Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. М. Зубков, Изоморфизмы между множествами вероятностных распределений, *Теория вероятн. и ее примен.*, 1999, том 44, выпуск 4, 861–865

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp1071>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.89.185.249

26 апреля 2023 г., 16:31:59

4. Прохоров Ю. В. Об одной локальной теореме. — В сб.: Предельные теоремы теории вероятностей. Ташкент: Изд-во АН УзССР, 1963, с. 75–80.
5. Бхаттачария Р. Н., Ранга Рао Р. Аппроксимация нормальным распределением и асимптотические разложения. М.: Наука, 1982, 286 с.
6. Ушаков Н. Г. Неравенства для характеристических функций. — В сб.: Методы решения задач математической физики и их программное обеспечение. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1984, с. 50–53.
7. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Т. 2. М.: Мир, 1984, 752 с.
8. Ushakov N. G. Lower and upper bounds for characteristic functions. — J. Math. Sci., 1997, v. 84, № 3, p. 1179–1189.
9. Korolev V. Yu., Zhukov Yu. V. On the rate of convergence in the local limit theorem for densities. — J. Math. Sci., 1998, v. 91, № 3, p. 2931–2941.

Поступила в редакцию
19.I.1998

© 1999 г.

ЗУБКОВ А. М.*

ИЗОМОРФИЗМЫ МЕЖДУ МНОЖЕСТВАМИ ВЕРОЯТНОСТНЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ¹⁾

Указаны способы построения изоморфизмов между полугруппами вероятностных распределений (со сверткой как полугрупповой операцией), в частности, между множеством всех вероятностных распределений на неотрицательной полуоси и некоторой совокупностью распределений на множестве неотрицательных целых чисел. Аналогичные изоморфизмы указаны для векторного случая и для множеств распределений, соответствующих неубывающим процессам с независимыми приращениями.

Ключевые слова и фразы: полугруппы вероятностных распределений, неотрицательные случайные величины, изоморфизмы между множествами распределений.

В настоящей работе используется следующее соображение. Пусть P — семейство всех вероятностных распределений на $\mathbf{R}_+ = [0, \infty)$. Обозначим через δ_x распределение, сосредоточенное в точке $x \in \mathbf{R}_+$, и через $D = \{\delta_x, x \in \mathbf{R}_+\}$ семейство вырожденных распределений на $\mathbf{R}_+$. Относительно операции свертки семейства P и D являются коммутативными полугруппами; более того, для однопараметрического семейства D полугрупповая структура, порожденная сверткой, согласована со структурой аддитивной полугруппы $\mathbf{R}_+$: $\delta_x * \delta_y = \delta_{x+y}$ при любых $x, y \in \mathbf{R}_+$.

Любое вероятностное распределение $F \in P$ можно представить в виде смеси распределений из семейства D :

$$F = \int_0^\infty \delta_x F(dx).$$

Пусть, далее, $B = \{B_x, x \in \mathbf{R}_+\}$ — любое семейство распределений (например, на $\mathbf{R}^d$), образующее полугруппу относительно операции свертки, причем

* Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, ул. Губкина, 8, 117966 Москва, ГСП-1, Россия; e-mail: zubkov@genesis.mi.ras.ru

¹⁾ Выполнение работы частично финансировалось Российским фондом фундаментальных исследований (проект 96-01-00531) и Советом по грантам Президента РФ и государственной поддержке ведущих научных школ (проект 96-15-96092).

$B_x * B_y = B_{x+y}$ при любых $x, y \in \mathbf{R}_+$. Такая полугруппа соответствует совокупности распределений случайного однородного по времени процесса $\beta(x)$, $x \in \mathbf{R}_+$, с независимыми приращениями; семейство D соответствует детерминированному процессу $\beta(x) \equiv x$. Отображение Π_B , переводящее распределение $F \in P$ в распределение

$$\Pi_B F = \int_0^\infty B_x F d(x) \quad (1)$$

значения $\beta(\tau)$ (где τ — случайная величина с распределением F , не зависящая от процесса β), обладает следующим свойством: для любых распределений $F, G \in P$ (отождествляемых с соответствующими функциями распределения)

$$\begin{aligned} \Pi_B(F * G) &= \int_0^\infty B_x d(F * G)(x) = \int_0^\infty B_x d\left(\int_0^x F(x-y) dG(y)\right) \\ &= \int_0^\infty \int_0^x B_{x-y} * B_x dF(x-y) dG(y) = \int_0^\infty \int_0^\infty B_x * B_y dF(x) dG(y) \\ &= \int_0^\infty B_x dF(x) * \int_0^\infty B_y dG(y) = \Pi_B F * \Pi_B G. \end{aligned} \quad (2)$$

Таким образом, $\Pi_B P$ — полугруппа и отображение Π_B является гомоморфизмом полугрупп Π и $\Pi_B P$.

Формула (2) эквивалентна очевидному утверждению: если τ и η — независимые случайные величины, не зависящие от однородного процесса с независимыми приращениями β , то распределения $\beta(\tau + \eta)$ и $\beta(\tau) + \beta(\eta)$ совпадают. В случае, когда B — полугруппа распределений на множестве целых чисел (она соответствует распределениям сложного пуассоновского процесса, см. [1]–[3]), отображение Π_B является гомоморфизмом между множеством P всех вероятностных распределений на $\mathbf{R}_+$ и множеством $\Pi_B P$ распределений на множестве целых чисел. Мы покажем, что во многих случаях такое отображение Π_B оказывается не только гомоморфизмом, но и изоморфизмом, откуда следует, в частности, что множество всех распределений на $\mathbf{R}_+$ эквивалентно множеству, состоящему из распределений на множестве целых неотрицательных чисел.

Теорема 1. Пусть $B = \{B_x, x \in \mathbf{R}_+\}$ — семейство распределений однородного случайного процесса $\beta(x)$ с независимыми приращениями, $P\{\beta(0) = 0\} = 1$, причем существует такое $a > 0$, что для всех $x \in \mathbf{R}_+$ преобразование Лапласа $Ee^{-z\beta(x)}$ аналитично в полосе $0 < \operatorname{Re} z < a$ и при всех $z \in (0, a)$, $x \in \mathbf{R}_+$ справедливо неравенство $0 < Ee^{-z\beta(x)} < 1$. Тогда определенное формулой (1) отображение Π_B является изоморфизмом между полугруппой P всех распределений на $\mathbf{R}_+$ и ее образом — полугруппой $\Pi_B P$, и непрерывно относительно слабой сходимости распределений.

Доказательство. В силу (2) $\Pi_B P$ является полугруппой, а отображение Π_B — гомоморфизмом полугрупп. Докажем взаимную однозначность отображения Π_B .

Пусть γ — неотрицательная случайная величина с распределением $F \in P$; ее преобразование Лапласа $f_\gamma(z) = Ee^{-z\gamma}$ определено при $\operatorname{Re} z \geq 0$ и является в этой области аналитической функцией. В силу (1) распределение $\Pi_B F$ — это распределение случайной величины $\nu = \beta(\gamma)$, где случайная величина γ и случайный процесс $\beta(x)$ независимы. По свойству однородных процессов с независимыми приращениями $Ee^{-z\beta(x)} = (Ee^{-z\beta(1)})^x$, $x \in \mathbf{R}_+$, и, значит, при тех действительных z , при которых $0 < Ee^{-z\beta(x)} < 1$ для всех $x \geq 0$, имеет место равенство

$$Ee^{-z\nu} = Ee^{-z\beta(\gamma)} = EE\{e^{-z\beta(\gamma)} | \gamma\} = E(Ee^{-z\beta(1)})^\gamma = f_\gamma(-\ln Ee^{-z\beta(1)}). \quad (3)$$

Из условий теоремы следует, что преобразование Лапласа $Ee^{-z\nu}$ случайной величины $\nu = \beta(\gamma)$ определено в полосе вида $\operatorname{Re} z \in (0, a)$, $a > 0$, и является в ней аналитической функцией. В силу (3) значения аналитической функции $Ee^{-z\nu}$ на бесконечном множестве точек (отрезке $[0, a]$ действительной оси) функционально связаны со значениями аналитической функции $f_\gamma(z)$ на отрезке, образованном значениями

$-\ln E e^{-z\beta(1)}$, $z \in [0, a]$, и, следовательно (см. [4, с. 104]), каждая из этих функций однозначно определяет другую во всей области ее аналитичности. Отсюда и из взаимной однозначности соответствия между действительными случайными величинами и их преобразованиями Лапласа следует, что отображение Π_B взаимно однозначно.

Непрерывность отображения Π_B относительно слабой сходимости распределений следует из тождества (3) и теоремы о непрерывности соответствия между распределениями и их преобразованиями Лапласа [5, с. 486].

З а м е ч а н и е 1. Если однородный случайный процесс с независимыми приращениями $\beta(x)$ принимает только целочисленные значения, то равенство (3) можно переписать в терминах производящих функций:

$$E s^\nu = E s^{\beta(\gamma)} = E E\{s^{\beta(\gamma)} \mid \gamma\} = E(E s^{\beta(1)})^\gamma, \quad (4)$$

и при выполнении условий теоремы 1 отображение Π_B устанавливает изоморфизм между множеством распределений на $\mathbf{R}_+$ и его подмножеством, содержащимся в множестве распределений на $\mathbf{Z}_+ = \{0, 1, \dots\}$.

З а м е ч а н и е 2. Рассматривая вместо $\beta(x)$ процесс $-\beta(x)$, можно переформулировать теорему 1 для случая, когда преобразование Лапласа $E e^{-z\beta(x)}$ аналитично в полосе $-\alpha < \operatorname{Re} z < 0$.

Разумеется, вместо семейства распределений B , зависящих от параметра $x \in \mathbf{R}_+$, можно рассматривать семейства распределений, параметризованные элементами какой-нибудь другой коммутативной полугруппы G . Конструкцию, аналогичную (1), можно реализовать с помощью любого нетривиального семейства распределений $B = \{B_x, x \in G\}$ на коммутативной полугруппе H , удовлетворяющего условиям

$$B_{x+y} = B_x * B_y \quad \text{для любых } x, y \in G. \quad (5)$$

(Условие (5) может оказаться весьма ограничительным, если в полугруппе G допустимы равенства типа $x + y_1 + \dots + y_k = x$ при ненулевых $y_1, \dots, y_k$. В настоящей статье мы рассмотрим только случай, когда $G = \mathbf{R}_+^g$.)

Пусть P_G — семейство распределений случайных величин, принимающих значения в полугруппе G , и $F \in P_G$; формула

$$\Pi_B F = \int_G B_x F(dx) \quad (6)$$

определяет отображение Π_B , переводящее распределения $F \in P_G$ в распределения на H . Почти дословное повторение рассуждений, использованных в (2) (интегралы по $\mathbf{R}_+$ в (2) следует заменить интегралами по G , а интегралы от 0 до x — интегралами по множеству $\{y \in G: y - x \in G\}$), показывает, что отображение Π_B есть гомоморфизм множеств распределений на G и на H , образующих полугруппы относительно операции свертки.

При $G = \mathbf{R}_+^g$ и $H = \mathbf{R}^h$ описание общего вида семейства B , удовлетворяющего условиям (5), сводится к одномерному случаю, так как тогда $B_x = B_{x_1} e_1 * \dots * B_{x_g} e_g$ при любом $x = (x_1, \dots, x_g) \in \mathbf{R}_+^g$, где $e_1, \dots, e_g$ — единичные векторы координатных осей, а каждое семейство $\{B_x e_i, x \in \mathbf{R}_+\}$, $i = 1, \dots, g$, является семейством распределений однородного процесса с независимыми приращениями и со значениями в $\mathbf{R}^h$. Сформулируем полученное утверждение в виде леммы.

Лемма. Любое семейство распределений $B = \{B_x, x \in \mathbf{R}_+^g\}$ на $\mathbf{R}^h$, удовлетворяющее условиям $B_x * B_y = B_{x+y}$ при любых $x, y \in \mathbf{R}_+^g$, определяется g независимыми однородными процессами $\{\beta_i(t), t \geq 0\}$, $i = 1, \dots, g$, со значениями в $\mathbf{R}^h$ и с независимыми приращениями: распределение B_x , $x = (x_1, \dots, x_g)$, совпадает с распределением суммы $\beta_1(x_1) + \dots + \beta_g(x_g)$ при любых $x_1, \dots, x_g \geq 0$.

Для семейства B , удовлетворяющего условиям (5), отображение Π_B переводит распределение F вектора $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_g) \in \mathbf{R}_+^g$ в распределение случайного вектора $\beta_1(\gamma_1) + \dots + \beta_g(\gamma_g) \in \mathbf{R}^h$, и справедлив аналог теоремы 1.

Чтобы упростить доказательство, будем считать, что $g = h$.

Теорема 2. Пусть $B = \{B_x, x \in \mathbf{R}_+^g\}$ — семейство распределений на $\mathbf{R}^g$: B_x при каждом $x = (x_1, \dots, x_g) \in \mathbf{R}_+^g$ — распределение вектора $\beta_1(x_1) + \dots + \beta_g(x_g)$,

где $\beta_1(x), \dots, \beta_g(x)$ ($x \in \mathbf{R}_+$) — независимые однородные случайные процессы с независимыми приращениями и значениями в $\mathbf{R}^g$, $P\{\beta_k(0) = 0\} = 1$ ($k = 1, \dots, g$). Пусть существует такой вектор $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_g) \in \mathbf{R}^g$ с положительными координатами, что преобразования Лапласа $E \exp\{-(\mathbf{z}, \beta_k(x))\}$, $\mathbf{z} = (z_1, \dots, z_g) \in \mathbf{C}^g$, для всех $x \in \mathbf{R}_+$, $k = 1, \dots, g$ аналитичны в области

$$\times_{k=1}^g \{z_k: 0 < \operatorname{Re} z_k < a_k\} \subset \mathbf{C}^g,$$

при $\mathbf{z} \in (0, \mathbf{a}) = \times_{k=1}^g (0, a_k) \subset \mathbf{R}^g$ справедливы неравенства

$$0 < E \exp\{-(\mathbf{z}, \beta_k(x))\} < 1, \quad k = 1, \dots, g, \quad x \in \mathbf{R}_+,$$

и отображение

$$(0, \mathbf{a}) \rightarrow \mathbf{R}^g: \mathbf{z} \rightarrow (E \exp\{-(\mathbf{z}, \beta_1(1))\}, \dots, E \exp\{-(\mathbf{z}, \beta_g(1))\})$$

невырождено (взаимно однозначно) в окрестности хотя бы одной точки $\mathbf{z}^* \in (0, \mathbf{a})$. Тогда отображение Π_B , определенное формулой (6), является изоморфизмом между полугруппой P^g всех распределений на $\mathbf{R}_+^g$ и образом полугруппы P^g при отображении Π_B , непрерывным относительно слабой сходимости распределений.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Как и в теореме 1, сначала убедимся в том, что отображение Π_B взаимно однозначно.

Пусть $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_g)$ — случайный вектор с неотрицательными координатами, имеющий распределение $F_\gamma \in P^g$; его преобразование Лапласа $f_\gamma(\mathbf{z}) = E \exp\{-(\mathbf{z}, \gamma)\}$ является аналитической функцией в области $\{\mathbf{z} \in \mathbf{C}^g: \operatorname{Re} z_k \geq 0, k = 1, \dots, g\}$. В силу (6) и свойств семейства B распределение $\Pi_B F_\gamma$ — это распределение случайного вектора $\nu = \beta_1(\gamma_1) + \dots + \beta_g(\gamma_g)$, где случайный вектор γ и случайные процессы $\beta_1(x), \dots, \beta_g(x)$ со значениями в $\mathbf{R}^g$ независимы.

По свойству однородных процессов с независимыми приращениями

$$E \exp\{-(\mathbf{z}, \beta_k(x))\} = \left(E \exp\{-(\mathbf{z}, \beta_k(1))\}\right)^x, \quad x \in \mathbf{R}_+, \quad k = 1, \dots, g,$$

и так как по условию $0 < E \exp\{-(\mathbf{z}, \beta_k(x))\} < 1$ при $\mathbf{z} \in \times_{k=1}^g (0, a_k) \subset \mathbf{R}^g$, $x \in \mathbf{R}_+$, $k = 1, \dots, g$, то

$$\begin{aligned} E \exp\{-(\mathbf{z}, \nu)\} &= E E \left\{ \exp\{-(\mathbf{z}, \beta_1(\gamma_1) + \dots + \beta_g(\gamma_g))\} \mid \gamma \right\} \\ &= E \prod_{k=1}^g E \left\{ \exp\{-(\mathbf{z}, \beta_k(\gamma_k))\} \mid \gamma \right\} = E \prod_{k=1}^g \left(E \exp\{-(\mathbf{z}, \beta_k(1))\} \right)^{\gamma_k} \\ &= E \exp \left\{ - \left(\left(-\ln E \exp\{-(\mathbf{z}, \beta_1(1))\}, \dots, -\ln E \exp\{-(\mathbf{z}, \beta_g(1))\} \right), \gamma \right) \right\} \\ &= f_\gamma \left(-\ln E \exp\{-(\mathbf{z}, \beta_1(1))\}, \dots, -\ln E \exp\{-(\mathbf{z}, \beta_g(1))\} \right). \end{aligned} \quad (7)$$

Согласно условиям теоремы преобразование Лапласа $E \exp\{-(\mathbf{z}, \nu)\}$ случайной величины $\nu = \beta_1(\gamma_1) + \dots + \beta_g(\gamma_g)$ определено в области вида $\{0 < \operatorname{Re} z_k < a_k, k = 1, \dots, g\}$ и является в ней аналитической функцией. В силу (7) значения аналитической функции $E \exp\{-(\mathbf{z}, \nu)\}$ в действительной окрестности точки $\mathbf{z}^*$ функционально связаны со значениями аналитической функции $f_\gamma(\mathbf{z})$ на множестве аналогичного вида и, следовательно (см. [4, с. 286]), каждая из этих функций однозначно определяет другую во всей области ее аналитичности. Отсюда и из взаимной однозначности соответствия между случайными векторами и их преобразованиями Лапласа следует, что отображение Π_B взаимно однозначно. Непрерывность отображения Π_B следует из теоремы непрерывности для характеристических функций многомерных распределений (см., например, [3, с. 63]). Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Хинчин А. Я. Математические методы теории массового обслуживания. — Труды Матем. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР, 1955, т. 49, с. 1–122.
2. Redheffer R. M. A note on the Poisson law. — Math. Mag., 1953, v. 26, № 4, p. 185–188.
3. Kallenberg O. Foundations of Modern Probability. Berlin–Heidelberg: Springer-Verlag, 1997, 523 p.
4. Шабат Б. В. Введение в комплексный анализ. М.: Наука, 1969, 576 с.
5. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения, т. 2. М.: Мир, 1984, 752 с.

Поступила в редакцию
26.I.1999

© 1999 г.

МАЦАК И. К.*

О ЗАКОНЕ ПОВТОРНОГО ЛОГАРИФМА В БАНАХОВЫХ РЕШЕТКАХ

Для некоторых банаховых решеток устанавливается закон повторного логарифма в классической форме

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{(2n \ln \ln(n))^{1/2}} = \mathcal{O}X.$$

Ключевые слова и фразы: независимые случайные элементы, банаховы решетки, закон повторного логарифма.

1. Введение. Основные результаты. Рассмотрим (ξ_i) , $i \geq 1$, — последовательность независимых случайных величин (н.с.в.), $E\xi_i = 0$, $E\xi_i^2 = b_i^2$, $B_n = \sum_{i=1}^n b_i^2$. Говорят, что последовательность (ξ_i) удовлетворяет закону повторного логарифма (ЗПЛ), если почти наверное (п.н.)

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n}{[2B_n L(L(B_n))]^{1/2}} = 1, \quad \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n}{[2B_n L(L(B_n))]^{1/2}} = -1, \quad (1)$$

где $L(t) = \max(1, \ln(t))$, $t > 0$.

Впервые ЗПЛ для некоторого частного случая был установлен А. Я. Хинчиным [1]. Фундаментальную теорему А. Н. Колмогорова и обзор дальнейших исследований ЗПЛ можно проследить по работам [2]–[4].

В общем случае для последовательности (x_n) элементов банахова пространства не существует верхнего и нижнего предела. По-видимому, это и послужило одной из причин того, что в банаховых пространствах рассматривались различные непрямые обобщения ЗПЛ (1) (так называемые ограниченный и компактный ЗПЛ) [5]. Но понятия $\limsup_{n \rightarrow \infty} x_n$ и $\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n$ можно ввести в банаховых решетках (и даже в векторных решетках). Кроме того, в банаховых решетках можно рассматривать среднее квадратическое отклонение случайного элемента (с.э.). Поэтому естественно ставить задачу непосредственного обобщения равенств (1) на с.э. банаховой решетки. Этой задаче и посвящена наша работа.

Далее через E будем обозначать сепарабельную банахову решетку с нормой $\|\cdot\|$ и модулем $|\cdot|$. Следующие ниже определения и используемые результаты из теории банаховых решеток можно найти в книгах [6]–[8].

* Государственная академия легкой промышленности Украины, кафедра вычислительной техники и прикладной математики, ул. Немировича-Данченко, 2, 252011 Киев, Украина.