Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Г. Гринь, О строгом притяжении стационарных последовательностей к нормальному закону, *Теория вероятн. и ее примен.*, 1999, том 44, выпуск 4, 846–852

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp1069>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.164.48.24

26 апреля 2023 г., 16:46:20

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

© 1999 г.

ГРИНЬ А. Г.*

О СТРОГОМ ПРИТЯЖЕНИИ СТАЦИОНАРНЫХ
ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ К НОРМАЛЬНОМУ ЗАКОНУ¹⁾

Для стационарных последовательностей, удовлетворяющих условию равномерно сильного перемешивания, получены общие условия притяжения к нормальному закону в терминах распределений отдельных слагаемых. Основной результат работы обобщает все известные к настоящему времени результаты такого типа.

Ключевые слова и фразы: стационарные последовательности, равномерно сильное перемешивание, экстремальные критерии, строгое притяжение к нормальному закону.

1. Введение. Формулировки основных результатов. Пусть $\{\xi_n\}$ — стационарная в узком смысле последовательность, и пусть $S_n = \sum_{k=1}^n \xi_k$. Будем писать $\xi_n \xrightarrow{P} \eta$, $\xi_n \xrightarrow{d} \eta$ и $\xi_n \stackrel{d}{\sim} \eta_n$ в случаях, когда, соответственно, ξ_n сходятся к η по вероятности, по распределению и когда последовательности $\{\xi_n\}$ и $\{\eta_n\}$ стохастически эквивалентны (см., например, [1, с. 392]). Обозначим через $\mathcal{N}(0, 1)$ случайную величину, имеющую стандартное нормальное распределение. Если при некотором выборе нормирующих постоянных A_n и B_n имеет место соотношение

$$B_n^{-1} S_n - A_n \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, 1),$$

то, следуя [2], будем говорить, что последовательность $\{\xi_n\}$ притягивается к нормальному закону. Если $E\xi_n^2 < \infty$, $n = 1, 2, \dots$, $\sigma_n^2 = DS_n$ и $\sigma_n^{-1}(S_n - ES_n) \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, 1)$, то говорят, что к последовательности $\{\xi_n\}$ применима центральная предельная теорема.

В настоящей работе рассматриваются стационарные последовательности, удовлетворяющие условию равномерно сильного перемешивания (φ -перемешивания) с коэффициентом перемешивания $\varphi(n)$ таким, что $\varphi(1) < 1$; такое условие будем называть условием φ_1 -перемешивания.

Для стационарных последовательностей $\{\xi_n\}$ с φ_1 -перемешиванием до настоящего времени не доказано и не опровергнуто следующее предположение.

Гипотеза (И. А. Ибрагимов, М. Иосифеску, см. [3]). Если распределение величины ξ_1 принадлежит области притяжения нормального закона, то стационарная последовательность $\{\xi_n\}$ с φ_1 -перемешиванием притягивается к нормальному закону.

Результаты последних лет показали, что притяжение (или отсутствие притяжения) стационарных последовательностей к нормальному закону во многом обусловлено поведением дисперсий сумм слабо зависимых величин (см., например, теорему 2 далее). Вместе с тем, существуют условия на распределение ξ_1 , обеспечивающие притяжение к нормальному закону любой стационарной последовательности $\{\xi_n\}$,

* Омский государственный университет, пр. Мира, 55а, 644077 Омск, Россия.

¹⁾ Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант 96-01-00091.

удовлетворяющей условию φ_1 -перемешивания (и, следовательно, при любом возможном поведении дисперсий сумм).

Пусть $L(\xi)$ обозначает распределение случайной величины ξ . Обозначим через $\mathcal{N}$ классическую область притяжения нормального закона:

$$\mathcal{N} = \{L(\xi): E\xi^2 1(|\xi| \leq x) - \text{медленно меняющаяся функция}\},$$

а через $\mathcal{N}_0$ — область строгого притяжения нормального закона, т.е. множество всех распределений таких, что любая стационарная последовательность $\{\xi_n\}$, удовлетворяющая условию φ_1 -перемешивания и такая, что $L(\xi_1) \in \mathcal{N}_0$, притягивается к нормальному закону. Ясно, что $\mathcal{N}_0 \subseteq \mathcal{N}$, а гипотеза Ибрагимова-Иосифеску утверждает, что $\mathcal{N}_0 = \mathcal{N}$. Множество всех распределений $L(\xi)$ таких, что к любой стационарной последовательности $\{\xi_n\}$, удовлетворяющей условию φ_1 -перемешивания и такой, что $L(\xi_1) = L(\xi)$, применима центральная предельная теорема, будем обозначать $\mathcal{M}_1$. Понятно, что $\mathcal{M}_1 \subseteq \mathcal{N}_0$.

Как и в [3], мы будем рассматривать последовательности $\{\xi_n\}$, у которых $P\{|\xi_1| \geq x\} > 0$ при любом $x > 0$; в противном случае вопрос о притяжении к нормальному закону решается, например, в теореме 18.5.1 из [4]. Сделанное предположение обеспечивает, в частности, стремление σ_n к бесконечности при $n \rightarrow \infty$ (см. лемму 2) и исключает из рассмотрения вырожденный случай, описанный в теореме 18.2.2 из [4].

Известны следующие результаты, касающиеся строгого притяжения стационарных последовательностей с φ_1 -перемешиванием к нормальному закону.

1. Если $E|\xi|^p < \infty$, $p > 2$, то $L(\xi) \in \mathcal{M}_1$ (И. А. Ибрагимов, [4]).

2. Если $P\{|\xi| \geq x\}$ — правильно меняющаяся функция порядка -2 , т.е. $P\{|\xi| \geq x\} = x^{-2}h(x)$, где $h(x)$ — медленно меняющаяся функция, то $L(\xi) \in \mathcal{N}_0$ (М. Пелиград, [3]).

3. Если $P\{|\xi| \geq x\} = x^{-2}h(x)$, где $h(x)$ такова, что при любом $\lambda > 0$

$$0 < C_1 \leq \liminf_{x \rightarrow \infty} \frac{h(\lambda x)}{h(x)} \leq \limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{h(\lambda x)}{h(x)} \leq C_2 < \infty,$$

то $L(\xi) \in \mathcal{N}_0$ (С. А. Клоков, [5]). Описанные выше функции $h(x)$ названы в [6] SO-меняющимися; класс SO-меняющихся функций существенно шире класса медленно меняющихся функций: в него входят, например, все функции, отделенные от нуля и бесконечности.

Введем еще некоторые обозначения. Будем писать $\alpha(n) \ll \beta(n)$ в случае, когда $\alpha(n) = O(\beta(n))$, $n \rightarrow \infty$, и $\alpha(n) \asymp \beta(n)$, если $\alpha(n) \ll \beta(n)$ и $\beta(n) \ll \alpha(n)$. Далее, пусть

$$a_n = \sup \{x: nP\{|\xi_1| \geq x\} \geq 1\}, \\ X_n = \max_k \xi_k, \quad \hat{X}_n = \max_k \hat{\xi}_k, \quad c_n(p) = \|\hat{X}_n\|_p = \left\{E|\hat{X}_n|^p\right\}^{1/p}, \quad p > 0.$$

Здесь через $\hat{\xi}_1, \dots, \hat{\xi}_n$ обозначены независимые случайные величины такие, что $\hat{\xi}_k \stackrel{d}{=} \xi_k$, $k = 1, 2, \dots, n$, а в случаях, когда в суммах, максимумах и пр. не указаны пределы изменения переменной k , предполагается, что она меняется от 1 до n . Легко видеть, что $\{a_n\}$ и $\{c_n(p)\}$ определяются лишь распределением величины ξ_1 , не убывают по n , $a_n \rightarrow \infty$, $n \rightarrow \infty$, $nP\{|\xi_1| \geq a_n\} \geq 1$, $nP\{|\xi_1| > a_n\} < 1$ и $c_{n+m}^p(p) \leq c_n^p(p) + c_m^p(p)$, $p > 0$.

Следующая теорема является основным результатом настоящей работы.

Теорема 1. 1. Если при некотором $p > 0$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \limsup_{n \rightarrow \infty} n \int_N^\infty P\{\xi^2 \geq xc_n^2(p)\} dx = 0, \quad (1)$$

то $L(\xi) \in \mathcal{M}_1$.

2. Если при некотором $p > 0$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \liminf_{n \rightarrow \infty} n \int_\varepsilon^1 P\{\xi^2 \geq xc_n^2(p)\} dx = \infty, \quad (2)$$

то $L(\xi) \in \mathcal{N}_0$.

Следствие 1. Если $E|\xi|^p < \infty$, $p > 2$, то выполняется условие (1), следовательно, $L(\xi) \in \mathcal{M}_1$, и мы получаем результат И. А. Ибрагимова из [4].

Доказательство приводится в п. 2.

Следствие 2. Конечный предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} nP\{\xi^2 \geq xc_n^2(p)\} = g(x)$$

существует тогда и только тогда, когда $P\{\xi^2 \geq x\}$ является правильно меняющейся функцией порядка $-\rho$, $\rho \geq 0$, при этом $g(x) = cx^{-\rho}$, $c > 0$ [7, с. 318]. При $\rho > 1$ $\int_1^\infty g(x) dx < \infty$, следовательно, выполнено условие (1) и $L(\xi) \in \mathcal{M}_1$. При $\rho \geq 1$ $\int_0^1 g(x) dx = \infty$, следовательно, имеет место (2), так что $L(\xi) \in \mathcal{M}_0$, что дает нам результат М. Пелиград из [3]. При $\rho < 1$ не выполняются ни условие (1), ни условие (2), но в этом случае $L(\xi) \notin \mathcal{N}$, так что тем более $L(\xi) \notin \mathcal{M}_0$.

Следствие 3. Пусть $P\{\xi^2 \geq x\} = x^{-\rho}h(x)$, где $\rho > 0$, а $h(x)$ есть SO-меняющаяся функция. В п. 2 будет показано, что при $\rho < 2$

$$nP\{\xi^2 \geq xc_n^2(p)\} \asymp \frac{1}{x^\rho}, \quad n \rightarrow \infty,$$

и, аналогично следствию 2, выводим, что при $\rho > 1$ $L(\xi) \in \mathcal{M}_1$, при $\rho \geq 1$ $L(\xi) \in \mathcal{M}_0$, откуда следует результат С. А. Клокова из [5]. Если же $\rho < 1$, то $L(\xi) \notin \mathcal{N}$ и, следовательно, $L(\xi) \notin \mathcal{M}_0$.

З а м е ч а н и е. Следствия 1–3 можно резюмировать следующим образом. Теорема 1 обобщает известные результаты о строгом притяжении стационарных последовательностей к нормальному закону, и в широком классе распределений условие (2) является необходимым и достаточным условием для того, чтобы $L(\xi) \in \mathcal{M}_0$. В этом смысле (2), как говорят, является «острым» условием строгого притяжения стационарных последовательностей с φ_1 -перемешиванием к нормальному закону.

П р и м е р. (Распределение $L(\xi) \in \mathcal{N}$, для которого не выполняются условия (1) и (2) теоремы 1.) Пусть

$$P\{\xi^2 = n!\} = \frac{c}{n!}, \quad n = 2, 3, \dots, \quad c = (e - 2)^{-1}.$$

Тогда $E\xi^2 1(|\xi| \leq x) = c \sum_{2 \leq n! \leq x} 1$ является медленно меняющейся функцией, так что $L(\xi) \in \mathcal{N}$. Ясно, что $E\xi^2 = \infty$, поэтому условие (1) выполняться не может. Далее,

$$P\{\xi^2 \geq n!\} = c \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k!} > \frac{1}{n!}, \quad P\{\xi^2 > n!\} = c \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k!} < \frac{1}{n!}, \quad n = 2, 3, \dots,$$

так что $a_n^2 = n!$ и $P\{\xi^2 \geq xn!\} \sim c/n!$, $n \rightarrow \infty$, $n^{-1} < x \leq 1$, откуда

$$n! \int_{\varepsilon}^1 P\{\xi^2 \geq xn!\} dx \sim c(1 - \varepsilon), \quad n \rightarrow \infty.$$

В силу леммы 2 из п. 2 $c_n(p) \gg a_n$ при любом $0 < p < 2$, что вместе с последним соотношением означает, что условие (2) не выполняется.

2. Доказательства. Основой для доказательства теоремы 1 будут служить так называемые экстремальные критерии — результаты, сводящие вопрос об асимптотическом поведении сумм случайных величин к вопросу об асимптотическом поведении их максимумов (минимумов). С результатами такого типа связан существенный прогресс, достигнутый в последнее время в области предельных теорем для сумм случайных величин с φ_1 -перемешиванием. В частности, ядро доказательства основного результата М. Пелиград в [8] — это утверждение, что для стационарных последовательностей с φ_1 -перемешиванием равномерная интегрируемость $\{\sigma_n^{-2} S_n^2\}$ равносильна равномерной интегрируемости $\{\sigma_n^{-2} X_n^2\}$. Интерес к таким результатам во многом обусловлен тем, что асимптотика распределений максимумов величин с φ_1 -перемешиванием «практически такая же», как асимптотика распределений максимумов независимых величин (см. лемму 1).

Лемма 1 (см. [3]). Для любых x и $n \geq 1$

$$(1 - \varphi(1)) \mathbf{P}\{\widehat{X}_n \geq x\} \leq \mathbf{P}\{X_n \geq x\} \leq (1 + \varphi(1)) \mathbf{P}\{\widehat{X}_n \geq x\}. \quad (3)$$

При любом $p > 0$

$$(1 - \varphi(1)) c_n^p(p) \leq \mathbf{E}|X_n|^p \leq (1 + \varphi(1)) c_n^p(p). \quad (4)$$

Обозначим $\xi_n(x) = \xi_n 1(|\xi_n| \leq x)$, $S_n(x) = \sum_k \xi_k(x)$,

$$\sigma_n^2(x) = \mathbf{D}S_n(x), \quad b_n = \sup \{z \geq 0: \sigma_n(z) \geq z\}.$$

Последовательность $\{b_n\}$ названа в [2] универсальной нормирующей последовательностью для последовательности $\{\xi_n\}$.

Далее, пусть $\widehat{S}_n$ не зависит от S_n , $L(\widehat{S}_n) = L(S_n)$, $n = 1, 2, \dots$, и $\widetilde{S}_n = S_n - \widehat{S}_n$, $b_n(p) = \|\widetilde{S}_n\|_p$, $p > 0$.

Лемма 2. Пусть $\{\xi_n\}$ — стационарная последовательность, удовлетворяющая условию φ_1 -перемешивания, и пусть $\mathbf{E}|\xi_1|^p < \infty$, $p > 0$. Тогда

а) $c_n(p) \gg a_n$;

б) $b_n(p) \gg c_n(p)$;

в) если $\mathbf{E}\xi_1^2 < \infty$, то $\sigma_n \gg c_n(p)$.

Доказательство. а) Пусть $F(x) = \mathbf{P}\{|\xi_1| < x\}$. Тогда при $x < a_n$ имеем $F(x) \leq 1 - 1/n$ и

$$c_n^p(p) = \int_0^\infty x^p dF^n(x) \geq p \int_0^{a_n} x^{p-1} (1 - F^n(x)) dx \gg a_n^p.$$

б) В силу утверждения а) $c_n(p) \gg a_n \rightarrow \infty$, $n \rightarrow \infty$, так что при любом натуральном m

$$\left| \|\widetilde{S}_n\|_p - \|\widetilde{S}_k + (\widetilde{S}_n - \widetilde{S}_{k+m})\|_p \right| \leq m \|\xi_1\|_p = o(c_n(p)), \quad p \geq 1; \quad (5)$$

$$\left| \mathbf{E}|\widetilde{S}_n|^p - \mathbf{E}|\widetilde{S}_k + (\widetilde{S}_n - \widetilde{S}_{k+m})|^p \right| \leq m \mathbf{E}|\xi_1|^p = o(c_n^p(p)), \quad 0 < p < 1. \quad (6)$$

Пусть m таково, что $\varphi(m) < \frac{1}{2}$. Используя симметричность распределений $\widetilde{S}_n - \widetilde{S}_{k+m}$, получаем

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{\widetilde{S}_k + (\widetilde{S}_n - \widetilde{S}_{k+m}) \geq x\} &\geq \mathbf{P}\{\widetilde{S}_k \geq x, \widetilde{S}_n - \widetilde{S}_{k+m} \geq 0\} \\ &\geq \mathbf{P}\{\widetilde{S}_k \geq x\} \left(\frac{1}{2} - \varphi(m) \right). \end{aligned} \quad (7)$$

Так как $L(\widetilde{S}_k) = L(-\widetilde{S}_k)$, то из (7) следует

$$\mathbf{P}\{|\widetilde{S}_k + (\widetilde{S}_n - \widetilde{S}_{k+m})| \geq x\} \geq \left(\frac{1}{2} - \varphi(m) \right) \mathbf{P}\{|\widetilde{S}_k| \geq x\}. \quad (8)$$

Интегрируя (8), выводим $\mathbf{E}|\widetilde{S}_k|^p \leq (\frac{1}{2} - \varphi(m))^{-1} \mathbf{E}|\widetilde{S}_k + (\widetilde{S}_n - \widetilde{S}_{k+m})|^p$, откуда с учетом (5) и (6) получаем

$$\max_k \|\widetilde{S}_k\|_p \ll \|\widetilde{S}_n\|_p + o(c_n(p)). \quad (9)$$

Далее,

$$\max_k \|\widetilde{S}_k\|_p \gg \left\| \max_k |\widetilde{S}_k| \right\|_p. \quad (10)$$

Это предложение 3.2 в [3], причем сделанное в нем предположение $p \geq 1$ несущественно, необходимые изменения в доказательстве предложения для любого $p > 0$ очевидны. Легко видеть, что

$$\max_k |\widetilde{S}_k| \geq \frac{1}{2} \max_k |\xi_k|. \quad (11)$$

Из (9), (10) и (11) следует

$$b_n(p) \gg \left\| \max_k |\tilde{\xi}_k| \right\|_p + o(c_n(p)). \quad (12)$$

Пусть μ обозначает медиану величины ξ_1 . Из неравенства симметризации (см., например, [1, с. 261]) и леммы 1 при любом $x > 0$ получаем

$$P\left\{\max_k |\tilde{\xi}_k| \geq x\right\} \gg P\left\{\max_k |\hat{\xi}_k - \mu| \geq x\right\},$$

откуда выводится

$$\left\| \max_k |\tilde{\xi}_k| \right\|_p \gg \left\| \max_k |\hat{\xi}_k - \mu| \right\|_p \gg c_n(p). \quad (13)$$

Из (12) и (13) следует утверждение б).

в) Если $0 < p \leq 2$, то в силу утверждения б)

$$\sigma_n^2 = \frac{1}{2} b_n^2(2) \geq \frac{1}{2} b_n^2(p) \gg c_n^2(p).$$

Если же $p > 2$, то

$$b_n(p) = \|\tilde{S}_n\|_p \ll \sigma_n. \quad (14)$$

Это неравенство для $2 < p \leq 3$ доказано в [4, теорема 18.5.1], при произвольном $p > 2$ оно следует из теоремы 1.1 в [9]. Из (14) и утверждения б) настоящей леммы следует утверждение в).

В следующей теореме приводятся экстремальные критерии притяжения стационарных последовательностей к нормальному закону.

Теорема 2. Пусть $\{\xi_n\}$ — стационарная последовательность, удовлетворяющая условию φ_1 -перемешивания.

1. Для того чтобы $\{\xi_n\}$ была применима центральная предельная теорема, необходимо и достаточно, чтобы последовательность $\{\sigma_n^{-2} \hat{X}_n^2\}$ была равномерно интегрируемой.

2. Следующие условия эквивалентны:

а) $\{\xi_n\}$ притягивается к нормальному закону;

б) $b_n^{-1} \hat{X}_n \xrightarrow{P} 0, n \rightarrow \infty$;

в) при некотором $p > 0$: $b_n^{-1} c_n(p) \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$.

Доказательство. Утверждение 1 следует из предложения 2.1 в [8] и леммы 1. Будем доказывать утверждение 2. Нетрудно показать, что при любом $x > 0$

$$nP\left\{|\xi_1| \geq x\right\} P\left\{|\hat{X}_n| < x\right\} \leq P\left\{|\hat{X}_n| \geq x\right\} \leq nP\left\{|\xi_1| \geq x\right\}. \quad (15)$$

Из (15) следует, что утверждение б) равносильно соотношению

$$nP\left\{|\xi_1| \geq \varepsilon b_n\right\} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty, \quad (16)$$

при любом $\varepsilon > 0$. В свою очередь (16) имеет место тогда и только тогда, когда $\{\xi_n\}$ притягивается к нормальному закону [10, теорема 3]. Далее, очевидно, что из в) следует б). Если же выполнено б), то в силу сказанного выше $\{\xi_n\}$ притягивается к нормальному закону и тогда при любом $0 < p < 2$ последовательность $\{b_n^{-p} |\tilde{S}_n|^p\}$ равномерно интегрируема [2, лемма 5], и из леммы 4а) в [2] следует, что равномерно интегрируемой является последовательность $\{b_n^{-p} |\max_k \tilde{\xi}_k|^p\}$. Утверждение в) следует теперь из б) и (13). Теорема доказана.

Доказательство теоремы 1. 1) Пусть $\{\xi_n\}$ — стационарная последовательность, удовлетворяющая условию φ_1 -перемешивания, $L(\xi_1) = L(\xi)$ и выполнено условие (1) теоремы 1. Из неравенства Чебышева следует

$$P\left\{\hat{X}_n^2 \geq xc_n^2(p)\right\} \leq \frac{1}{xp/2}. \quad (17)$$

При любом $x > 1$ из (15) и (17) получаем

$$P\left\{\hat{X}_n^2 \geq xc_n^2(p)\right\} \asymp nP\left\{\xi^2 \geq xc_n^2(p)\right\}. \quad (18)$$

Из условия (1) и соотношения (18) легко выводится равномерная интегрируемость последовательности $\{\sigma_n^{-2}(p)\hat{X}_n^2\}$. В силу утверждения в леммы 2 $\sigma_n \gg c_n(p)$, так что равномерно интегрируемой является также и последовательность $\{\sigma_n^{-2}\hat{X}_n^2\}$, и из теоремы 2 следует, что к последовательности $\{\xi_n\}$ применима центральная предельная теорема, а это означает, что $L(\xi) \in \mathcal{M}_1$.

2) Пусть по-прежнему $\{\xi_n\}$ — стационарная последовательность, удовлетворяющая условию φ_1 -перемешивания, $L(\xi_1) = L(\xi)$ и выполнено условие (2). Так как $\mathbf{E}|\xi|^p < \infty$, $p > 0$, то при любом $\lambda > 0$ $\mathbf{E}\xi^2(\lambda c_n(p)) = o(c_n^2(p))$. Пусть $k = k(n) \rightarrow \infty$, $r = r(n) \rightarrow \infty$, $n \rightarrow \infty$ — целочисленные последовательности такие, что

$$k^2 \varphi(r) \rightarrow 0, \quad rk \left\| \xi(Nc_n(p)) \right\|_2 = o(c_n(p)), \quad n \rightarrow \infty.$$

Стандартным способом (см., например, [4, с. 414]) с помощью условия φ -перемешивания можно показать, что

$$\left| \sigma_n(\lambda c_n(p)) - \sqrt{k} \sigma_{[n/k]}(\lambda c_n(p)) \right| \ll \sqrt{k} \sigma_{[n/k]}(\lambda c_n(p)) k \varphi^{\frac{1}{2}}(r) + rk \left\| \xi_1(\lambda c_n(p)) \right\|_2,$$

следовательно,

$$|\sigma_n(\lambda c_n(p)) - \sqrt{k} \sigma_{[n/k]}(\lambda c_n(p))| = o(c_n(p)). \quad (19)$$

Далее,

$$\begin{aligned} \max_{j \leq [n/k]} \sigma_j(\lambda c_n(p)) &\ll \sigma_{[n/k]}(\lambda c_n(p)) + \left\| \xi_1(\lambda c_n(p)) \right\|_2 \\ &\ll \sigma_{[n/k]}(\lambda c_n(p)) + o\left(\frac{c_n(p)}{\sqrt{k}}\right). \end{aligned} \quad (20)$$

Это также стандартно доказываемое утверждение (аналогичное (9)); в данном случае, когда мы по существу имеем дело со схемой серий, соотношение (20) следует, например, из леммы 1.6 в [11]. Из предложения 3.2 в [3], соотношений (11), (13) и леммы 1 получаем

$$\begin{aligned} \max_{j \leq [n/k]} \sigma_j(\lambda c_n(p)) &\gg \left\| \max_{j \leq [n/k]} \tilde{S}_j(\lambda c_n(p)) \right\|_2 \gg \left\| \max_{j \leq [n/k]} \tilde{\xi}_j(\lambda c_n(p)) \right\|_2 \\ &\gg \left\| \max_{j \leq [n/k]} \hat{\xi}_j(\lambda c_n(p)) \right\|_2 + o(c_n(p)). \end{aligned} \quad (21)$$

(Здесь для медианы μ_n величины $\xi_1(\lambda c_n(p))$ использовалась оценка $|\mu_n| \ll \|\xi_1(\lambda c_n(p))\|_2 = o(c_n(p))$). Пусть $0 < \varepsilon < \lambda$. Предположим сначала, что

$$\varepsilon^{-1} c_n^{-1}(p) \left\| \max_{j \leq [n/k]} \hat{\xi}_j(\lambda c_n(p)) \right\|_2 \leq \frac{1}{2}. \quad (22)$$

Тогда

$$\mathbf{P} \left\{ \max_{j \leq [n/k]} \hat{\xi}_j^2(\lambda c_n(p)) \geq \varepsilon^2 c_n^2(p) \right\} \leq \varepsilon^{-2} c_n^{-2}(p) \mathbf{E} \max_{j \leq [n/k]} \hat{\xi}_j^2(\lambda c_n(p)) \leq \frac{1}{4},$$

так что с помощью (15) получаем

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \max_{j \leq [n/k]} \hat{\xi}_j^2(\lambda c_n(p)) &\geq \int_{\varepsilon^2 c_n^2(p)}^{\lambda^2 c_n^2(p)} \mathbf{P} \left\{ \max_{j \leq [n/k]} \hat{\xi}_j^2 \geq x \right\} dx \\ &\gg c_n^2(p) \frac{n}{k} \int_{\varepsilon^2}^{\lambda^2} \mathbf{P} \left\{ \xi_1^2 \geq x c_n^2(p) \right\} dx. \end{aligned} \quad (23)$$

Из соотношений (19)–(23) и условия (2) получаем, что при любом $\lambda > 1$

$$c_n^{-1}(p) \sigma_n(\lambda c_n(p)) \rightarrow \infty, \quad n \rightarrow \infty. \quad (24)$$

Если же (22) не выполнено, то из соотношений (19)–(21) следует

$$\sigma_n(\lambda c_n(p)) \gg \sqrt{k} \left\| \max_{j \leq [n/k]} \hat{\xi}_j(\lambda c_n(p)) \right\|_2 \gg \sqrt{k} c_n(p),$$

и мы снова получаем (24). Из (24) и определения универсальной нормирующей последовательности $\{b_n\}$ следует теперь $b_n^{-1}c_n(p) \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$. В силу теоремы 2 $L(\xi) \in \mathcal{M}_0$. Теорема доказана.

Доказательство следствия 1. Если $E|\xi|^p < \infty$, $p > 2$, то из (17) и (18) при $x > 1$ получаем $nP\{\xi^2 \geq xc_n^2(p)\} \ll 1/x^{p/2}$, откуда легко выводится условие (1).

Доказательство следствия 3. Пусть $P\{\xi^2 \geq x\} = x^{-\rho}h(x)$, где $h(x)$ есть SO-меняющаяся функция, а $\rho > 0$. Из определений a_n и SO-меняющейся функции нетрудно вывести, что

$$nP\{\xi^2 \geq xa_n^2\} \asymp \frac{1}{x^\rho}, \quad n \rightarrow \infty. \quad (25)$$

Далее, из теоремы п. 3 в [6] следует, что при $p < 2\rho$

$$\int_1^\infty x^{p/2-1}P\{\xi^2 \geq x\}dx < \infty,$$

так что с помощью (25) получаем

$$\begin{aligned} c_n^p(p) &= \frac{a_n^p p}{2} \int_0^\infty x^{p/2-1}P\{\hat{X}_n^2 \geq xa_n^2\}dx \\ &\leq (Na_n^2)^{p/2} + \frac{a_n^p p}{2} \int_N^\infty x^{p/2-1}nP\{\xi^2 \geq xa_n^2\}dx \ll a_n^p. \end{aligned}$$

Вместе с утверждением а) леммы 2 это означает, что $c_n(p) \asymp a_n$, следовательно, $nP\{\xi^2 \geq xc_n^2(p)\} \asymp 1/x^\rho$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Лозе М. Теория вероятностей. М.: ИЛ, 1962, 719 с.
2. Гринь А. Г. Нормирующие последовательности в предельных теоремах для слабо зависимых величин. — Теория вероятн. и ее примен., 1991, т. 36, в. 2, с. 285–300.
3. Peligrad M. On Ibragimov-Iosifescu conjecture for φ -mixing sequences. — Stochastic Process. Appl., 1990, v. 35, p. 293–308.
4. Ибрагимов И. А., Линник Ю. В. Независимые и стационарно связанные величины. М.: Наука, 1965, 524 с.
5. Клоков С. А. Строгое притяжение к нормальному закону для стационарных последовательностей с равномерно сильным перемешиванием. — Вестник Омск. ун-та, 1997, № 2, с. 11–13.
6. Сенета Е. Правильно меняющиеся функции. М.: Наука, 1983, 142 с.
7. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Т. 2. М.: Мир, 1984, 752 с.
8. Peligrad M. An invariance principle for φ -mixing sequences. — Ann. Probab., 1985, v. 13, № 4, p. 1304–1313.
9. Peligrad M. The convergence of moments in the central limit theorem for ρ -mixing sequences of random variables. — Proc. Amer. Math. Soc., 1987, v. 101, № 1, p. 142–148.
10. Гринь А. Г. Об областях притяжения для сумм зависимых величин. — Теория вероятн. и ее примен., 1990, т. 35, в. 2, с. 255–270.
11. Утев С. А. Суммы случайных величин с φ -перемешиванием. — Труды Ин-та матем. СО АН СССР (Новосибирск: Наука), 1989, т. 13, с. 78–92.

Поступила в редакцию
25. XII. 1997