0 - D_1$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $D_0 - D_1 = O^T \Lambda O$, где O — ортогональная матрица, а $\Lambda := \text{diag}\{\lambda_i\}$ — диагональная матрица из собственных чисел матрицы $D_0 - D_1$. Поскольку задача (5.1) равносильна максимизации функционала $\langle Q, D_0 - D_1 \rangle$ на множестве $0 \leq Q \leq I_r$, то после замены переменных $Q = O^T U O$ она перейдет в задачу максимизации функционала

$$\text{Sp}(O^T U O) (O^T \Lambda O) = \text{Sp} U \Lambda = \sum_{i=1}^r u_{ii} \lambda_i$$

на множестве $0 \leq U \leq I_r$. Поскольку $0 \leq u_{ii} \leq 1$, $i = 1, \dots, r$, то максимум этого функционала по переменным u_{ii} достигается при $u_{ii} = 1$, если $\lambda_i > 0$, и при $u_{ii} = 0$, если $\lambda_i \leq 0$, $i = 1, \dots, r$. Положив $u_{ij} = 0$ при $j \neq i$, получим диагональную матрицу $0 \leq U_\perp \leq I_r$ с диагональными элементами, равными нулю либо единице, которой соответствует ортогональный проектор $Q_\perp = O^T U_\perp O$ на положительное собственное пространство матрицы $D_0 - D_1$. Очевидно, что он и дает минимум в задаче (5.1).

З а м е ч а н и е 5.1. Задача (5.1) имеет то же самое решение и на множестве всех ортогональных проекторов, которое вложено в множество $0 \leq Q \leq I_r$.

Лемма 5.3. Если D_0, D_1 — симметрические матрицы порядка r , то задача

$$\sup_D \{ \text{Sp } D : D \leq D_k, k = 0, 1 \} \quad (5.2)$$

имеет единственное решение

$$D_{\perp} = Q_{\perp} D_1 + (I_r - Q_{\perp}) D_0, \quad (5.3)$$

в котором $Q_{\perp}$ — ортогональный проектор на положительное собственное пространство матрицы $D_0 - D_1$.

Доказательство. Воспользуемся обозначениями, введенными в лемме 5.2. Поскольку след инвариантен относительно ортогональных преобразований, то после замены переменных $D = D_0 - O^T U O$ задача (5.2) перейдет в задачу максимизации функционала $\text{Sp } D = \text{Sp } D_0 - \text{Sp } U = \text{Sp } D_0 - \sum_{i=1}^r u_{ii}$ на множестве всех симметрических матриц U порядка r , которые удовлетворяют ограничениям

$$U \geq 0, \quad U \geq \Lambda. \quad (5.4)$$

В частности, из этих ограничений вытекает, что $u_{ii} \geq 0$, $u_{ii} \geq \lambda_i$, $i = 1, \dots, r$, и поэтому $\sum_{i=1}^r u_{ii} \geq \sum_{i=1}^r \max(0, \lambda_j)$ для любой матрицы U , удовлетворяющей ограничениям (5.4).

Здесь равенство достигается только при $u_{ii} = \max(0, \lambda_i)$, $i = 1, \dots, r$. Так как $U \geq 0$, то если $u_{ii} = 0$, то $u_{ij}^2 \leq u_{ii} u_{jj} = 0$, т.е. $u_{ij} = 0$ при $j \neq i$. Аналогично, так как $U - \Lambda \geq 0$, где Λ — диагональная матрица, то если $u_{ii} = \lambda_i$, то $(u_{ij} - 0)^2 \leq (u_{ii} - \lambda_i)(u_{jj} - \lambda_j) = 0$, т.е. $u_{ij} = 0$ при $j \neq i$. Это означает, что U — диагональная матрица. Таким образом, матрица $D_{\perp} = D_0 - O^T [\text{diag}\{\max(0, \lambda_i)\}] O = D_0 - Q_{\perp} (D_0 - D_1)$ дает единственное решение задачи (5.2). Лемма 5.3 доказана.

Следствие 5.1. Значения задач (5.1) и (5.2) совпадают.

Лемма 5.4. Если $D_k \geq 0$ при $k = 0, 1$, то

$$\max_{D \geq 0} \{ \text{Sp } D : D \leq D_k, k = 0, 1 \} \quad (5.5)$$

$$= \inf_{V \geq I_m} \sup_D \{ \text{Sp } V D V : D \leq D_k, k = 0, 1 \}. \quad (5.6)$$

Если же $D_k > 0$, $k = 0, 1$, то обе задачи (5.5) и (5.6) имеют решения D_* и V_* , которые удовлетворяют условиям

$$V_* \geq I_m, \quad V_* D_* = D_* = Q_* D_1 + (I_m - Q_*) D_0 \geq 0, \quad (5.7)$$

где проектор Q_* имеет вид $Q_* = V_*^{-1} Q_{\perp} V_*$, а $Q_{\perp}$ — это ортогональный проектор на положительное собственное пространство матрицы $V_*(D_0 - D_1)V_*$. И наоборот, если некоторые матрицы D_* и V_* удовлетворяют условиям (5.7), то D_* — решение задачи (5.5), а V_* — решение задачи (5.6).

Доказательство. Поскольку $\text{Sp } VDV = \text{Sp } DV^2 = \text{Sp } DB$, где $B := V^2 \geq I_m$, то (5.6) можно записать как

$$\inf_{B \geq I_m} \sup_D \{ \text{Sp } BD : D \leq D_k, k = 0, 1 \}. \quad (5.8)$$

По теореме о минимаксе [4] эта величина равна

$$\sup_{D \leq D_k, k=0,1} \inf_{B \geq I_m} \text{Sp } BD, \quad (5.9)$$

что с учетом леммы 5.1 дает значение задачи (5.5).

Ясно, что ограничения задачи (5.5) образуют компактное множество. Поэтому задача (5.5), так же как и задача (5.9), имеет решение. Покажем, что если $D_k > 0$, $k = 0, 1$, то задачи (5.6) и (5.8) также имеют решения. При достаточно малых $\varepsilon > 0$ матрица $D = \varepsilon I_m$ удовлетворяет ограничениям $D \leq D_k$, $k = 0, 1$. Кроме того, $\text{Sp } BD = \varepsilon \text{Sp } B > 0$, если $B \geq 0$, $B \neq 0$. Поэтому выпуклая функция

$$\varphi(B) := \sup_D \{ \text{Sp } BD : D \leq D_k, k = 0, 1 \} \quad (5.10)$$

положительна и конечна на множестве $B \geq 0$, $B \neq 0$. Следовательно, она непрерывна при $B > 0$ [6].

Остается проверить, что ее множество уровня $\{B \geq I_m : \varphi(B) \leq \varphi(I_m)\}$ ограничено. Предположим противное. Поскольку это множество выпукло и замкнуто, то оно содержит целый луч [6] $\{B : B = I_m + \alpha A, \alpha \geq 0\}$, где $A \geq 0$, $A \neq 0$. Тогда

$$\varphi(I_m) \geq \varphi(I_m + \alpha A) = \alpha \varphi\left(\frac{I_m}{\alpha} + A\right). \quad (5.11)$$

Поскольку функция $\varphi(B)$ полунепрерывна снизу (как верхняя грань линейных функций), то $\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \varphi(I_m/\alpha + A) \geq \varphi(A) > 0$, что противоречит (5.11), ибо тогда $\varphi(I_m) \geq +\infty$.

Таким образом, двойственные задачи (5.8), (5.9) имеют решения B_* и D_* , которые образуют седловую точку [10], и поэтому по лемме 5.1 удовлетворяют условиям

$$\text{Sp } B_* D_* = \min_{B \geq I_m} \text{Sp } BD_* = \text{Sp } D_*, \quad (5.12)$$

$$\begin{aligned} \text{Sp } B_* D_* &= \max_{D \leq D_k, k=0,1} \text{Sp } B_* D \\ &= \max_D \{ \text{Sp } V_* D V_* : V_* D V_* \leq V_* D_k V_*, k = 0, 1 \}. \end{aligned} \quad (5.13)$$

По лемме 5.3 из (5.13) получаем

$$V_* D_* V_* = Q_\perp (V_* D_1 V_*) + (I_m - Q_\perp) (V_* D_0 V_*) \geq 0. \quad (5.14)$$

Умножая это равенство слева и справа на матрицу V_*^{-1} , получим второе из равенств (5.7).

Далее, поскольку $B_* \geq I_m$, $D_* \geq 0$ и, согласно (5.12), $\text{Sp}(B_* - I_m) D_* = 0$, то $(B_* - I_m) D_* = 0$ [2], т.е.

$$(V_* + I_m)(V_* - I_m) D_* = (V_*^2 - I_m) D_* = 0, \quad (5.15)$$

что дает равенство $V_* D_* = D_*$.

Наоборот, пусть выполнены условия (5.7). Тогда выполнены и соотношения (5.14), (5.15), т.е. B_* — решение задачи (5.12), а $V_* D_* V_*$ — решение (5.13). Последнее удовлетворяет ограничениям в (5.13), поэтому $D_* \leq D_k$, $k = 0, 1$. Иными словами, (B_*, D_*) — седловая точка в задаче (5.8). Тогда B_* — решение задачи (5.8), а D_* — решение задачи (5.9) (см. [10]), а тем самым и задачи (5.5). Лемма 5.4 доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Алберт А. Регрессия, псевдоинверсия и рекуррентное оценивание. М.: Наука, 1977, 224 с.
2. Беллман Р. Введение в теорию матриц. М.: Мир, 1969, 352 с.
3. Липцер Р. Ш., Ширяев А. Н. Статистика случайных процессов. М.: Наука, 1974, 696 с.
4. Обен Ж. П., Экланд И. Прикладной нелинейный анализ. М.: Мир, 1988, 512 с.
5. Панков А. Р. Рекуррентная условно-минимаксная фильтрация процессов в разностных нелинейных стохастических системах. — Техн. киберн., 1992, № 3, с. 63–70.
6. Рокафеллар Р. Т. Выпуклый анализ. М.: Наука, 1973, 471 с.
7. Соловьев В. Н. Минимаксное и минимаксно-байесовское оценивание на классах распределений с ограниченными вторыми моментами. — Успехи матем. наук, 1995, т. 50, № 4, с. 171–172.
8. Соловьев В. Н. Минимаксно-байесовское оценивание параметров линейной регрессии. — Успехи матем. наук, 1996, т. 51, № 3, с. 211–212.
9. Соловьев В. Н. Двойственные экстремальные задачи и их применения к задачам минимаксного оценивания. — Успехи матем. наук, 1997, т. 52, № 4, с. 49–86.
10. Экланд И., Темам Р. Выпуклый анализ и вариационные проблемы. М.: Мир, 1979, 400 с.
11. Berger J. O. Statistical Decision Theory and Bayesian Analysis. New York: Springer-Verlag, 1985.
12. Berger J. O. Robust Bayesian analysis: sensitivity to the prior. — Statist. Plann. Inference, 1990, v. 25, p. 303–328.
13. Lauter H. A minimax linear estimator for linear parameters under restrictions in form of inequalities. — Math. Operations-forsch. und Statist., 1975, B. 6, № 5, S. 689–695.
14. Rao C. R. Linear Statistical Inference and Its Applications. New York: Wiley, 1971.
15. Soloviov V. Minimax estimation and the least squares method. — Stochastics Stochastics Rep., 1993, v. 42, p. 209–223.
16. Vandelinde V. D. Robust properties of solutions to linear-quadratic estimation and control problems. — IEEE Trans. Automat. Control, 1977, v. 22, № 1, p. 138–139.
17. Соловьев В. Н. К вопросу о минимаксно-байесовском оценивании. — Успехи матем. наук, 1998, т. 53, № 5, с. 247–248.

Поступила в редакцию
20.X.1997