Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. В. Жуков, О точности нормальной аппроксимации для плотностей сумм независимых одинаково распределенных случайных величин, *Теория вероятн. и ее примен.*, 1999, том 44, выпуск 4, 853–861

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp1070>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.23.180.231

26 апреля 2023 г., 04:06:07

© 1999 г.

ЖУКОВ Ю. В.*

О ТОЧНОСТИ НОРМАЛЬНОЙ АППРОКСИМАЦИИ ДЛЯ ПЛОТНОСТЕЙ СУММ НЕЗАВИСИМЫХ ОДИНАКОВО РАСПРЕДЕЛЕННЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

Уточняется структура неравномерной оценки скорости сходимости в локальной центральной предельной теореме для плотностей сумм независимых одинаково распределенных случайных величин. Абсолютные постоянные указаны в явном виде.

Ключевые слова и фразы: локальная предельная теорема, неравномерные оценки, метрика L_p .

1. Введение. Пусть $X_1, X_2, \dots$ — независимые одинаково распределенные случайные величины (с.в.) с $EX_1 = 0$, $DX_1 = 1$, $E|X_1|^3 \equiv \beta^3$. Предположим, что с.в. X_1 имеет плотность $p(x)$. Плотность нормированной суммы $S_n = (X_1 + \dots + X_n)/\sqrt{n}$ и ее характеристическая функция (х.ф.) будут обозначаться $p_n(x)$ и $f_n(t)$ соответственно. В данной статье мы приводим неравномерную оценку точности приближения плотности нормированной суммы независимых одинаково распределенных случайных величин плотностью $\varphi(x)$ стандартного нормального закона. При этом делаются стандартные предположения о том, что $\beta^3 < \infty$, а общая плотность $p(x)$ слагаемых ограничена некоторым числом A :

$$A \equiv \sup_x p(x) < \infty.$$

Сразу заметим, что при приведенных выше условиях на моменты с.в. X_1 число A не может быть сколь угодно близким к нулю. Более того, используя результаты работы Ю. В. Прохорова [4], можно показать, что $12A^2 > 1$. Обозначим $\Delta(x) = |p_n(x) - \varphi(x)|$.

Данная работа отнюдь не первая в этом направлении. Еще в середине 60-х годов С. Х. Сираждиновым и его учениками наряду с равномерной оценкой для $\Delta(x)$ была получена неравномерная оценка вида

$$\Delta(x) \leq C \frac{\beta^{15} \max(1, A^7)}{\sqrt{n}(1 + |x|^3)}, \quad (1)$$

где $C > 0$ — абсолютная постоянная. Эта оценка также приведена в широко известной книге В. В. Петрова [3]. Однако, если по числу слагаемых n и аргументу плотности x оценка (1) имеет традиционные для указанных выше моментных предположений порядки убывания, то ее зависимость от других параметров — β^3 и A — далека от оптимальной. Сопоставление оценки (1) с критерием сходимости в локальной центральной предельной теореме, согласно которому для равномерной сходимости $p_n(x)$ к $\varphi(x)$ необходимо и достаточно, чтобы существовало некоторое N , при котором $p_N(x)$ ограничена, наводит на мысль о том, что роль константы A в оценке (1) сильно преувеличена. Действительно, в работе В. Ю. Королева и Ю. В. Жукова [9] удалось получить равномерную оценку

$$\sup_x \Delta(x) \leq 0.4013 \frac{\beta^3}{\sqrt{n}} + \Delta_n^{(1)}(\beta) + \Delta_n^{(2)}(A, \beta), \quad (2)$$

где

$$\Delta_n^{(1)}(\beta) = 0.7958 \frac{\beta}{n^{1/6}} \exp \left\{ -\frac{n^{1/3}}{3\beta^2} \right\}, \quad (3)$$

$$\Delta_n^{(2)}(A, \beta) = \inf_{0 < \gamma < 1} \inf_{\pi^{-3} < \delta < 1} \frac{A^2 \beta^3}{(1 - \delta)^{3/2}} \left[\frac{2.22}{\delta^{1/3} \sqrt{1 - \gamma}} + \frac{9.43}{\sqrt{n}(1 - \delta)^{3/2}} \right] \times \left(1 - \frac{(1 - \delta)^3}{12\pi^2 A^2 \beta^6} \right)^{\gamma n}, \quad (4)$$

* Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, факультет вычислительной математики и кибернетики, Воробьевы горы, 119899 Москва, Россия.

а для случая симметричных слагаемых также и оценку величины $x^2 \Delta(x)$, имеющую структуру, аналогичную оценке (2). Несложно видеть, что, полагая $\gamma = \frac{1}{2}$, $\delta = 0.05$, для величины $\Delta_n^{(2)}(A, \beta)$ можно легко получить оценку

$$\Delta_n^{(2)}(A, \beta) \leq 16.99 A^2 \beta^3 \left(1 - \frac{1}{14\pi^2 A^2 \beta^6}\right)^{n/2}.$$

Цель данной работы — продолжая исследования, начатые в работе [9], для случая не обязательно симметричных слагаемых получить неравномерную оценку для $\Delta(x)$, имеющую традиционный порядок убывания по x , со структурой, сходной с оценкой (2). Тем самым мы довольно существенно уточним оценку (1), показав, что на самом деле те члены мажоранты, которые зависят от A , убывают по n по крайней мере экспоненциально быстро. Это хорошо согласуется с упомянутым выше критерием сходимости плотностей нормированных сумм к нормальной плотности. Далее, часть предлагаемой в данной статье мажоранты для величины $|x|^3 \Delta(x)$, не зависящая от A , разбивается на два слагаемых: одно из них имеет вид $\text{const } \beta^3 n^{-1/2}$, привычный для оценок скорости сходимости в интегральной центральной предельной теореме, второе же имеет более высокий порядок по β , но по n убывает существенно быстрее. Мы приводим явные значения абсолютных постоянных, входящих в оценки, указываем асимптотические верхние оценки для констант и уточняем оценки для величины

$$\|p_n(x) - \varphi(x)\|_p = \left(\int_{-\infty}^{\infty} |p_n(x) - \varphi(x)|^p dx \right)^{1/p},$$

полученные в статье [9]. Последний результат полезен для построения оценок скорости сходимости в центральной предельной теореме в метрике полной вариации.

2. Основные результаты.

Теорема 1. При всех $n \geq 8\beta^6$ в сделанных выше предположениях для любого $x \in \mathbb{R}$ справедливо неравенство

$$|x|^3 \Delta(x) \leq 30.7536 \frac{\beta^3}{\sqrt{n}} + \Delta_n^{(5)}(\beta) + \Delta_n^{(6)}(A, \beta), \quad (5)$$

где

$$\begin{aligned} \Delta_n^{(5)}(\beta) &= 37.2623 \frac{\beta^3}{n^{5/6}} + \beta \varphi\left(\sqrt{\frac{2}{3}} \frac{n^{1/6}}{\beta}\right) \\ &\quad \times \left[1.7867n^{4/3} + 5.4876n^{1/3} + 3.9895 + 1.3679\beta^3 n^{-2/3}\right], \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \Delta_n^{(6)}(A, \beta) &= \inf_{0 < \gamma < 1} \inf_{\pi^{-3} < \delta < 1} \frac{A^4 \beta^9}{(1-\gamma)(1-\delta)^6} \left[795 + \frac{211A}{(1-\gamma)\delta^{4/3}}\right] \\ &\quad \times \left(1 - \frac{(1-\delta)^3}{12\pi^2 A^2 \beta^6}\right)^{\gamma n}. \end{aligned} \quad (7)$$

З а м е ч а н и е 1. Очевидно, что $\Delta_n^{(5)}(\beta) = o(n^{-1/2})$, $\Delta_n^{(6)}(A, \beta) = o(n^{-\nu})$, каким бы ни было $\nu > 0$. Более того, полагая $\gamma = \frac{1}{2}$, $\delta = 0.05$, легко получить оценку

$$\Delta_n^{(6)} \leq 2.7208 A^4 \beta^9 (795 + 22910A) \left(1 - \frac{1}{14\pi^2 A^2 \beta^6}\right)^{n/2}.$$

Наличие в выражении (7) свободных параметров γ и δ позволяет путем численной оптимизации получать конкретные значения мажоранты при данных A , β^3 и n . Тем не менее, кратко остановимся на аналитической оценке «оптимальных» значений параметров γ и δ . Определяющую роль при изучении порядка величины $\Delta_n^{(6)}$ играет параметр γ . Поэтому, реализуя минимаксный подход, вначале мы будем искать минимум по γ супремума по n выражения под знаками инфимумов в формуле (7) при

фиксированном значении δ . Очевидно, что при $n \geq 8\beta^6$

$$\begin{aligned} & \frac{A^4 \beta^9}{(1-\gamma)(1-\delta)^6} \left[795 + \frac{211A}{(1-\gamma)\delta^{4/3}} \right] \left(1 - \frac{(1-\delta)^3}{12\pi^2 A^2 \beta^6} \right)^{\gamma n} \\ & \leq \frac{A^4 \beta^9}{(1-\delta)^6} \left[795 + \frac{211A}{\delta^{4/3}} \right] \left(1 - \frac{(1-\delta)^3}{12\pi^2 A^2 \beta^6} \right)^{8\beta^6 \gamma} (1-\gamma)^{-2}. \end{aligned}$$

Легко убедиться, что минимум правой части этого неравенства по γ достигается при

$$\gamma = \gamma(A, \beta^3, \delta) = 1 - \left[4\beta^6 \left| \ln \left(1 - \frac{(1-\delta)^3}{12\pi^2 A^2 \beta^6} \right) \right| \right]^{-1}.$$

Теперь ясно, что $\sup_{\pi^{-3} < \delta < 1} \gamma(A, \beta^3, \delta) = \gamma(A, \beta^3, \pi^{-3})$.

Доказательство теоремы 1 мы предварим одним вспомогательным утверждением.

Лемма 1. Для любого $n \geq 8\beta^6$ в интервале $|t| \leq n^{1/6}/\beta$ верно неравенство

$$\begin{aligned} & \left| f_n'''(t) - (3t - t^3) e^{-t^2/2} \right| \\ & \leq \frac{\beta^3}{\sqrt{n}} \left[0.36(t^6 + 3t^4) \exp\{-0.3779 t^2\} + (3.429 t^4 + 10.7775 t^2 + 6.5559) e^{-t^2/3} \right] \\ & + \frac{\beta^3}{n^{5/6}} (1.7145 t^4 + 15.1566 t^2 + 41.9552) e^{-t^2/3}. \end{aligned}$$

Доказательство. Всюду далее х.ф. с.в. X_1 будет обозначаться $f(t)$. Так как $EX_1 = 0$, $DX_1 = 1$, $|t| \leq n^{1/6}/\beta$, $\beta \geq 1$ и $n \geq 8$, то

$$\left| f\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) - 1 \right| \leq \frac{t^2}{2n} \leq \frac{1}{2n^{2/3}} < 0.1251, \quad \left| f\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) \right| > 0.8749. \quad (8)$$

Поэтому при указанных t определена функция $h(t) = t^2/2 + n \ln f(t/\sqrt{n})$. Используя представление $f^{(n)}(t) = i^n \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} x^n p(x) dx$ и хорошо известное неравенство (см., например, [7, с. 576]), имеем

$$\begin{aligned} |f'(t) - f'(0) - tf''(0)| & \leq \left| \int_{-\infty}^{\infty} ix (e^{itx} - 1 - itx) p(x) dx \right| \\ & \leq \int_{-\infty}^{\infty} |x| |e^{itx} - 1 - itx| p(x) dx \leq \int_{-\infty}^{\infty} |x| \frac{|tx|^2}{2} p(x) dx \leq \beta^3 \frac{t^2}{2}. \end{aligned}$$

Таким образом, производную х.ф. f мы можем представить в следующем виде:

$$f'\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) = -\frac{t}{\sqrt{n}} + \frac{t^2}{2n} \varepsilon_1\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right),$$

где $|\varepsilon_1(t)| \leq \beta^3$. Аналогично можно показать, что вторая производная функции f допускает разложение:

$$f''\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) = -1 + \frac{t}{\sqrt{n}} \varepsilon_2\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right),$$

где также $|\varepsilon_2(t)| \leq \beta^3$. Используя эти выражения, мы получаем

$$h'(t) = t + \sqrt{n} \frac{f'(t/\sqrt{n})}{f(t/\sqrt{n})} = \frac{\sqrt{n}}{f(t/\sqrt{n})} \left[\frac{t}{\sqrt{n}} \left(f\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) - 1 \right) + \frac{t^2}{n} \varepsilon_1\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) \right], \quad (9)$$

$$\begin{aligned} h''(t) &= 1 + \frac{f''(t/\sqrt{n})}{f(t/\sqrt{n})} - \left[\frac{f'(t/\sqrt{n})}{f(t/\sqrt{n})} \right]^2 = \left(f\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) \right)^{-1} \left[f\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) - 1 + \frac{t}{\sqrt{n}} \varepsilon_2\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) \right] \\ &\quad - \left(f\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) \right)^{-2} \left[\frac{t^2}{n} + \frac{t^4}{4n^2} \left(\varepsilon_1\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) \right)^2 - \frac{t^3}{n^{3/2}} \varepsilon_2\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) \right], \quad (10) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
h'''(t) &= \frac{1}{\sqrt{n}} \left[\frac{f'''(t/\sqrt{n})}{f(t/\sqrt{n})} - 3 \frac{f'(t/\sqrt{n})f''(t/\sqrt{n})}{(f(t/\sqrt{n}))^2} + 2 \left(\frac{f'(t/\sqrt{n})}{f(t/\sqrt{n})} \right)^3 \right] \\
&= \frac{f'''(t/\sqrt{n})}{\sqrt{n}f(t/\sqrt{n})} - \frac{3}{\sqrt{n}(f(t/\sqrt{n}))^2} \\
&\quad \times \left[-\frac{t}{\sqrt{n}} - \frac{t^2}{2n} \varepsilon_1 \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right) + \frac{t^2}{n} \varepsilon_2 \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right) + \frac{t^3}{2n^{3/2}} \varepsilon_1 \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right) \varepsilon_2 \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right) \right] \\
&\quad + \frac{2}{\sqrt{n}(f(t/\sqrt{n}))^3} \left[-\frac{t^3}{n^{3/2}} + 3 \frac{t^4}{2n^2} \varepsilon_1 \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right) + 3 \frac{t^5}{4n^{5/2}} \left(\varepsilon_1 \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right) \right)^2 \right. \\
&\quad \left. + \frac{t^6}{8n^3} \left(\varepsilon_1 \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right) \right)^3 \right]. \quad (11)
\end{aligned}$$

Используя (8) и неравенство $|f^{(k)}(t)| \leq E|X_1|^k$, справедливое для всех t , из представления (9) мы получаем

$$|h'(t)| \leq \left| f \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right) \right|^{-1} \left[|t| \left| f \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right) - 1 \right| + \frac{t^2}{\sqrt{n}} \left| \varepsilon_1 \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right) \right| \right] \leq 1.143 \left[\frac{t^4}{2n} + \frac{t^2}{\sqrt{n}} \beta^3 \right].$$

Поэтому, так как $\beta^3 \geq 1$ и $|t| \leq n^{1/6}/\beta$, то

$$|h'(t)| \leq 1.143 \frac{\beta^3}{\sqrt{n}} t^2 + 0.5715 \frac{\beta^3}{n^{5/6}} t^2. \quad (12)$$

Аналогичным способом из (10)–(11) мы получаем

$$|h''(t)| \leq 1.143 \frac{\beta^3}{\sqrt{n}} |t| + 2.8579 \frac{\beta^3}{n^{5/6}} |t|, \quad (13)$$

$$|h'''(t)| \leq 1.143 \frac{\beta^3}{\sqrt{n}} + 21.8387 \frac{\beta^3}{n^{5/6}}. \quad (14)$$

Далее, используя те же методы, из (12) и (13) получим оценки для произведений производных функции $h(t)$. Находим

$$|h'(t)|^2 \leq 1.3065 \frac{\beta^3}{\sqrt{n}} |t| + 1.6332 \frac{\beta^3}{n^{5/6}} |t|, \quad (15)$$

$$|h'(t)|^3 \leq 1.4934 \frac{\beta^3}{\sqrt{n}} + 3.5469 \frac{\beta^3}{n^{5/6}}, \quad (16)$$

$$|h'(t)h''(t)| \leq 1.3065 \frac{\beta^3}{\sqrt{n}} + 5.5532 \frac{\beta^3}{n^{5/6}}. \quad (17)$$

Из теоремы 8.9 в книге [5] вытекает, что

$$|\exp\{h(t)\}| = e^{t^2/2} |f(t/\sqrt{n})|^n \leq e^{t^2/2} e^{-t^2/3} = e^{t^2/6}. \quad (18)$$

Из теоремы 8.4 в книге [5] вытекает, что

$$|\exp\{h(t)\} - 1| = e^{t^2/2} |f_n(t) - e^{-t^2/2}| \leq 0.36 e^{t^2/2} \frac{\beta^3}{\sqrt{n}} |t|^3 \exp\{-0.3779 t^2\}. \quad (19)$$

Таким образом, собирая оценки (12)–(19), мы получаем

$$\begin{aligned}
|f_n'''(t) - (3t - t^3)e^{-t^2/2}| &= \left| (f_n(t) - e^{-t^2/2})''' \right| \\
&\leq \frac{\beta^3}{\sqrt{n}} \left[0.36(t^6 + 3t^4) \exp\{-0.3779 t^2\} + (3.429 t^4 + 10.7775 t^2 + 6.5559) e^{-t^2/3} \right] \\
&\quad + \frac{\beta^3}{n^{5/6}} (1.7145 t^4 + 15.1566 t^2 + 41.9552) e^{-t^2/3}.
\end{aligned}$$

Лемма доказана.

Доказательство теоремы 1. Продифференцируем трижды х.ф. $f_n(t)$:

$$\begin{aligned} f_n'''(t) &= \frac{(n-1)(n-2)}{\sqrt{n}} f_n^{n-3} \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right) \left(f' \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right) \right)^3 + \\ &+ 3 \frac{(n-1)}{\sqrt{n}} f_n^{n-2} \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right) f' \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right) f'' \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right) \\ &+ \frac{1}{\sqrt{n}} f_n^{n-1} \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right) f''' \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right). \end{aligned} \quad (20)$$

Воспользовавшись оценкой $|f^{(k)}(t)| \leq \mathbf{E}|X_1|^k$, которая верна для любого t , легко получить неравенство $|f_n'''(t)| \leq (n^2 \beta^3 / \sqrt{n}) |f_n^{n-3}(t/\sqrt{n})|$. Поэтому при любом $n \geq 5$ по формуле Планшереля мы имеем

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f_n'''(t)| dt \leq (n^2 \beta^3) \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = 2\pi n^2 \beta^3 \int_{-\infty}^{\infty} p^2(x) dx \leq 2\pi n^2 \beta^3 A < \infty.$$

Следовательно, при указанных n существует конечный интеграл от функции $f_n'''(t)$, и по формуле обращения преобразования Фурье мы имеем

$$\begin{aligned} 2\pi(ix)^3 p_n(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx} f_n'''(t) dt, \\ 2\pi(ix)^3 \varphi(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} (3t - t^3) \exp \left\{ -itx - \frac{t^2}{2} \right\} dt. \end{aligned}$$

Таким образом, при $n \geq 8\beta^6$ с учетом неравенства $n^{1/6}/\beta \leq \sqrt{n}/2\beta^3$ мы получаем

$$\begin{aligned} 2\pi|x|^3 |p_n(x) - \varphi(x)| &\leq \int_{-\infty}^{\infty} |f_n'''(t) - (3t - t^3) e^{-t^2/2}| dt \\ &\leq \int_{|t| \leq n^{1/6}/\beta} |f_n'''(t) - (3t - t^3) e^{-t^2/2}| dt \\ &+ \int_{n^{1/6}/\beta < |t| \leq \sqrt{n}/(2\beta^3)} |f_n'''(t)| dt + \int_{|t| > \sqrt{n}/(2\beta^3)} |f_n'''(t)| dt \\ &+ \int_{|t| > n^{1/6}/\beta} (|t|^3 + 3|t|) e^{-t^2/2} dt \equiv I_1 + I_2 + I_3 + I_4. \end{aligned}$$

С помощью леммы 1 мы легко получаем следующую оценку для интеграла I_1 :

$$\begin{aligned} I_1 &\leq 0.36 \frac{\beta^3}{\sqrt{n}} \int_{-\infty}^{\infty} (t^6 + 3t^4) \exp\{-0.3779 t^2\} dt \\ &+ \frac{\beta^3}{\sqrt{n}} \int_{-\infty}^{\infty} (3.429 t^4 + 10.7775 t^2 + 6.5559) e^{-t^2/3} dt \\ &+ \frac{\beta^3}{n^{5/6}} \int_{-\infty}^{\infty} (1.7145 t^4 + 15.1566 t^2 + 41.9552) e^{-t^2/3} dt \\ &\leq 193.2302 \frac{\beta^3}{\sqrt{n}} + 234.1259 \frac{\beta^3}{n^{5/6}}. \end{aligned} \quad (21)$$

Рассмотрим I_2 . С помощью (20) имеем

$$|f_n'''(t)| \leq \frac{|f_n(t)|}{\sqrt{n}} \left(\frac{(n-1)(n-2)}{|f(t/\sqrt{n})|^3} + \frac{3(n-1)}{|f(t/\sqrt{n})|^2} + \frac{\beta^3}{|f(t/\sqrt{n})|} \right). \quad (22)$$

Так как $|t| \leq \sqrt{n}/(2\beta^3)$, а следовательно, и $|t| \leq \sqrt{n}/2$, мы получаем

$$\left| f \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right) - 1 \right| \leq \frac{t^2}{2n} \leq \frac{1}{8}, \quad \left| f \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right) \right| \geq \frac{7}{8}. \quad (23)$$

Из теоремы 8.9 в книге [5] следует, для любого $|t| \leq \sqrt{n}/2\beta^3$ имеет место оценка $|f_n(t)| \leq e^{-t^2/3}$. Поэтому, применяя неравенства (22) и (23), для интеграла I_2 мы получаем оценку

$$\begin{aligned} I_2 &\leq \left[\frac{512}{343} \frac{(n-1)(n-2)}{\sqrt{n}} + \frac{192}{49} \frac{(n-1)}{\sqrt{n}} + \frac{8}{7} \frac{\beta^3}{\sqrt{n}} \right] \int_{n^{1/6}/\beta < |t| \leq \sqrt{n}/(2\beta^3)} e^{-t^2/3} dt \\ &\leq 3\sqrt{2\pi} \frac{\beta}{n^{1/6}} \varphi \left(\sqrt{\frac{2}{3}} \frac{n^{1/6}}{\beta} \right) \left(1.4928 n^{3/2} + 3.9184 n^{1/2} + 1.1429 \frac{\beta^3}{\sqrt{n}} \right) \\ &\leq \beta \varphi \left(\sqrt{\frac{2}{3}} \frac{n^{1/6}}{\beta} \right) \left(11.2257 n^{4/3} + 29.466 n^{1/3} + 8.5945 \beta^3 n^{-2/3} \right). \end{aligned} \quad (24)$$

В работах Н. Г. Ушакова [6], [8] приведена теорема, из которой следует, что для х.ф. $f(t)$ при условиях существования третьего момента и ограниченной плотности для любого $\delta \in (0, 1)$ справедливы неравенства

$$|f(t)| \leq 1 - \frac{(1-\delta)^3 t^2}{3\pi^2 A^2}, \quad |t| \leq \frac{\pi \delta^{1/3}}{2\beta}; \quad (25)$$

$$|f(t)| \leq 1 - \frac{(1-\delta)^3 \delta^{2/3}}{12A^2 \beta^2}, \quad |t| > \frac{\pi \delta^{1/3}}{2\beta}. \quad (26)$$

Заметим, что при любом $\delta \in (\pi^{-3}, 1)$, используя равенство (20), интеграл I_3 можно оценить следующим образом:

$$\begin{aligned} I_3 &\leq \int_{1/(2\beta^3) < |t| \leq \pi \delta^{1/3}/(2\beta)} \left[n^2 |f(t)|^{n-3} + \beta^3 |f(t)|^{n-1} \right] dt \\ &\quad + \beta^3 n^2 \int_{|t| > \pi \delta^{1/3}/(2\beta)} |f(t)|^{n-3} dt \equiv I_{31} + I_{32}. \end{aligned}$$

Воспользовавшись неравенством (25), получим

$$\begin{aligned} I_{31} &\leq 2\beta^3 \int_{1/(2\beta^3) < |t| \leq \pi \delta^{1/3}/(2\beta)} |t| \\ &\quad \times \left[n^2 \left(1 - \frac{(1-\delta)^3 t^2}{3\pi^2 A^2} \right)^{n-3} + \beta^3 \left(1 - \frac{(1-\delta)^3 t^2}{3\pi^2 A^2} \right)^{n-1} \right] dt \\ &\leq 2\beta^3 \int_{1/(4\beta^6) < u \leq \pi^2 \delta^{2/3}/(4\beta^2)} \left[n^2 \left(1 - \frac{(1-\delta)^3 u}{3\pi^2 A^2} \right)^{n-3} + \beta^3 \left(1 - \frac{(1-\delta)^3 u}{3\pi^2 A^2} \right)^{n-1} \right] du \\ &= \frac{6A^2 \pi^2 \beta^3}{(1-\delta)^3} \int_0^{1-(1-\delta)^3/(12A^2 \pi^2 \beta^6)} [n^2 z^{n-3} + \beta^3 z^{n-1}] dz \\ &\leq \frac{6A^2 \pi^2 \beta^3}{(1-\delta)^3} \left[1.34 n q_1^{n-2} + \frac{\beta^3}{n} q_1^n \right], \end{aligned} \quad (27)$$

где $q_1 = 1 - (1-\delta)^3/(12\pi^2 A^2 \beta^6)$. Для любого n при произвольном $q \in (0, 1)$ число

$$M = \sup_{x \geq 0} x^\alpha q^{x(1-\gamma)} \geq \sup_{n \geq 1} n^\alpha q^{n(1-\gamma)}$$

гарантирует выполнение соотношения $n^\alpha q^n \leq M q^n$ для любых $\alpha > 0$ и $\gamma \in (0, 1)$. Элементарными вычислениями находим $M = [\alpha/(e(1-\gamma) |\ln q|)]^\alpha \leq [\alpha/(e(1-\gamma) \times (1-q))]^\alpha$. Далее, несложно видеть, что $q_1^{-1} \leq 1.1128$. Следовательно, полагая $\alpha = 1$ и $q = q_1$, из (27) мы получаем неравенство

$$\begin{aligned} I_{31} &\leq \frac{6A^2 \pi^2 \beta^3}{(1-\delta)^3} \left[\frac{7.3254 \pi^2 A^2 \beta^6}{(1-\gamma)(1-\delta)^3} q_1^n + \frac{1.22 \pi^2 A^2 \beta^6}{(1-\gamma)(1-\delta)^3} q_1^n \right] \\ &\leq 4995 \frac{A^4 \beta^9}{(1-\gamma)(1-\delta)^6} q_1^n. \end{aligned} \quad (28)$$

В то же время, положив $q_2 = 1 - (1 - \delta)^3 \delta^{2/3} / (12A^2 \beta^2)$ и используя неравенство (26) и формулу Планшереля, мы будем иметь

$$\begin{aligned} I_{32} &= \beta^3 n^2 \int_{|t| > \pi \delta^{1/3} / (2\beta)} |f(t)|^2 |f(t)|^{n-5} dt \\ &\leq 2\pi \beta^3 n^2 q_2^{n-5} \int_{-\infty}^{\infty} |p(x)|^2 dx \leq 2\pi A \beta^3 n^2 q_2^{n-5}. \end{aligned}$$

Можно показать, что $q_2^{-1} \leq 1.22$. Используя определение числа M с $\alpha = 2$, получаем

$$\begin{aligned} I_{32} &\leq 2(1.22)^5 \pi A \beta^3 \left(\frac{24A^2 \beta^2}{e(1-\gamma)(1-\delta)^3 \delta^{2/3}} \right)^2 q_2^{\gamma n} \\ &\leq 1324 \frac{A^5 \beta^7}{(1-\gamma)^2 (1-\delta)^6 \delta^{4/3}} q_2^{\gamma n}. \end{aligned} \quad (29)$$

Заметим, что в наших условиях $\delta \in (\pi^{-3}, 1)$, а в данном интервале верно неравенство $q_2 \leq q_1$. С учетом данного замечания, объединив оценки (28) и (29), получим

$$I_3 \leq \frac{A^4 \beta^9}{(1-\gamma)(1-\delta)^6} \left[4995 + 1324 \frac{A}{(1-\gamma) \delta^{4/3}} \right] \left(1 - \frac{(1-\delta)^3}{12\pi^2 A^2 \beta^6} \right)^{\gamma n}. \quad (30)$$

Рассмотрим I_4 . Имеем

$$I_4 \leq \int_{|t| > n^{1/6} / \beta} t^3 e^{-t^2/2} dt + 3 \int_{|t| > n^{1/6} / \beta} t e^{-t^2/2} dt \equiv I_{41} + I_{42}.$$

При этом $I_{41} = 10.0266 \varphi(n^{1/6} / \beta) (n^{1/3} / 2 + 1)$, $I_{42} \leq 15.0399 \varphi(n^{1/6} / \beta)$. Таким образом, получаем

$$\begin{aligned} I_4 &\leq \varphi\left(\frac{n^{1/6}}{\beta}\right) (5.0133 n^{1/3} + 25.0665) \\ &\leq \beta \varphi\left(\sqrt{\frac{2}{3}} \frac{n^{1/6}}{\beta}\right) (5.0133 n^{1/3} + 25.0665). \end{aligned} \quad (31)$$

Суммируя оценки (21), (24), (30) и (31), получаем требуемое утверждение.

Из теоремы 1 вытекает следующая асимптотическая оценка абсолютной константы в неравномерной оценке скорости сходимости в локальной предельной теореме для плотностей.

Следствие 1. В условиях теоремы 1 при всех $x \in \mathbb{R}$

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n}}{\beta^3} |x|^3 \Delta(x) \leq 30.7536. \quad (32)$$

В работе [9] была получена аналогичная оценка абсолютной константы в равномерной оценке скорости сходимости. В сделанных нами предположениях верно неравенство

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n}}{\beta^3} \sup_x |p_n(x) - \varphi(x)| \leq 0.4013. \quad (33)$$

Заметим, что абсолютные константы в оценках (32) и (33) и аналогичные величины в интегральной центральной предельной теореме довольно мало отличаются друг от друга.

Далее, с помощью рассуждений, аналогичных тем, что использовались при доказательстве теоремы 1, мы можем получить неравномерную оценку порядка $|x|$, по структуре аналогичную неравенству (5), но с меньшей константой, что позволяет надеяться на улучшение оценки при умеренных значениях $|x|$ за счет меньшей константы.

Теорема 2. В условиях теоремы 1 имеет место неравенство

$$|x| \Delta(x) \leq 1.7054 \frac{\beta^3}{\sqrt{n}} + \Delta_n^{(7)}(\beta) + \Delta_n^{(8)}(A, \beta), \quad (34)$$

где

$$\Delta_n^{(7)}(\beta) = 0.4189 \frac{\beta^3}{n^{5/6}} + \beta \varphi \left(\sqrt{\frac{2}{3}} \frac{n^{1/6}}{\beta} \right) (1.3679 n^{1/3} + 0.7979),$$

$$\Delta_n^{(8)}(A, \beta) = \inf_{0 < \gamma < 1} \inf_{\pi^{-3} < \delta < 1} \frac{A^2 \beta^3}{(1 - \delta)^3} \left[10 + 9 \frac{A}{(1 - \gamma) \delta^{2/3}} \right] \left(1 - \frac{(1 - \delta)^3}{12 \pi^2 A^2 \beta^6} \right)^{\gamma n}.$$

С помощью леммы 1 можно показать, что оценка для величины $x^2 \Delta(x)$, полученная в работе [9] для симметричных слагаемых, остается верной и для общего случая. Поэтому, используя эту оценку, а также неравенства (2) и (5), мы можем уточнить оценку для $\|p_n(x) - \varphi(x)\|_p$, полученную в [9].

Теорема 3. В условиях теоремы 1 при $p \geq 1$ справедлива оценка

$$\begin{aligned} \|p_n(x) - \varphi(x)\|_p \leq C_1(p) \frac{\beta^3}{\sqrt{n}} + C_2(p) [\Delta_n^{(1)}(\beta) + \Delta_n^{(2)}(A, \beta)] \\ + C_3(p) [\Delta_n^{(3)}(\beta) + \Delta_n^{(4)}(A, \beta)] + C_4(p) [\Delta_n^{(5)}(\beta) + \Delta_n^{(6)}(A, \beta)], \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \Delta_n^{(3)}(\beta) &= 3.7817 \frac{\beta^3}{n^{5/6}} + \beta \varphi \left(\sqrt{\frac{2}{3}} \frac{n^{1/6}}{\beta} \right) (1.5633 n^{5/6} + 0.7979 n^{1/6} + 3.7617 n^{-1/6}), \\ \Delta_n^{(4)}(A, \beta) &= \inf_{0 < \gamma < 1} \inf_{\pi^{-3} < \delta < 1} \frac{A^3 \beta^3}{\sqrt{1 - \gamma} (1 - \delta)^{9/2}} \left[79 \beta^3 + 38 \frac{A}{\delta (1 - \gamma)} \right] \\ &\quad \times \left(1 - \frac{(1 - \delta)^3}{12 \pi^2 A^2 \beta^6} \right)^{\gamma n}, \\ C_1(p) &= \left(0.4013^p \frac{16.6686p}{2p - 1} - 2 \cdot 0.2265^{3p-1} \frac{p}{6p^2 - 5p + 1} \right)^{1/p}, \\ C_2(p) &= 8.3343^{1/p}, \quad C_3(p) = \left(\frac{0.0576^{p-1/2}}{2p - 1} - \frac{0.2265^{2p-1}}{2p - 1} \right)^{1/p}, \\ C_4(p) &= \left(\frac{0.2265^{3p-1}}{3p - 1} \right)^{\frac{1}{p}}. \end{aligned} \tag{35}$$

Наконец, из теоремы 3 мы получаем следующую асимптотическую оценку константы в оценке скорости сходимости в локальной центральной предельной теореме для плотностей в терминах метрики L_p .

Следствие 2. В условиях теоремы 3 при всех $x \in \mathbb{R}$

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n}}{\beta^3} \|p_n(x) - \varphi(x)\|_p \leq C_1(p),$$

где $C_1(p)$ определено в (35).

В частности,

$$C_1(1) \leq 6.6378, \quad C_1(2) \leq 1.3377, \quad C_1(3) \leq 0.8647.$$

В заключение автор выражает признательность Ю. В. Прохорову, внимательно прочитавшему первоначальный вариант рукописи и указавшему на некоторые неточности, а также В. Ю. Королеву за постоянное внимание к работе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Сираждинов С. Х., Шатайдарова Н. О равномерной локальной теореме для плотностей. — Изв. АН УзССР, сер. физ.-матем., 1965, № 6, с. 30–36.
2. Шатайдарова Н. Равномерные локальные и глобальные теоремы для плотностей. — Изв. АН УзССР, сер. физ.-матем., 1966, № 5, с. 90–91.
3. Петров В. В. Суммы независимых случайных величин. М.: Наука, 1972, 416 с.

4. Прохоров Ю. В. Об одной локальной теореме. — В сб.: Предельные теоремы теории вероятностей. Ташкент: Изд-во АН УзССР, 1963, с. 75–80.
5. Бхаттачария Р. Н., Ранга Рао Р. Аппроксимация нормальным распределением и асимптотические разложения. М.: Наука, 1982, 286 с.
6. Ушаков Н. Г. Неравенства для характеристических функций. — В сб.: Методы решения задач математической физики и их программное обеспечение. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1984, с. 50–53.
7. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Т. 2. М.: Мир, 1984, 752 с.
8. Ushakov N. G. Lower and upper bounds for characteristic functions. — J. Math. Sci., 1997, v. 84, № 3, p. 1179–1189.
9. Korolev V. Yu., Zhukov Yu. V. On the rate of convergence in the local limit theorem for densities. — J. Math. Sci., 1998, v. 91, № 3, p. 2931–2941.

Поступила в редакцию
19.I.1998

© 1999 г.

ЗУБКОВ А. М.*

ИЗОМОРФИЗМЫ МЕЖДУ МНОЖЕСТВАМИ ВЕРОЯТНОСТНЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ¹⁾

Указаны способы построения изоморфизмов между полугруппами вероятностных распределений (со сверткой как полугрупповой операцией), в частности, между множеством всех вероятностных распределений на неотрицательной полуоси и некоторой совокупностью распределений на множестве неотрицательных целых чисел. Аналогичные изоморфизмы указаны для векторного случая и для множеств распределений, соответствующих неубывающим процессам с независимыми приращениями.

Ключевые слова и фразы: полугруппы вероятностных распределений, неотрицательные случайные величины, изоморфизмы между множествами распределений.

В настоящей работе используется следующее соображение. Пусть P — семейство всех вероятностных распределений на $\mathbf{R}_+ = [0, \infty)$. Обозначим через δ_x распределение, сосредоточенное в точке $x \in \mathbf{R}_+$, и через $D = \{\delta_x, x \in \mathbf{R}_+\}$ семейство вырожденных распределений на $\mathbf{R}_+$. Относительно операции свертки семейства P и D являются коммутативными полугруппами; более того, для однопараметрического семейства D полугрупповая структура, порожденная сверткой, согласована со структурой аддитивной полугруппы $\mathbf{R}_+$: $\delta_x * \delta_y = \delta_{x+y}$ при любых $x, y \in \mathbf{R}_+$.

Любое вероятностное распределение $F \in P$ можно представить в виде смеси распределений из семейства D :

$$F = \int_0^\infty \delta_x F(dx).$$

Пусть, далее, $B = \{B_x, x \in \mathbf{R}_+\}$ — любое семейство распределений (например, на $\mathbf{R}^d$), образующее полугруппу относительно операции свертки, причем

---

* Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, ул. Губкина, 8, 117966 Москва, ГСП-1, Россия; e-mail: zubkov@genesis.mi.ras.ru

¹⁾ Выполнение работы частично финансировалось Российским фондом фундаментальных исследований (проект 96-01-00531) и Советом по грантам Президента РФ и государственной поддержке ведущих научных школ (проект 96-15-96092).