Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. В. Нагаев, В. И. Вахтель, Вероятностные неравенства для критического процесса Гальтона–Ватсона, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2005, том 50, выпуск 2, 266–291

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp107>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.64.247

26 апреля 2023 г., 15:02:28

© 2005 г.

НАГАЕВ С. В.*, ВАХТЕЛЬ В. И.**

ВЕРОЯТНОСТНЫЕ НЕРАВЕНСТВА ДЛЯ КРИТИЧЕСКОГО ПРОЦЕССА ГАЛЬТОНА–ВАТСОНА¹⁾

В работе получены верхние оценки для вероятностей больших уклонений максимума критического процесса Гальтона–Ватсона при различных моментных ограничениях на распределение числа прямых потомков отдельной особи.

Ключевые слова и фразы: процесс Гальтона–Ватсона, мартингал, неравенство Дуба, условие Крамера, неравенство Чебышева.

1. Введение и формулировка основных результатов. Пусть Z_n — критический процесс Гальтона–Ватсона, M_n — максимум этого процесса до момента времени n , т.е. $M_n = \max_{k \leq n} Z_k$. Всюду в дальнейшем, если не оговорено противное, предполагается, что $Z_0 = 1$, т.е. процесс начинается с одной частицы. Через ξ обозначим случайную величину с распределением, совпадающим с распределением числа непосредственных потомков отдельной особи, $\mathbf{P}\{\xi = k\} = p_k$. Будем предполагать, что процесс критический, т.е. $f'(1) = 1$, где $f(s) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k s^k$. Во избежание детерминированного случая $f(s) = s$ будем предполагать, что $p_0 > 0$. Пусть $B = f''(1) = \mathbf{E}\xi(\xi - 1)$, $C = f'''(1)$, $B_r = \mathbf{E}\xi^r$, $r > 1$. Для любого $N > 0$ положим $\bar{B} = \mathbf{E}\{\xi(\xi - 1); \xi \leq N\}$, $\bar{\beta}_r = \mathbf{E}\{\xi^{r-1}(\xi - 1); \xi \leq N\}/2$.

Основной целью настоящей работы является получение верхних оценок для величин $\mathbf{P}\{M_n \geq k\}$ и $\mathbf{P}\{Z_n \geq k\}$ при различных моментных ограничениях на распределение величины ξ .

Необходимо отметить, что существует очень немного работ, посвященных вероятностным неравенствам для ветвящихся процессов. В существующих работах рассматривается лишь случай, когда выполнено

* Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, просп. Академика Коптюга, 4, 630090 Новосибирск, Россия; e-mail: nagaev@math.nsc.ru

** Weierstrass Institute for Applied Analysis and Stochastics, Mohrenstr. 39, D-10117 Berlin, Germany; e-mail: vakhtel@wias.berlin.de

¹⁾ Первый автор поддержан Российским фондом фундаментальных исследований (проект 02-01-01252) и INTAS (проект 99-01317); второй автор поддержан Российским фондом фундаментальных исследований (проекты 02-01-01252, 02-01-00358) и INTAS (проект 00-265).

условие Крамера (R — радиус сходимости $f(s)$ — строго больше единицы). Впервые, по-видимому, верхние оценки для $\mathbf{P}\{Z_n \geq k\}$ стали предметом исследования в работе [1], где было получено следующее неравенство:

$$\mathbf{P}\{Z_n \geq k\} \leq (1 + y_0) \left(1 + \frac{1}{1/y_0 + f''(1 + y_0) n/2} \right)^{-k} \quad (1)$$

при любом $0 < y_0 < R - 1$. В этой работе также было показано, что при $k = [Bnu/2]$ из (1) вытекает

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}\{Z_n \geq k\} \leq e^{-u}.$$

С другой стороны, в силу предельной теоремы для критического процесса Гальтона–Ватсона (см., например, [2, с. 39])

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{Bn}{2} \mathbf{P}\{Z_n \geq k\} = e^{-u}. \quad (2)$$

Позднее Г. Д. Макаровым [3] было доказано, что при всех n , начиная с некоторого n_0 , справедлива следующая верхняя оценка:

$$\mathbf{P}\{Z_n \geq k\} \leq \frac{c_0}{n} \left(1 - \frac{2}{2 + B(n + \ln_{(N)} n)} \right)^k, \quad (3)$$

где c_0 — некоторая константа, $\ln_{(N)} n$ — N -я итерация $\ln n$.

С асимптотической точки зрения последнее неравенство выглядит предпочтительнее, чем (1), так как при $k = [Bnu/2]$ из него следует, что

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{Bn}{2} \mathbf{P}\{Z_n \geq k\} \leq \frac{c_0 B}{2} e^{-u}.$$

Однако без предварительного оценивания величин n_0 и c_0 неравенство (3) не позволяет находить численные оценки хвоста распределения процесса Z_n .

Что касается максимума процесса Гальтона–Ватсона, то основные усилия были направлены на изучение распределения величины $M_\infty = \sup_k Z_k$ (см. [4], [5]) и вывод асимптотических формул для математического ожидания $\mathbf{E}M_n$ (см. [6] и библиографию там). Вероятностные неравенства для M_n изучались в диссертации А. В. Карпенко [7], который, в частности, получил следующее неравенство, связывающее хвосты распределений величин M_n и Z_n :

$$\mathbf{P}\{M_n \geq k\} \leq \frac{\mathbf{P}\{Z_n \geq \nu k\}}{\min_{i < n} \mathbf{P}\{Z_i \geq \nu k \mid Z_0 = k\}}, \quad \nu \leq 1. \quad (4)$$

Нетрудно видеть, что

$$\mathbf{D}\{Z_i \mid Z_0 = k\} = k\mathbf{D}\{Z_i \mid Z_0 = 1\} = kiB.$$

Отсюда по неравенству Чебышева

$$\mathbf{P}\left\{Z_i < \frac{k}{2} \mid Z_0 = k\right\} = \mathbf{P}\left\{Z_i - \mathbf{E}Z_i < -\frac{k}{2} \mid Z_0 = k\right\} \leq 4 \frac{Bi}{k}$$

и, следовательно,

$$\min_{i < n} \mathbf{P}\left\{Z_i \geq \frac{k}{2} \mid Z_0 = k\right\} \geq 1 - \frac{4B(n-1)}{k}.$$

Из этой оценки, полагая в (4) $\nu = 1/2$, получаем, что при любом $k \geq 8Bn$

$$\mathbf{P}\{M_n \geq k\} < 2\mathbf{P}\left\{Z_n \geq \frac{k}{2}\right\}.$$

Таким образом, мы можем выводить вероятностные неравенства для максимума из неравенств для распределения случайной величины Z_n .

В настоящей работе мы будем придерживаться другого подхода, который состоит в применении классических неравенств для максимума субмартингала и супермартингала.

Этот подход позволяет получить вероятностные неравенства сразу для M_n , минуя оценки типа (4). Разумеется, полученные оценки будут справедливы и для Z_n .

Теорема 1. Пусть $R > 1$, $0 < y_0 < R - 1$, $B_0 = f''(1 + y_0)$. Тогда справедливо неравенство

$$\mathbf{P}\{M_n \geq k\} \leq y_0 \left[\left(1 + \frac{1}{1/y_0 + B_0 n/2} \right)^k - 1 \right]^{-1}. \quad (5)$$

Устремляя y_0 к нулю в оценке (5), приходим к неравенству

$$\mathbf{P}\{M_n \geq k\} \leq \frac{1}{k}, \quad (6)$$

которое можно получить и из известного неравенства Дуба (см. [8, с. 283]) для максимума субмартингала

$$\mathbf{P}\left\{\max_{0 \leq k \leq n} X_k > x\right\} \leq \frac{\mathbf{E}X_n}{x}. \quad (7)$$

Естественно, возникает вопрос о соотношении между правыми частями неравенств (1) и (5), которые для краткости обозначим соответственно $g_1(y_0)$ и $g_2(y_0)$. Нетрудно видеть, что если

$$\left(1 + \frac{1}{1/y_0 + B_0 n/2} \right)^k > 2,$$

то

$$\frac{y_0}{1+y_0} g_1(y_0) < g_2(y_0) < 2y_0 \left(1 + \frac{1}{1/y_0 + B_0 n/2}\right)^{-k} = 2 \frac{y_0}{1+y_0} g_1(y_0).$$

Если

$$\left(1 + \frac{1}{1/y_0 + B_0 n/2}\right)^k \leq 2,$$

то

$$g_2(y_0) \geq 2 \frac{y_0}{1+y_0} g_1(y_0).$$

Обозначим через y_* значение y , которое минимизирует $g_2(y)$, т.е. $g_2(y_*) = \min g_2(y)$. Найти простое явное выражение для y_* не представляется возможным. Можно, однако, более или менее точно локализовать y_* . Для иллюстрации мы проведем локализацию y_* в случае бинарного процесса. Найденное приближенное значение будет использовано при выводе следствия 2 из теоремы 1. Нетрудно видеть, что для бинарного процесса

$$g_2(y) = y \left[\left(1 + \frac{y}{1+ay}\right)^k - 1 \right]^{-1} \equiv y\psi(y),$$

где $a = n/2$. Очевидно, $\ln g_2(y) = \ln y + \ln \psi(y)$. Несложные выкладки показывают, что

$$-(\ln \psi(y))' > \frac{k}{(1+ay)(1+(a+1)y)} > \frac{k}{(1+(a+1)y)^2}.$$

Таким образом,

$$(\ln g_2(y))' < \frac{1}{y} - \frac{k}{(1+(a+1)y)^2} = \frac{P(y)}{y(1+(a+1)y)^2},$$

где $P(y) = (1+(a+1)y)^2 - ky$. Квадратный трехчлен $P(y)$ имеет различные действительные корни $y_- < y_+$ тогда и только тогда, когда $k > 4(a+1)$. При этом условии $(\ln g_2(y))' < 0$ для $y_- \leq y \leq y_+$. Следовательно,

$$\min_{y_- \leq y \leq y_+} g_2(y) = g_2(y_+). \quad (8)$$

Заметим, что

$$y_{\pm} = \frac{k - 2(a+1) \pm \sqrt{k^2 - 4k(a+1)}}{2(a+1)^2}.$$

Отсюда следует, что $y_+ > (a+1)^{-1}$. Если $k/n \rightarrow \infty$, то

$$y_+ = \frac{k}{(a+1)^2} - \frac{2}{a+1} + O(k^{-1}). \quad (9)$$

Нетрудно видеть, что $P(2/k) < 0$, если $k > 2(a+1)/(\sqrt{2}-1)$. Таким образом, при $k > 2(a+1)/(\sqrt{2}-1)$

$$y_- < \frac{2}{k}. \quad (10)$$

Пусть $y < 2/k$. Тогда

$$\left(1 + \frac{y}{1+ay}\right)^k - 1 < ky \left(1 + \frac{y}{1+ay}\right)^{k-1} < ky \left(1 + \frac{2}{k}\right)^k < kye^2.$$

Отсюда

$$\min_{0 < y \leq 2/k} g_2(y) > \frac{1}{ke^2}. \quad (11)$$

Из (9)–(11) следует

$$\min_{0 < y \leq y_+} g_2(y) = \min\left(\min_{0 < y \leq 2/k} g_2(y), g_2(y_+)\right). \quad (12)$$

Очевидно, что при $ny \rightarrow \infty$

$$\frac{y}{1+ay} = \frac{1}{a} \frac{1}{1+(ay)^{-1}} = \frac{1}{a} - \frac{1}{a^2y} + \left(\frac{1}{a^3y^2}\right).$$

Вследствие (9) при $k/n \rightarrow \infty$

$$y_+ = \frac{k}{(a+1)^2} \left(1 - 2\frac{a+1}{k} + O\left(\frac{n^2}{k^2}\right)\right).$$

Отсюда при $k/n \rightarrow \infty$ имеем

$$\frac{1}{a^2y_+} = k^{-1}(a^{-1}+1)^2 \left(1 + O\left(\frac{n}{k}\right)\right) = k^{-1} \left(1 + O\left(\frac{1}{nk} + \frac{n}{k^2}\right)\right).$$

В результате мы получаем

$$\frac{y_+}{1+ay_+} = \frac{1}{a} - \frac{1}{k} + O\left(\frac{1}{nk} + \frac{n}{k^2}\right). \quad (13)$$

Следовательно,

$$\ln\left(1 + \frac{y_+}{1+ay_+}\right) > \frac{\ln 2}{n}, \quad (14)$$

если отношение k/n достаточно велико.

В силу (9) и (14) существует постоянная $L > 0$ такая, что

$$g_2(y_+) < \frac{8k}{n^2} \exp\left\{-\frac{k \ln 2}{n}\right\} < \frac{1}{ke^2},$$

если $k/n > L$. Сопоставляя последнее неравенство с (11) и (12), мы убеждаемся, что при $k/n > L$

$$g_2(y_+) = \min_{0 < y \leq y_+} g_2(y),$$

т.е. $y_* \geq y_+$. Отсюда вследствие (9) вытекает, что $y_* \rightarrow \infty$ при $k/n^2 \rightarrow \infty$.

Полагая в (5) $y_0 = y_+$, получаем ввиду (9) и (13), что

$$\mathbf{P}\{M_n \geq k\} \leq \frac{2}{n} \exp\left\{-\frac{2k}{n} + \ln\left(\frac{2ek}{n}\right)\right\} \left(1 + O\left(\frac{n}{k} + \frac{k}{n^2}\right)\right), \quad (15)$$

если $k/n \rightarrow \infty$, но $k/n^2 \rightarrow 0$.

Вернемся теперь к общему случаю и сформулируем два следствия из теоремы 1.

Следствие 1. Пусть $1 < \rho < R$ и n удовлетворяет условию

$$n \geq \frac{2}{(\rho - 1)\Omega_\rho}, \quad (16)$$

где $\Omega_\rho = f''(\rho)$. Тогда для $k > n\Omega_\rho + 1$

$$\mathbf{P}\{M_n \geq k\} \leq \frac{4}{n\Omega_\rho} \exp\left\{-\frac{k}{n\Omega_\rho + 1}\right\}. \quad (17)$$

Неравенство (17) можно рассматривать как аналог неравенства Петрова (см. [9, с. 81, теорема 16]).

Обозначим $C_\rho = f'''(\rho)$. Если $C = 0$, то процесс является бинарным и $C_\rho = 0$ для всех $\rho \geq 0$.

Следствие 2. Пусть $C > 0$, $1 < \rho < R$ и

$$2(Bn + 1) < k \leq \left(\frac{B}{C_\rho} \wedge (\rho - 1)\right) \left(1 + \frac{Bn}{2}\right)^2. \quad (18)$$

Тогда

$$\mathbf{P}\{M_n \geq k\} < \frac{6.5k}{(Bn + 2)^2} \exp\left\{-\frac{2k}{Bn + 2} + \frac{8C_\rho k^2 n}{(Bn + 2)^4} + 1\right\}. \quad (19)$$

Если $C = 0$ и $k > 2(Bn + 1)$, то

$$\mathbf{P}\{M_n \geq k\} < \frac{6.5k}{(Bn + 2)^2} \exp\left\{-\frac{2k}{Bn + 2} + 1\right\}. \quad (20)$$

Если выполнено условие (18), то второе слагаемое в показателе экспоненты в (19) пренебрежимо мало при $k = o(n^{3/2})$. Поэтому при $k = o(n^{3/2})$ оценку (19) можно переписать следующим образом:

$$\mathbf{P}\{M_n \geq k\} \leq \frac{(6.5e)k}{B^2 n^2} \exp\left\{-\frac{2k}{Bn}\right\}(1 + o(1)). \quad (21)$$

В работе [10] в предположении $R > 1$ доказано, что при $k = o(n^2/\ln n)$

$$\mathbf{P}\{Z_n \geq k\} = \frac{2}{Bn} \exp\left\{-\frac{2k}{Bn}\right\}(1 + o(1)). \quad (22)$$

Оценка (21) отличается от правой части (22) наличием дополнительного множителя $(3.25e)k/Bn$. Такое же соотношение имеет место между (20) и (22), только в более широкой области $k = o(n^2/\ln n)$, т.е. всюду, где справедливо (22).

Условное распределение $\mathbf{P}\{Z_n < x \mid Z_n > 0\}$ аппроксимируется показательным распределением $F_n(x)$ с параметром $Bn/2$. Производящая функция этого распределения

$$\widehat{F}_n(h) := \int_0^\infty e^{hx} dF_n(x) = \frac{1}{1 - hBn/2}.$$

Оценим $F_n(x)$ с помощью неравенства

$$1 - F_n(x) < e^{-hx} \widehat{F}_n(h).$$

Нетрудно видеть, что

$$\min_h e^{-hx} \widehat{F}_n(h) = \exp\left\{-\frac{2k}{Bn} + \ln \frac{2ex}{Bn}\right\},$$

т.е. имеет место оценка

$$e^{-2x/Bn} = 1 - F_n(x) < \frac{2ex}{Bn} e^{-2x/Bn}.$$

Дополнительный множитель $2ex/Bn$ здесь почти такой же, как в (21). Заметим, что в случае бинарного процесса он совпадает с избыточным множителем в (15). Таким образом, оценка (5) является в определенном смысле оптимальной.

Перейдем теперь к случаю, когда условие Крамера не выполняется.

Теорема 2. Пусть $B_r < \infty$ для некоторого $r \in (1, 2]$. Тогда для любого N такого, что

$$N^{r-1} > eB_r n, \quad (23)$$

имеет место неравенство

$$\mathbf{P}\{M_n \geq k\} \leq \frac{3}{2N} \ln\left(\frac{eN^{r-1}}{B_r n}\right) \left[\left(\frac{N^{r-1}}{eB_r n}\right)^{k/N} - 1\right]^{-1} + n\mathbf{P}\{\xi > N\}. \quad (24)$$

Отметим, что следующая теорема не предполагает существования у случайной величины ξ моментов выше первого.

Теорема 3. Пусть $r \geq 2$. Тогда для любых $N \geq 1$ и $y_0 > 0$ имеет место неравенство

$$\mathbf{P}\{M_n \geq k\} \leq \left(y_0 + \frac{1}{N}\right) \left[\left(1 + \frac{1}{1/y_0 + e^r \overline{B}n/2 + n\overline{\beta}_r e^{y_0 N}/N^{r-2}}\right)^k - 1\right]^{-1} + n\mathbf{P}\{\xi > N\}. \quad (25)$$

При доказательстве теорем 2 и 3 используется метод урезания случайных величин с последующим оцениванием производящих функций срезов. Этот подход использовался ранее для получения вероятностных неравенств для сумм независимых случайных величин. Наиболее общие результаты в этом направлении представлены в работе Д. Х. Фука и С. В. Нагаева [11]. В этой работе не предполагается конечность каких-либо моментов, а полученные оценки выражаются в терминах урезанных моментов и хвостов распределений слагаемых.

Первое слагаемое в оценке (25) соответствует предельной теореме для критического процесса Гальтона–Ватсона, а второе — вероятности достижения высокого уровня в результате одного большого скачка, т.е. за счет появления в процессе частицы, число потомков которой велико.

Неравенство (25) является, в известном смысле, промежуточным. Его правая часть содержит свободные параметры. Нахождение оптимальных значений этих параметров является достаточно сложной задачей. Один из способов выбора величины y_0 иллюстрируется следующей теоремой.

Теорема 4. Пусть B_r конечно при некотором $r > 2$. Тогда для любых $n \geq 1$, $N \geq 1$ и $k \geq Bn$ справедливо неравенство

$$\mathbf{P}\{M_n \geq k\} \leq 2(r+1)e^{r+1} \frac{(r-2)\ln(2N)+1}{N} \left(1 + \frac{1}{(r+1)e^r(Bn \vee 1)}\right)^{-k} + 2 \frac{r+1}{rBn} e^{1-\gamma k/N} \left(\frac{B_r}{BN^{r-2}}\right)^{\gamma k/N} + n\mathbf{P}\{\xi > N\}, \quad (26)$$

где $\gamma = r(2r+1)/(2(r+1)^2)$.

Следствие 3. Для любых $n \geq 1$ и $k \geq Bn$ справедливо неравенство

$$\mathbf{P}\{M_n \geq k\} \leq 4(r+1)^2 e^{r+1} \frac{\ln(2k) + (r-2)^{-1}}{k} \left(1 + \frac{1}{(r+1)e^r(Bn \vee 1)}\right)^{-k} + \left(nB_r + 2e \frac{r+1}{rBn} \left(\frac{B_r}{eB}\right)^{r/(r-2)}\right) \frac{C(r)}{k^r}, \quad (27)$$

где

$$C(r) = \left(\frac{r+1}{r-2}\right)^r \left(\frac{2r+2}{2r+1}\right)^r.$$

Нетрудно видеть, что $C(r)$ убывает при $r > 2$ и $\lim_{r \downarrow 2} C(r) = \infty$.

Неравенства (26) и (27) действуют в зоне $k \geq Bn$. В случае $k < Bn$ достаточно точную оценку можно получить из неравенства Дуба (7). Действительно, из очевидного неравенства $\mathbf{P}\{M_n \geq k\} \geq \mathbf{P}\{Z_{[k/B]} \geq k\}$ и предельной теоремы для критического процесса Гальтона–Ватсона заключаем, что при $k \rightarrow \infty$ и $k < Bn$

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} k \mathbf{P}\{M_n \geq k\} \geq 2e^{-2}.$$

С другой стороны, в силу (6)

$$k \mathbf{P}\{M_n \geq k\} \leq 1.$$

Как выяснилось, возможен и другой подход, который основан на применении вероятностных неравенств Фука для мартингалов [12]. Заметим, что неравенства Фука неприменимы непосредственно к процессу Z_n (который, как известно, является мартингалом), так как условные моменты $\mathbf{E}\{|Z_{n+1} - Z_n|^t | Z_n = k\}$ не являются ограниченными по k . Однако оказалось, что это условие выполняется для процесса $W_n = \sqrt{Z_n}$, который является супермартингалом. Нетрудно показать, буквально повторяя рассуждения Фука, что его неравенства являются справедливыми и для супермартингалов. В результате мы получаем следующую теорему.

Теорема 5. Пусть $B_r < \infty$ при некотором $r > 2$. Тогда для всякого $k \geq Bn$ справедливо неравенство

$$\mathbf{P}\{M_n \geq k\} \leq \exp\left(-\frac{k}{l(r)Bn}\right) + \frac{G(r, B, B_r)n}{k^r}, \quad (28)$$

где $l(r) = 2r^2e^{2r-2}$, а

$$G(r, B, B_r) = \left(\frac{r}{r-2}\right)^{2r} \left(3(r+1)^r(B_r + e^{r+1}B^r) + B^{-1/(r-2)}\left(\frac{3}{2}r^{r-1}((2r-2)B_r + e^rB^{r-1})\right)^{(r-1)/(r-2)}\right).$$

Сравним теперь оценки, полученные с помощью описанных выше методов. Полагая $r = 3$ в оценках (27) и (28), получаем соответственно

$$\mathbf{P}\{M_n \geq k\} \leq 64e^4 \frac{\ln(2k) + 1}{k} \left(1 + \frac{1}{4e^3 Bn}\right)^{-k} + \left(nB_3 + \frac{8B_3^3}{3e^2 B^4 n}\right) \frac{32^3}{7^3 k^3}$$

и

$$\mathbf{P}\{M_n \geq k\} \leq \exp\left(-\frac{k}{18e^4 Bn}\right) + \frac{3^6}{k^3} \left(192(B_3 + e^4 B^3) + \frac{27^2}{16B} (4B_3 + e^3 B^2)^2\right) n.$$

Отметим, что в первом слагаемом в правой части второго неравенства отсутствует убывающий к нулю множитель. Что касается вторых слагаемых, то они имеют одинаковый порядок убывания по k , однако по-разному зависят от моментов.

2. Доказательства основных результатов.

Доказательство теоремы 1. Для любого $h \geq 0$ определим величины $Y_n(h)$ равенством $Y_n(h) = e^{hZ_n} - 1$. Нетрудно заметить, что построенная последовательность случайных величин является субмартингалом. Применяя неравенство Дуба, имеем

$$\mathbf{P}\{M_n \geq k\} = \mathbf{P}\left\{\max_{i \leq n} Y_i(h) \geq e^{hk} - 1\right\} \leq \frac{\mathbf{E}Y_n(h)}{e^{hk} - 1} = \frac{f_n(e^h) - 1}{e^{hk} - 1}. \quad (29)$$

Рассмотрим последовательность чисел, определяемых с помощью уравнения

$$y_{n-1} = y_n + \frac{B_0}{2} y_n^2, \quad y_0 > 0, \quad n \geq 1, \quad (30)$$

где на каждом шаге y_n определяется как положительный корень уравнения $y_{n-1} = y + (B_0/2)y^2$. В работе [1] для этой последовательности получены следующие неравенства:

$$\frac{1}{y_n} < \frac{1}{y_0} + \frac{B_0 n}{2}, \quad (31)$$

$$f_n(1 + y_n) < 1 + y_0. \quad (32)$$

Полагая в (29) $h = \ln(1 + y_n)$ и учитывая (31), (32), приходим к требуемому неравенству.

Доказательство следствия 1. Положим в неравенстве теоремы 1 $y_0 = 2/(n\Omega_\rho)$. При таком выборе $1 + y_0 \leq \rho$ ввиду условия (16) и, следовательно, $B_0 \leq \Omega_\rho$. Это означает, в свою очередь, что $(1 + 1/y_0 + B_0 n/2)^{-1} \geq n\Omega_\rho + 1$. Обозначая $a_0 = B_0 n/2$, имеем

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{1}{1/y_0 + B_0 n/2}\right)^{-1} &= \frac{1 + a_0 y_0}{1 + (a_0 + 1)y_0} = 1 - \frac{y_0}{1 + (a_0 + 1)y_0} \\ &= 1 - \frac{1}{1 + 1/y_0 + B_0 n/2} < 1 - \frac{1}{n\Omega_\rho + 1}. \end{aligned} \quad (33)$$

Отсюда

$$\left(1 + \frac{1}{1/y_0 + a_0}\right)^{-k} \leq \exp\left\{-\frac{k}{n\Omega_\rho + 1}\right\} < e^{-1}.$$

Из этих оценок и равенства $(x - 1)^{-1} = x^{-1}/(1 - x^{-1})$ мы заключаем, что

$$\left[\left(1 + \frac{1}{1/y_0 + a_0}\right)^k - 1\right]^{-1} < \frac{1}{1 - e^{-1}} \exp\left\{-\frac{k}{n\Omega_\rho + 1}\right\}.$$

Подставляя эту оценку в правую часть неравенства (5), мы получаем желаемый результат.

Доказательство следствия 2. Предположим сначала, что $C_\rho > 0$. Положим $y_0 = k/(a+1)^2$, где $a = Bn/2$. По формуле Тейлора при $y_0 \leq \rho - 1$

$$B_0 = f''(1 + y_0) = B + y_0 f'''(1 + \theta y_0), \quad \theta \in (0, 1). \quad (34)$$

Нетрудно видеть, что при условии (18)

$$B_0 < 2B. \quad (35)$$

Используя (33), имеем

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{1}{1/y_0 + B_0 n/2}\right)^{-1} &= 1 - \frac{y_0}{1 + (1 + a_0)y_0} \\ &= 1 - \frac{1}{1 + a_0} + \frac{1}{(1 + a_0)(1 + (1 + a_0)y_0)} \end{aligned} \quad (36)$$

(величина a_0 определена выше, в доказательстве следствия 1). Если выполнено условие (18), то вследствие (35)

$$a_0 + 1 = \frac{B_0 n}{2} + 1 < Bn + 1. \quad (37)$$

С другой стороны, согласно выбору y_0 ,

$$\frac{1}{(1 + a_0)(1 + (1 + a_0)y_0)} < \frac{1}{k}. \quad (38)$$

Из (36)–(38) следует, что

$$\left(1 + \frac{1}{1/y_0 + B_0 n/2}\right)^{-k} < e^{-1},$$

если $k > 2(Bn + 1)$.

Следовательно,

$$\left(1 + \frac{1}{1/y_0 + B_0 n/2}\right)^k - 1 > (1 - e^{-1}) \left(1 + \frac{1}{1/y_0 + B_0 n/2}\right)^k.$$

Отсюда в силу (36) и (38)

$$\begin{aligned} \left[\left(1 + \frac{1}{1/y_0 + B_0 n/2}\right)^k - 1\right]^{-1} &< \frac{1}{1 - e^{-1}} \left(1 + \frac{1}{1/y_0 + B_0 n/2}\right)^{-k} \\ &< 1.6 \exp\left\{-\frac{k}{1 + a_0} + 1\right\}. \end{aligned} \quad (39)$$

Ввиду (34)

$$a_0 + 1 < a + 1 + \frac{C_\rho k n}{2(a + 1)^2}.$$

Следовательно,

$$\frac{1}{1+a_0} > \frac{1}{1+a} - \frac{C_\rho k n}{2(a+1)^4}. \quad (40)$$

Из (5), (39) и (40) вытекает неравенство (19).

Если $C = 0$, т.е. процесс является бинарным, то $B_0 = B$, $a_0 = a$. Поэтому вместо неравенства (37) мы имеем равенство $a_0 + 1 = Bn/2 + 1$. В результате неравенство (39) справедливо при $k > 2(Bn + 1)$. Из (5), (39) следует (20).

Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м 2 и 3. Зафиксируем некоторое $N \geq 1$. Через $\tilde{f}(s)$ обозначим срезку функции $f(s)$ на уровне N , т.е.

$$\tilde{f}(s) = \sum_{0 \leq k \leq N} p_k s^k.$$

Пусть x_0 — минимальный положительный корень уравнения $x = \tilde{f}(x)$.

Для каждого $n \geq 1$ через A_n обозначим событие, состоящее в том, что каждая частица первых n поколений (включая нулевое) имеет не более N прямых потомков. Вероятность события $\{M_n \geq k\}$ можно оценить следующим образом:

$$\mathbf{P}\{M_n \geq k\} \leq \mathbf{P}\{M_n \geq k; A_n\} + \mathbf{P}(\bar{A}_n), \quad (41)$$

где $\bar{A}_n$ — дополнение события A_n .

Нетрудно видеть, что

$$\mathbf{P}(A_n) = \tilde{f}_n(1), \quad (42)$$

где $\tilde{f}_n(s)$ — n -я итерация функции $\tilde{f}(s)$.

Из того, что $\tilde{f}'(s) \leq 1$ для всех $s \in [0, 1]$, заключаем

$$\begin{aligned} \tilde{f}_j(1) - \tilde{f}_{j+1}(1) &= \tilde{f}(\tilde{f}_{j-1}(1)) - \tilde{f}(\tilde{f}_j(1)) \leq \sup_{s \in [0, 1]} \tilde{f}'(s)(\tilde{f}_{j-1}(1) - \tilde{f}_j(1)) \\ &\leq \tilde{f}_{j-1}(1) - \tilde{f}_j(1) \leq \dots \leq 1 - \tilde{f}(1) = \mathbf{P}\{\xi > N\}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\mathbf{P}(\bar{A}_n) = 1 - \tilde{f}_n(1) = \sum_{j=0}^{n-1} (\tilde{f}_j(1) - \tilde{f}_{j+1}(1)) \leq n \mathbf{P}\{\xi > N\}. \quad (43)$$

З а м е ч а н и е. Оценку (43) можно также получить с помощью предложенных рецензентом вероятностных рассуждений:

$$\mathbf{P}(\bar{A}_n) = \mathbf{P}\left(\bigcup_{k=0}^{n-1} \bigcup_{i=1}^{Z_k} \{\xi_{i,k} > N\}\right) \leq \sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{E} \sum_{i=1}^{Z_k} \mathbf{P}\{\xi_{i,k} > N\} = n \mathbf{P}\{\xi > N\},$$

где $\{\xi_{i,k}\}$ — независимые копии величины ξ .

Поскольку последовательность $\tilde{f}_n(1)$ не возрастает и ограничена, то у нее существует $\lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{f}_n(1) = x^* \leq 1$, причем $x^* = \tilde{f}(x^*)$. Поскольку уравнение $x = \tilde{f}(x)$ имеет единственное решение на отрезке $[0, 1]$, то $x^* = x_0$. Таким образом, $\tilde{f}_n(1) \downarrow x_0$ при $n \rightarrow \infty$. Отсюда, в силу (42)

$$\mathbf{P}(\bar{A}_n) \uparrow 1 - x_0. \quad (44)$$

Принимая во внимание то, что функция $\tilde{f}'(s)$ не убывает, приходим к неравенству

$$1 - x_0 = 1 - \tilde{f}(x_0) = 1 - \tilde{f}(1) + \tilde{f}(1) - \tilde{f}(x_0) \leq 1 - \tilde{f}(1) + \tilde{f}'(1)(1 - x_0).$$

Отсюда, используя равенства $\sum_{i=0}^{\infty} p_i = \sum_{i=1}^{\infty} i p_i = 1$, получаем оценку

$$1 - x_0 \leq \frac{1 - \tilde{f}(1)}{1 - \tilde{f}'(1)} = \frac{\sum_{i>N} p_i}{\sum_{i>N} i p_i} < \frac{1}{N} \quad (45)$$

при $\mathbf{P}\{\xi > N\} = \sum_{i>N} p_i > 0$. Если же $\mathbf{P}\{\xi > N\} = 0$, то $x_0 = 1$ и соотношение (45) остается верным.

Для оценки первого слагаемого в (41) нам понадобится следующая лемма.

Лемма 1. Для всякого $h > 0$ справедливо неравенство

$$\mathbf{P}\{M_n \geq k; A_n\} \leq \frac{\max(\tilde{f}_n(e^h), e^h) - x_0}{e^{hk} - 1}. \quad (46)$$

Доказательство. Для любого $i \geq 1$ положим

$$X_i = e^{hZ_i} I(A_i), \quad Y_0 = e^h.$$

Из определения событий A_i следует, что $A_{i+1} \subset A_i$ для любого i . Это означает, что нуль является поглощающим состоянием процесса X_i . Следовательно,

$$\mathbf{E}\{X_{i+1} \mid X_1 = x_1, \dots, X_{i-1} = x_{i-1}, X_i = 0\} = \mathbf{E}\{X_{i+1} \mid X_i = 0\} = 0. \quad (47)$$

Если произошло событие $\{X_i = e^{hj}\}$, то произошли события $\{I(A_i) = 1\}$ и $\{Z_i = j\}$. В этом случае

$$I(A_{i+1}) = I(\xi_l \leq N, l = 1, \dots, j),$$

где $\{\xi_i\}$ — последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин с распределением $\{p_k\}$.

Отсюда заключаем, что для всякого $j \geq 0$ справедливо равенство

$$\begin{aligned} \mathbf{E}\{X_{i+1} \mid X_1 = x_1, \dots, X_{i-1} = x_{i-1}, X_i = e^{hj}\} &= \mathbf{E}\{X_{i+1} \mid X_i = e^{hj}\} \\ &= \mathbf{E}\{e^{h(\xi_1 + \dots + \xi_j)} I(\xi_l \leq N, l = 1, \dots, j) \mid Z_i = j\} = (\tilde{f}(e^h))^j. \end{aligned} \quad (48)$$

Из (47) и (48) следует, что последовательность X_i является супермартингалом при h , удовлетворяющем условию $\tilde{f}(e^h) \leq e^h$, и субмартингалом при $\tilde{f}(e^h) \geq e^h$.

В первом случае мы воспользуемся известным неравенством (см., например, [13, с. 108])

$$\lambda \mathbf{P}\left\{\sup_{0 \leq i \leq n} Y_i \geq \lambda\right\} \leq \mathbf{E}Y_0 - \mathbf{E}\left\{Y_n; \sup_{0 \leq i \leq n} Y_i < \lambda\right\}.$$

Здесь Y_i — супермартингал, λ — любое положительное число.

В нашем случае $\lambda = e^{hk}$, $Y_i = X_i$, $\mathbf{E}Y_0 = e^h$. Таким образом,

$$e^{hk} \mathbf{P}\left\{\sup_{0 \leq i \leq n} X_i \geq e^{hk}\right\} \leq e^h - \mathbf{E}\{X_n; \sup_{0 \leq i \leq n} X_i < e^{hk}\}.$$

Математическое ожидание в правой части этого неравенства оценим следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}\{X_n; \sup_{0 \leq i \leq n} X_i < e^{hk}\} &\geq \mathbf{P}\{A_n; \sup_{0 \leq i \leq n} X_i < e^{hk}\} \\ &= \mathbf{P}(A_n) - \mathbf{P}\{A_n; \sup_{0 \leq i \leq n} X_i \geq e^{hk}\} \geq \mathbf{P}(A_n) - \mathbf{P}\left\{\sup_{0 \leq i \leq n} X_i \geq e^{hk}\right\}. \end{aligned}$$

В результате имеем

$$(e^{hk} - 1) \mathbf{P}\left\{\sup_{0 \leq i \leq n} X_i \geq e^{hk}\right\} \leq e^h - \mathbf{P}(A_n).$$

Отсюда, принимая во внимание (44), получаем оценку

$$\mathbf{P}\left\{\sup_{0 \leq i \leq n} X_i \geq e^{hk}\right\} \leq \frac{e^h - x_0}{e^{hk} - 1}. \quad (49)$$

Далее,

$$\mathbf{P}\{M_n \geq k; A_n\} = \mathbf{P}\{I(A_n) \sup_{0 \leq i \leq n} e^{hZ_i} \geq e^{hk}\} \leq \mathbf{P}\left\{\sup_{0 \leq i \leq n} X_i \geq e^{hk}\right\}.$$

Отсюда, в силу (49)

$$\mathbf{P}\{M_n \geq k; A_n\} \leq \frac{e^h - x_0}{e^{hk} - 1}, \quad (50)$$

если h удовлетворяет условию $\tilde{f}(e^h) \leq e^h$.

В случае $\tilde{f}(e^h) \geq e^h$ применим неравенство (см. [8, с. 283])

$$\lambda \mathbf{P}\left\{\sup_{0 \leq i \leq n} Y_i \geq \lambda\right\} \leq \mathbf{E}\left\{Y_n; \sup_{0 \leq i \leq n} Y_i \geq \lambda\right\}.$$

Здесь Y_i — субмартингал, λ — произвольное положительное число.

Вычитая из обеих частей $\mathbf{P}\{\sup_{0 \leq i \leq n} Y_i \geq \lambda\}$, имеем

$$\begin{aligned} (\lambda - 1) \mathbf{P}\left\{\sup_{0 \leq i \leq n} Y_i \geq \lambda\right\} &\leq \mathbf{E}\left\{Y_n - 1; \sup_{0 \leq i \leq n} Y_i \geq \lambda\right\} \\ &= \mathbf{E}(Y_n - 1) - \mathbf{E}\left\{Y_n - 1; \sup_{0 \leq i \leq n} Y_i < \lambda\right\}. \end{aligned}$$

Предположим, что Y_i положительный субмартингал. Тогда, как нетрудно видеть,

$$-\mathbf{E}\left\{Y_n - 1; \sup_{0 \leq i \leq n} Y_i < \lambda\right\} \leq -\mathbf{E}\{Y_n - 1; Y_n < 1\} \leq \mathbf{P}\{Y_n < 1\}.$$

Поэтому

$$(\lambda - 1) \mathbf{P}\left\{\sup_{0 \leq i \leq n} Y_i \geq \lambda\right\} \leq \mathbf{E}(Y_n - 1) + \mathbf{P}\{Y_n < 1\}.$$

Полагая в этом неравенстве $Y_i = X_i$, $\lambda = e^{hk}$, получаем оценку

$$(e^{hk} - 1) \mathbf{P}\left\{\sup_{0 \leq i \leq n} X_i \geq e^{hk}\right\} \leq \tilde{f}_n(e^h) - 1 + \mathbf{P}\{X_n = 0\}.$$

Замечая, что $\mathbf{P}\{X_n = 0\} = \mathbf{P}(\bar{A}_n)$, и используя (44), приходим к оценке

$$\mathbf{P}\{M_n \geq k; A_n\} \leq \mathbf{P}\left\{\sup_{0 \leq i \leq n} X_i \geq e^{hk}\right\} \leq \frac{\tilde{f}_n(e^h) - x_0}{e^{hk} - 1}, \quad (51)$$

где h удовлетворяет условию $\tilde{f}(e^h) \geq e^h$.

Отметим, что оценки (50) и (51) совпадают в случае, когда h удовлетворяет равенству $e^h = \tilde{f}(e^h)$, так как в этом случае $\tilde{f}_n(e^h) = e^h$ для любого n . Положительный корень уравнения $e^h = \tilde{f}(e^h)$ обозначим через h_0 , т.е. h_0 является неподвижной точкой отображения $\tilde{f}(e^h)$. Утверждение леммы можно интерпретировать следующим образом: если $h \leq h_0$, то для оценивания $\mathbf{P}\{M_n \geq k; A_n\}$ используется неравенство (50), в противном случае используется неравенство (51).

Докажем теперь теорему 2. Положим

$$y_0 = \frac{1}{N} \ln \frac{N^{r-1}}{nB_r}$$

и рассмотрим рекуррентную последовательность

$$y_{n-1} = y_n + B_r \frac{e^{y_n N}}{N^r}.$$

Последовательность y_n , очевидно, убывает. Поэтому

$$y_n > y_{n-1} - B_r \frac{e^{y_0 N}}{N^r}.$$

Складывая эти неравенства, имеем

$$y_n > y_0 - nB_r \frac{e^{y_0 N}}{N^r}. \quad (52)$$

Из условия (23) следует, что $y_0 > 1/N$. С другой стороны, по определению y_0

$$nB_r \frac{e^{y_0 N}}{N^r} = \frac{1}{N}. \quad (53)$$

Возвращаясь теперь к (52), мы видим, что $y_n > 0$.

В работе Д. Х. Фука и С. В. Нагаева [11] выводится неравенство

$$\mathbf{E}\{e^{y\xi}; \xi \leq N\} \leq 1 + y \int_0^N u d\mathbf{P}\{\xi < u\} + \frac{e^{yN} - 1 - yN}{N^r} \int_0^N u^r d\mathbf{P}\{\xi < u\}.$$

Так как

$$\int_0^N u d\mathbf{P}\{\xi < u\} \leq 1, \quad \int_0^N u^r d\mathbf{P}\{\xi < u\} \leq B_r < \infty,$$

то

$$\tilde{f}(e^y) = \mathbf{E}\{e^{y\xi}; \xi \leq N\} \leq 1 + y + B_r \frac{e^{yN}}{N^r}.$$

Полагая в этом неравенстве $y = y_n$, получаем

$$\tilde{f}(e^{y_n}) \leq 1 + y_n + B_r \frac{e^{y_n N}}{N^r} = 1 + y_{n-1} \leq e^{y_{n-1}}.$$

Следовательно,

$$\tilde{f}_n(e^{y_n}) \leq 1 + y_0 \leq e^{y_0}. \quad (54)$$

Отсюда, полагая в лемме 1 $h = y_n$, получаем оценку

$$\mathbf{P}\{M_n \geq k; A_n\} \leq \frac{e^{y_0} - x_0}{e^{y_n k} - 1}. \quad (55)$$

Предположение $p_0 > 0$ и условие критичности рассматриваемого процесса означают, что ξ имеет невырожденное распределение. По неравенству Иенсена $B_r > (\mathbf{E}\xi)^r = 1$ при $r > 1$. Отсюда и из (23) мы заключаем, что

$$y_0 < \frac{\ln N^{r-1}}{N} < \frac{\ln N}{N} \leq e^{-1}.$$

Согласно формуле конечных приращений, $e^{y_0} < 1 + e^{1/e} y_0 < 1 + 3y_0/2$. Из этого неравенства и оценки (45) вытекает

$$e^{y_0} - x_0 < \frac{3}{2} y_0 + 1 - x_0 < \frac{3}{2} y_0 + \frac{1}{N} < \frac{3}{2} \left(y_0 + \frac{1}{N} \right). \quad (56)$$

Из определения y_0 и соотношений (52), (53) следует

$$y_n > \frac{1}{N} \ln \frac{N^{r-1}}{B_r n} - \frac{1}{N} = \frac{1}{N} \ln \frac{N^{r-1}}{e B_r n}. \quad (57)$$

Подставляя в (55) оценки (57), (56), получаем

$$\mathbf{P}\{M_n \geq k; A_n\} \leq \frac{3}{2N} \ln \left(\frac{e N^{r-1}}{B_r n} \right) \left[\left(\frac{N^{r-1}}{e B_r n} \right)^{k/N} - 1 \right]^{-1}.$$

Из последнего неравенства и соотношений (41) и (43) следует утверждение теоремы 2. Обратимся теперь к доказательству теоремы 3. Согласно определению функции $\tilde{f}(s)$, имеем

$$\tilde{f}(1+y) = \sum_{0 \leq k \leq N} p_k (1+y)^k.$$

Из формулы Тейлора вытекает неравенство

$$(1+y)^k \leq 1 + ky + \frac{k(k-1)}{2} y^2 (1+y)^{k-2} \leq 1 + ky + \frac{k(k-1)}{2} y^2 e^{yk}.$$

Следовательно, справедлива оценка

$$\begin{aligned} \tilde{f}(1+y) &\leq \sum_{0 \leq k \leq N} p_k + y \sum_{0 \leq k \leq N} k p_k + y^2 \sum_{0 \leq k \leq N} p_k \frac{k(k-1)}{2} e^{yk} \\ &\leq 1 + y + y^2 S(y), \end{aligned} \quad (58)$$

где

$$\begin{aligned} S(y) &= \sum_{0 \leq k \leq N} p_k \frac{k(k-1)}{2} e^{yk} \\ &= \sum_{0 \leq k \leq r/y} p_k \frac{k(k-1)}{2} e^{yk} + \sum_{r/y < k \leq N} p_k \frac{k(k-1)}{2} e^{yk} \equiv S_1(y) + S_2(y). \end{aligned}$$

Отметим, что при $y < r/N$ второе слагаемое в правой части этого представления отсутствует.

Из того, что $e^{yk} \leq e^r$ при $k \leq r/y$, следует

$$S_1(y) \leq e^r \sum_{0 \leq k \leq r/y} p_k \frac{k(k-1)}{2} \leq \frac{e^r \overline{B}}{2}. \quad (59)$$

Заметим, что функция $x^{-r+2} e^x$ возрастает при $x \geq r-2$. Отсюда при $z \geq r-2$ мы получаем неравенство

$$e^x \leq e^z \left(\frac{x}{z} \right)^{r-2}, \quad x \in [r-2, z],$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned} S_2(y) &= \sum_{r/y < k \leq N} p_k \frac{k(k-1)}{2} e^{yk} \\ &\leq \sum_{r/y < k \leq N} p_k e^{yN} \frac{k(k-1)}{2} \left(\frac{k}{N}\right)^{r-2} \leq \frac{e^{yN}}{N^{r-2}} \bar{\beta}_r. \end{aligned} \quad (60)$$

Собирая оценки (58)–(60), заключаем, что

$$\tilde{f}(1+y) \leq 1 + y + y^2 e^r \frac{\bar{B}}{2} + y^2 \bar{\beta}_r \frac{e^{yN}}{N^{r-2}}. \quad (61)$$

Пусть последовательность y_n задается равенством

$$y_{n-1} = y_n + y_n^2 e^r \frac{\bar{B}}{2} + y_n^2 \bar{\beta}_r \frac{e^{y_n N}}{N^{r-2}}. \quad (62)$$

Нетрудно видеть, что функция $x + x^2 e^r \bar{B}/2 + x^2 \bar{\beta}_r e^{xN}/N^{r-2}$ имеет обратную при $x \geq 0$, причем последняя положительна. Отсюда заключаем, что $y_n > 0$ для любого n . Заметим также, что последовательность y_n не возрастает.

Деля обе части уравнения (62) на $y_n y_{n-1}$, получаем оценку

$$\frac{1}{y_n} \leq \frac{1}{y_{n-1}} + e^r \frac{\bar{B}}{2} + \bar{\beta}_r \frac{e^{y_0 N}}{N^{r-2}} \leq \dots \leq \frac{1}{y_0} + e^r \frac{\bar{B}}{2} n + \bar{\beta}_r \frac{e^{y_0 N}}{N^{r-2}} n.$$

Следовательно,

$$y_n \geq \left(\frac{1}{y_0} + e^r \frac{\bar{B}}{2} n + \bar{\beta}_r \frac{e^{y_0 N}}{N^{r-2}} n \right)^{-1}. \quad (63)$$

Сравнивая (62) и (61), мы убеждаемся, что $\tilde{f}(1+y_n) \leq 1 + y_{n-1}$. Отсюда

$$\tilde{f}_n(1+y_n) = \tilde{f}_{n-1}(\tilde{f}(1+y_n)) \leq \tilde{f}_{n-1}(1+y_{n-1}) \leq \dots \leq 1 + y_0. \quad (64)$$

Полагая в лемме 1 $h = \ln(1+y_n)$ и учитывая (64), имеем

$$\mathbf{P}\{M_n \geq k; A_n\} \leq \frac{y_0 + 1 - x_0}{(1+y_n)^k - 1}.$$

Пользуясь неравенствами (45) и (63), приходим к оценке

$$\mathbf{P}\{M_n \geq k; A_n\} \leq \left(y_0 + \frac{1}{N}\right) \left[\left(1 + \frac{1}{1/y_0 + e^r \bar{B}n/2 + n \bar{\beta}_r e^{y_0 N}/N^{r-2}}\right)^k - 1 \right]^{-1}. \quad (65)$$

Комбинируя (41), (43) и (65), получаем требуемое неравенство.

Доказательство теоремы 4. Нетрудно видеть, что урезанные моменты $\overline{B}$, $\overline{\beta}_r$ одновременно либо положительны либо равны нулю. Предположим сначала, что $\overline{B} > 0$ и $\overline{\beta}_r > 0$. Положим

$$y_0 = \frac{1}{N} \ln \frac{\overline{B} N^{r-2}}{\overline{\beta}_r} + \frac{1}{N}.$$

Нетрудно видеть, что

$$\frac{1}{N} < y_0 < \frac{(r-2) \ln(2N) + 1}{N}, \quad (66)$$

$$\overline{\beta}_r \frac{e^{y_0 N}}{N^{r-2}} = e \overline{B} < e^r \frac{B}{2}. \quad (67)$$

Заменяя в неравенстве теоремы 3 $\overline{B}$ на B и учитывая (66), (67), имеем

$$\mathbf{P}\{M_n \geq k\} \leq 2y_0 \left[\left(1 + \frac{1}{1/y_0 + e^r B n} \right)^k - 1 \right]^{-1} + n \mathbf{P}\{\xi > N\}. \quad (68)$$

Очевидно, $(1+x)^k \geq (1+1/k)^k \geq 2$ для любого k и $x \geq 1/k$. Отсюда при $x \geq 1/k$

$$\frac{1}{(1+x)^k - 1} = \frac{(1+x)^{-k}}{1 - (1+x)^{-k}} \leq 2(1+x)^{-k}.$$

С другой стороны, при $x < 1/k$ имеет место неравенство

$$\frac{1}{(1+x)^k - 1} \leq \frac{1}{kx} \leq \left(1 + \frac{1}{k} \right)^k \frac{(1+x)^{-k}}{kx} \leq e \frac{(1+x)^{-k}}{kx}.$$

В результате мы получаем

$$\frac{1}{(1+x)^k - 1} \leq 2 \max \left(1, \frac{e}{2kx} \right) \frac{1}{(1+x)^k}.$$

Применяя эту оценку к первому слагаемому в правой части (68), приходим к неравенству

$$\begin{aligned} & 2y_0 \left[\left(1 + \frac{1}{1/y_0 + e^r B n} \right)^k - 1 \right]^{-1} \\ & \leq 4y_0 \max \left\{ 1, \frac{e(1/y_0 + e^r B n)}{2k} \right\} \left(1 + \frac{1}{1/y_0 + e^r B n} \right)^{-k}. \end{aligned} \quad (69)$$

Если $1/y_0 \leq re^r(Bn \vee 1)$, то

$$\begin{aligned} \max \left\{ 1, \frac{e(1/y_0 + e^r B n)}{k} \right\} & \leq \max \left\{ 1, \frac{(r+1)e^{r+1}(Bn \vee 1)}{2k} \right\} \\ & \leq \frac{(r+1)e^{r+1}}{2} \max \left\{ 1, \frac{Bn}{k} \right\}. \end{aligned}$$

Таким образом, при $k \geq Bn$ и $1/y_0 \leq re^r(Bn \vee 1)$ справедливо неравенство

$$\max\left\{1, \frac{e(1/y_0 + e^r Bn)}{2k}\right\} \leq \frac{(r+1)e^{r+1}}{2}.$$

Следовательно,

$$2y_0 \left[\left(1 + \frac{1}{1/y_0 + e^r Bn}\right)^k - 1 \right]^{-1} \leq 2(r+1)e^{r+1} y_0 \left(1 + \frac{1}{(r+1)e^r(Bn \vee 1)}\right)^{-k}$$

при $k \geq Bn$ и $1/y_0 \leq re^r(Bn \vee 1)$.

Привлекая (66), мы приходим при $k \geq Bn$ и $1/y_0 \leq re^r(Bn \vee 1)$ к неравенству

$$\begin{aligned} & 2y_0 \left[\left(1 + \frac{1}{1/y_0 + e^r Bn}\right)^k - 1 \right]^{-1} \\ & \leq 2(r+1)e^{r+1} \frac{(r-2)\ln(2N) + 1}{N} \left(1 + \frac{1}{(r+1)e^r(Bn \vee 1)}\right)^{-k}. \end{aligned} \quad (70)$$

Если же $1/y_0 > re^r(Bn \vee 1)$, то

$$\begin{aligned} & y_0 \max\left\{1, \frac{e(1/y_0 + e^r Bn)}{2k}\right\} \leq y_0 \max\left\{1, \frac{e(r+1)}{2ry_0 k}\right\} \\ & \leq \frac{e(r+1)}{2r} \max\left\{y_0, \frac{1}{k}\right\} \\ & \leq \frac{e(r+1)}{2r} \max\left\{\frac{1}{re^r Bn}, \frac{1}{k}\right\} \leq \frac{e(r+1)}{2rBn} \max\left\{1, \frac{Bn}{k}\right\}. \end{aligned} \quad (71)$$

Из условия $1/y_0 > re^r(Bn \vee 1)$ следует, что $e^r Bn < 1/(ry_0)$. Поэтому

$$\left(1 + \frac{1}{1/y_0 + e^r Bn}\right)^{-k} < \left(1 + \frac{ry_0}{r+1}\right)^{-k}. \quad (72)$$

Применяя (71) и (72) для оценки правой части в (69), мы получаем, что

$$2y_0 \left[\left(1 + \frac{1}{1/y_0 + e^r Bn}\right)^k - 1 \right]^{-1} \leq 2e \frac{r+1}{rBn} \left(1 + \frac{ry_0}{r+1}\right)^{-k} \quad (73)$$

при $k \geq Bn$, $1/y_0 > re^r(Bn \vee 1)$.

Нетрудно видеть, что $\ln(1+x) \geq x - x^2/2$ при $x > 0$. Следовательно,

$$(1+x)^{-k} \leq \exp\left(-kx\left(1 - \frac{x}{2}\right)\right)$$

при $x > 0$. Отсюда, полагая $x = ry_0/(r+1)$ и учитывая, что в рассматриваемом случае $y_0 < 1/r$, получаем неравенство

$$\left(1 + \frac{ry_0}{r+1}\right)^{-k} \leq \exp\left(-\frac{kry_0}{r+1} \left(1 - \frac{1}{2(r+1)}\right)\right). \quad (74)$$

Из (73) и (74) следует, что

$$2y_0 \left[\left(1 + \frac{1}{1/y_0 + e^r Bn} \right)^k - 1 \right]^{-1} \leq 2e \frac{r+1}{rBn} \exp(-\gamma k y_0), \quad (75)$$

где $\gamma = r(2r+1)/(2(r+1)^2)$. Эта оценка верна при $k \geq Bn$, $1/y_0 > re^r(Bn \vee 1)$.

Подставляя вместо y_0 выбранное значение, имеем

$$\exp(-\gamma k y_0) = e^{-\gamma k/N} \left(\frac{\bar{\beta}_r}{\bar{B} N^{r-2}} \right)^{\gamma k/N}.$$

Заметим, что

$$\frac{\bar{\beta}_r}{\bar{B}} \leq \frac{B_r - B_{r-1}}{B} < \frac{B_r}{B}.$$

Следовательно,

$$\exp(-\gamma k y_0) < e^{-\gamma k/N} \left(\frac{B_r}{B N^{r-2}} \right)^{\gamma k/N}. \quad (76)$$

Из (70), (75) и (76) вытекает неравенство

$$\begin{aligned} & 2y_0 \left[\left(1 + \frac{1}{1/y_0 + e^r Bn} \right)^k - 1 \right]^{-1} \\ & \leq 2(r+1) e^{r+1} \frac{(r-2) \ln(2N) + 1}{N} \left(1 + \frac{1}{(r+1) e^r (Bn \vee 1)} \right)^{-k} \\ & \quad + 2 \frac{r+1}{rBn} e^{1-\gamma k/N} \left(\frac{B_r}{B N^{r-2}} \right)^{\gamma k/N}, \end{aligned} \quad (77)$$

верное при $k \geq Bn$. Комбинируя (68) и (77), получаем желаемый результат.

Пусть теперь $\bar{B} = \bar{\beta}_r = 0$, тогда неравенство теоремы 3* запишется следующим образом:

$$\mathbf{P}\{M_n \geq k\} \leq \left(y_0 + \frac{1}{N} \right) \frac{1}{(1+y_0)^k - 1} + n \mathbf{P}\{\xi > N\}.$$

Устремляя y_0 к бесконечности, мы получаем при $k > 1$ оценку

$$\mathbf{P}\{M_n \geq k\} \leq n \mathbf{P}\{\xi > N\}.$$

Если же $k = 1$, то независимо от значений урезанных моментов правая часть неравенства (25) и, следовательно, правая часть (26) больше единицы, в то время как $\mathbf{P}\{M_n \geq 1\} = 1$. Тем самым теорема доказана полностью.

Доказательство следствия 3. Положим $N = k(r - 2)(2r + 1)/(2(r + 1)^2)$. Если $N < 1$, то $nB_r/N^r > 1$ и, следовательно, оценка (27) тривиальна. Если же $N \geq 1$, то воспользуемся неравенством (26). Оценивая $\mathbf{P}\{\xi > N\}$ с помощью неравенства Чебышева, получаем желаемый результат.

Доказательство теоремы 5. Пусть $S_k = \sum_{i=1}^k \eta_i$, где $\{\eta_i\}$ — последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин, распределение которых совпадает с распределением величины $\eta \equiv \xi - 1$.

Лемма 2. Для всякого $t \geq 2$ справедливы следующие оценки:

$$\mathbf{E}\{(\sqrt{k + S_k} - \sqrt{k})^t; S_k > 0\} \leq \frac{3}{2} \left(\frac{t}{2} + 1\right)^{t/2} \left(t \mathbf{E}\xi^{t/2+1} + e^{t/2+1} B^{t/2}\right), \quad (78)$$

$$\mathbf{E}\{(\sqrt{k + S_k} - \sqrt{k})^t; S_k > 0\} \leq 3 \left(\frac{t}{2} + 1\right)^{t/2} \left(k \mathbf{E}\xi^{t/2} + e^{t/2+1} B^{t/2}\right). \quad (79)$$

Доказательство. С помощью неравенств

$$\sqrt{x+y} - \sqrt{x} \leq \frac{y}{\sqrt{x}}, \quad \sqrt{x+y} - \sqrt{x} \leq \sqrt{y}, \quad x > 0, \quad y > 0,$$

получаем

$$\begin{aligned} & \mathbf{E}\{(\sqrt{k + S_k} - \sqrt{k})^t; S_k > 0\} \\ &= \mathbf{E}\{(\sqrt{k + S_k} - \sqrt{k})^t; 0 < S_k < k\} + \mathbf{E}\{(\sqrt{k + S_k} - \sqrt{k})^t; S_k \geq k\} \\ &\leq k^{-t/2} \mathbf{E}\{S_k^t; 0 < S_k < k\} + \mathbf{E}\{S_k^{t/2}; S_k \geq k\}. \end{aligned} \quad (80)$$

Интегрируя по частям, приходим к равенствам

$$\begin{aligned} \mathbf{E}\{S_k^t; 0 < S_k < k\} &= -k^t \mathbf{P}\{S_k \geq k\} + t \int_0^k x^{t-1} \mathbf{P}\{S_k \geq x\} dx, \\ \mathbf{E}\{S_k^{t/2}; S_k \geq k\} &= k^{t/2} \mathbf{P}\{S_k \geq k\} + \frac{t}{2} \int_k^\infty x^{t/2-1} \mathbf{P}\{S_k \geq x\} dx. \end{aligned}$$

Подставляя эти выражения в правую часть неравенства (80), имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{E}\{(\sqrt{k + S_k} - \sqrt{k})^t; S_k > 0\} &\leq k^{-t/2} t \int_0^k x^{t-1} \mathbf{P}\{S_k \geq x\} dx \\ &\quad + \frac{t}{2} \int_k^\infty x^{t/2-1} \mathbf{P}\{S_k \geq x\} dx. \end{aligned} \quad (81)$$

Рассмотрим сначала первое слагаемое в правой части (81). Из теоремы 4 работы [11] вытекает неравенство

$$\mathbf{P}\{S_k \geq x\} \leq k \mathbf{P}\{\eta \geq y\} + \exp\left(\frac{x}{y} - \frac{x}{y} \ln\left(\frac{xy}{Bk} + 1\right)\right). \quad (82)$$

Если $x/y = \rho$, где ρ — любое положительное число, то в силу (82)

$$\begin{aligned} & t \int_0^k x^{t-1} \mathbf{P}\{S_k \geq x\} dx \\ & \leq kt \int_0^k x^{t-1} \mathbf{P}\left\{\eta \geq \frac{x}{\rho}\right\} dx + te^\rho \int_0^k x^{t-1} \left(1 + \frac{x^2}{\rho Bk}\right)^{-\rho} dx \\ & \leq kt\rho^t \int_0^{k/\rho} x^{t-1} \mathbf{P}\{\eta \geq x\} dx + te^\rho (\rho Bk)^{t/2} \int_0^\infty x^{t-1} (1+x^2)^{-\rho} dx. \end{aligned}$$

Полагая теперь $\rho = t/2 + 1$ и учитывая, что

$$\int_0^\infty x^{t-1} (1+x^2)^{-t/2-1} dx = \frac{1}{t}$$

(см., например, [14, с. 309, формула 11]), приходим к неравенству

$$\begin{aligned} t \int_0^k x^{t-1} \mathbf{P}\{S_k \geq x\} dx & \leq t \left(\frac{t}{2} + 1\right)^t \int_0^{2k/(t+2)} x^{t-1} \mathbf{P}\{\eta \geq x\} dx \\ & \quad + \left(\frac{t}{2} + 1\right)^{t/2} e^{t/2+1} B^{t/2} k^{t/2}. \end{aligned} \quad (83)$$

Очевидно,

$$\int_0^z x^{t-1} \mathbf{P}\{\eta \geq x\} dx \leq z^s \int_0^z x^{t-s-1} \mathbf{P}\{\eta \geq x\} dx$$

для всякого $0 \leq s < t$. Кроме того, из определения величины η вытекает оценка

$$\int_0^z x^{t-s-1} \mathbf{P}\{\eta \geq x\} dx \leq \int_0^z x^{t-s-1} \mathbf{P}\{\xi \geq x\} dx \leq \frac{1}{t-s} \mathbf{E} \xi^{t-s}.$$

В результате получаем неравенство

$$\int_0^z x^{t-1} \mathbf{P}\{\eta \geq x\} dx \leq \frac{z^s}{t-s} \mathbf{E} \xi^{t-s}.$$

Полагая в этом соотношении $z = 2k/(t+2)$, имеем соответственно при $s = t/2 - 1$ и $s = t/2$

$$\begin{aligned} \int_0^{2k/(t+2)} x^{t-1} \mathbf{P}\{\eta \geq x\} dx & \leq \frac{1}{t/2+1} \left(\frac{t}{2} + 1\right)^{-t/2+1} k^{t/2-1} \mathbf{E} \xi^{t/2+1}, \\ \int_0^{2k/(t+2)} x^{t-1} \mathbf{P}\{\eta \geq x\} dx & \leq \frac{2}{t} \left(\frac{t}{2} + 1\right)^{-t/2} k^{t/2} \mathbf{E} \xi^{t/2}. \end{aligned}$$

Возвращаясь к (83), приходим к неравенствам

$$t \int_0^k x^{t-1} \mathbf{P}\{S_k \geq x\} dx \leq \left(\frac{t}{2} + 1\right)^{t/2} k^{t/2} (t \mathbf{E} \xi^{t/2+1} + e^{t/2+1} B^{t/2}), \quad (84)$$

$$t \int_0^k x^{t-1} \mathbf{P}\{S_k \geq x\} dx \leq \left(\frac{t}{2} + 1\right)^{t/2} k^{t/2} (2 \mathbf{E} \xi^{t/2} k + e^{t/2+1} B^{t/2}). \quad (85)$$

Оценим теперь второе слагаемое в правой части (81). Полагая в неравенстве (82) $y = 2x/t$, получаем

$$\begin{aligned} \frac{t}{2} \int_k^\infty x^{t/2-1} \mathbf{P}\{S_k \geq x\} dx &\leq \frac{t}{2} k \int_k^\infty x^{t/2-1} \mathbf{P}\left\{\eta \geq \frac{2x}{t}\right\} dx \\ &+ \frac{t}{2} e^{t/2} \int_k^\infty x^{t/2-1} \left(\frac{2x^2}{tBk} + 1\right)^{-t/2} dx. \end{aligned}$$

Для второго слагаемого в правой части этого неравенства имеет место оценка

$$\begin{aligned} \frac{t}{2} e^{t/2} \int_k^\infty x^{t/2-1} \left(\frac{2x^2}{tBk} + 1\right)^{-t/2} dx &\leq \frac{t}{2} e^{t/2} \int_k^\infty x^{t/2-1} \left(\frac{2x^2}{tBk}\right)^{-t/2} dx \\ &= \left(\frac{t}{2}\right)^{t/2+1} e^{t/2} B^{t/2} k^{t/2} \int_k^\infty x^{-t/2-1} dx = \left(\frac{t}{2}\right)^{t/2} e^{t/2} B^{t/2}. \end{aligned}$$

Первое слагаемое мы оценим двумя способами. С одной стороны,

$$\begin{aligned} \frac{t}{2} \int_k^\infty x^{t/2-1} \mathbf{P}\left\{\eta \geq \frac{2x}{t}\right\} dx &\leq \frac{t}{2k} \int_k^\infty x^{t/2} \mathbf{P}\left\{\eta \geq \frac{2x}{t}\right\} dx \\ &\leq \frac{1}{k} \left(\frac{t}{2}\right)^{t/2+1} \mathbf{E}\{\eta^{t/2+1}; \eta > 0\} \leq \frac{t}{2k} \left(\frac{t}{2} + 1\right)^{t/2} \mathbf{E}\xi^{t/2+1}, \end{aligned}$$

а с другой,

$$\begin{aligned} \frac{t}{2} \int_k^\infty x^{t/2-1} \mathbf{P}\left\{\eta \geq \frac{2x}{t}\right\} dx &\leq \left(\frac{t}{2}\right)^{t/2+1} \int_{2k/t}^\infty x^{t/2-1} \mathbf{P}\{\eta \geq x\} dx \\ &\leq \left(\frac{t}{2}\right)^{t/2} \mathbf{E}\{\eta^{t/2}; \eta > 0\} \leq \left(\frac{t}{2} + 1\right)^{t/2} \mathbf{E}\xi^{t/2}. \end{aligned}$$

В итоге получаем неравенства

$$k \frac{t}{2} \int_k^\infty x^{t/2-1} \mathbf{P}\{S_k \geq x\} dx \leq \left(\frac{t}{2} + 1\right)^{t/2} \left(\frac{t}{2} \mathbf{E}\xi^{t/2+1} + e^{t/2} B^{t/2}\right), \quad (86)$$

$$k \frac{t}{2} \int_k^\infty x^{t/2-1} \mathbf{P}\{S_k \geq x\} dx \leq \left(\frac{t}{2} + 1\right)^{t/2} (k \mathbf{E}\xi^{t/2} + e^{t/2} B^{t/2}). \quad (87)$$

Комбинируя (81), (84) и (86), мы получаем неравенство (78). Соответственно неравенство (79) следует из (81), (85) и (87). Лемма доказана.

Продолжим доказательство теоремы 5. Введем следующие случайные величины:

$$W_n = \sqrt{Z_n}, \quad X_n = W_n - W_{n-1}.$$

Из неравенства Иенсена следует, что последовательность W_n образует супермартингал. Нетрудно видеть, что

$$\mathbf{E}\{X_n^2 \mid Z_{n-1} = k\} = \mathbf{E}(\sqrt{k + S_k} - \sqrt{k})^2 \leq \frac{\mathbf{E}S_k^2}{k} = B.$$

Кроме того, из первого неравенства леммы 2 следует, что при $t = 2(r-1)$

$$\begin{aligned} \mathbf{E}\{X_n^t I(X_n > 0) \mid Z_{n-1} = k\} &= \mathbf{E}\{(\sqrt{k + S_k} - \sqrt{k})^t; S_k > 0\} \\ &\leq \frac{3}{2} r^{r-1} ((2r-2) B_r + e^r B^{r-1}) \equiv H_1. \end{aligned}$$

Мы показали, таким образом, что выполнены условия теоремы 2 работы Д. Х. Фука [12] при $t = 2(r-1)$. По следствию из этой теоремы

$$\mathbf{P}\left\{\max_{k \leq n} W_k \geq x\right\} \leq \exp\left(-\frac{x^2}{l(r) Bn}\right) + \left(\frac{nH_1}{xy^{2r-3}}\right)^{\beta x/y} + \sum_{i=1}^n \mathbf{P}\{X_i \geq y\},$$

где $\beta = 1 - 1/r$, $l(r) = 2r^2 e^{2r-2}$.

Применяя неравенство (79), получаем, что для любого i

$$\mathbf{E}\{X_i^{2r}; X_i > 0\} = \mathbf{E}\mathbf{E}\{X_i^{2r} I(X_i > 0) \mid Z_{i-1}\} \leq 3(r+1)^r (B_r + e^{r+1} B^r) \equiv H_2.$$

Отсюда

$$\sum_{i=1}^n \mathbf{P}\{X_i \geq y\} \leq \frac{nH_2}{y^{2r}}.$$

Таким образом,

$$\mathbf{P}\left\{\max_{k \leq n} W_k \geq x\right\} \leq \exp\left(-\frac{x^2}{l(r) Bn}\right) + \left(\frac{nH_1}{xy^{2r-3}}\right)^{\beta x/y} + \frac{nH_2}{y^{2r}}.$$

Полагая $y = (r-2)x/r$, приходим к оценке

$$\begin{aligned} &\mathbf{P}\left\{\max_{k \leq n} W_k \geq x\right\} \\ &\leq \exp\left(-\frac{x^2}{l(r) Bn}\right) + \left(\frac{r}{r-2}\right)^{2r} \left(H_2 + H_1^{(r-1)/(r-2)} \left(\frac{n}{x^2}\right)^{1/r-2}\right) \frac{n}{x^{2r}}. \end{aligned}$$

Замечая, что $\mathbf{P}\{\max_{i \leq n} W_i \geq \sqrt{k}\} = \mathbf{P}\{\max_{i \leq n} Z_i \geq k\}$, получаем при $k \geq Bn$ требуемое неравенство.

Отметим, что аналогичные преобразования случайных процессов применялись и ранее, но лишь для выяснения условий возвратности случайных блужданий. В основополагающей работе Ламперти [15] использовались функции $\ln x$ и x^2 , а в работах [16], [17] — функции x^α соответственно при $\alpha < 2$ и $1 \leq \alpha \leq 2$.

В заключение авторы хотели бы выразить благодарность рецензенту, который обнаружил ряд неточностей и опечаток в первоначальном варианте статьи и сделал полезные замечания, способствовавшие улучшению изложения представленных результатов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Нагаев С. В., Вахрушев Н. В.* Оценка вероятностей больших отклонений для критического процесса Гальтона–Ватсона. — Теория вероятн. и ее примен., 1975, т. 20, в. 1, с. 181–182.
2. *Харрис Т.* Теория ветвящихся процессов. М.: Мир, 1966, 355 с.
3. *Макаров Г. Д.* Большие отклонения для критического процесса Гальтона–Ватсона. — Теория вероятн. и ее примен., 1980, т. 25, в. 3, с. 490–501.
4. *Lindvall T.* On the maximum of a branching process. — Scand. J. Statist., 1976, v. 3, № 4, p. 209–214.
5. *Borovkov K. A., Vatutin V. A.* On distribution tails and expectations of maxima in critical branching processes. — J. Appl. Probab., 1996, v. 33, № 3, p. 614–622.
6. *Ватутин В. А., Тончий В. А.* Максимум критических процессов Гальтона–Ватсона и непрерывные слева случайные блуждания. — Теория вероятн. и ее примен., 1997, т. 42, в. 1, с. 21–34.
7. *Карпенко А. В.* Предельные теоремы и вероятностные неравенства для полного и максимального числа потомков ветвящегося процесса Гальтона–Ватсона. Дисс. ... канд. физ.-матем. наук. Новосибирск: Ин-т математики им. С. Л. Соболева, 1990.
8. *Дуб Дж. Л.* Вероятностные процессы. М.: ИЛ, 1956, 605 с.
9. *Петров В. В.* Суммы независимых случайных величин. М.: Наука, 1972, 416 с.
10. *Нагаев С. В., Вахтель В. И.* Предельные теоремы для вероятностей больших отклонений процесса Гальтона–Ватсона. — Дискретн. матем., 2003, т. 15, № 1, с. 3–27.
11. *Фук Д. Х., Нагаев С. В.* Вероятностные неравенства для сумм независимых случайных величин. — Теория вероятн. и ее примен., 1971, т. 16, в. 4, с. 660–675.
12. *Фук Д. Х.* Некоторые вероятностные неравенства для мартингалов. — Сиб. матем. журн., 1973, т. 14, в. 1, с. 185–193.
13. *Мейер П.-А.* Вероятность и потенциалы. М.: Мир, 1973, 324 с.
14. *Градштейн И. С., Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Физматгиз, 1962.
15. *Lamperti J.* Criteria for the recurrence or transience of stochastic processes. I. — J. Math. Anal. Appl., 1960, v. 1, p. 314–330.
16. *Borovkov A. A., Fayolle G., Korshunov D. A.* Transient phenomena for Markov chains and applications. — Adv. Appl. Probab., 1992, v. 24, № 2, p. 322–342.
17. *Fayolle G., Malyshev V. A., Men'shikov M. V.* Random walks in a quarter plane with zero drifts. I. Ergodicity and null recurrence. — Ann. Inst. H. Poincaré, Probab. Statist., 1992, v. 28, № 2, p. 179–194.

Поступила в редакцию
23.VII.2002

Исправленный вариант
15.I.2004