Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. К. Мацак, О законе повторного логарифма в банаховых решетках, *Теория вероятн. и ее примен.*, 1999, том 44, выпуск 4, 865–874

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp1072>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.73.92

26 апреля 2023 г., 05:09:38

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Хинчин А. Я. Математические методы теории массового обслуживания. — Труды Матем. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР, 1955, т. 49, с. 1–122.
2. Redheffer R. M. A note on the Poisson law. — Math. Mag., 1953, v. 26, № 4, p. 185–188.
3. Kallenberg O. Foundations of Modern Probability. Berlin–Heidelberg: Springer-Verlag, 1997, 523 p.
4. Шабат Б. В. Введение в комплексный анализ. М.: Наука, 1969, 576 с.
5. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения, т. 2. М.: Мир, 1984, 752 с.

Поступила в редакцию
26.I.1999

© 1999 г.

МАЦАК И. К.*

О ЗАКОНЕ ПОВТОРНОГО ЛОГАРИФМА В БАНАХОВЫХ РЕШЕТКАХ

Для некоторых банаховых решеток устанавливается закон повторного логарифма в классической форме

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{(2n \ln \ln(n))^{1/2}} = \mathcal{O}X.$$

Ключевые слова и фразы: независимые случайные элементы, банаховы решетки, закон повторного логарифма.

1. Введение. Основные результаты. Рассмотрим (ξ_i) , $i \geq 1$, — последовательность независимых случайных величин (н.с.в.), $E\xi_i = 0$, $E\xi_i^2 = b_i^2$, $B_n = \sum_{i=1}^n b_i^2$. Говорят, что последовательность (ξ_i) удовлетворяет закону повторного логарифма (ЗПЛ), если почти наверное (п.н.)

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n}{[2B_n L(L(B_n))]^{1/2}} = 1, \quad \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n}{[2B_n L(L(B_n))]^{1/2}} = -1, \quad (1)$$

где $L(t) = \max(1, \ln(t))$, $t > 0$.

Впервые ЗПЛ для некоторого частного случая был установлен А. Я. Хинчиным [1]. Фундаментальную теорему А. Н. Колмогорова и обзор дальнейших исследований ЗПЛ можно проследить по работам [2]–[4].

В общем случае для последовательности (x_n) элементов банахова пространства не существует верхнего и нижнего предела. По-видимому, это и послужило одной из причин того, что в банаховых пространствах рассматривались различные непрямые обобщения ЗПЛ (1) (так называемые ограниченный и компактный ЗПЛ) [5]. Но понятия $\limsup_{n \rightarrow \infty} x_n$ и $\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n$ можно ввести в банаховых решетках (и даже в векторных решетках). Кроме того, в банаховых решетках можно рассматривать среднее квадратическое отклонение случайного элемента (с.э.). Поэтому естественно ставить задачу непосредственного обобщения равенств (1) на с.э. банаховой решетки. Этой задаче и посвящена наша работа.

Далее через E будем обозначать сепарабельную банахову решетку с нормой $\|\cdot\|$ и модулем $|\cdot|$. Следующие ниже определения и используемые результаты из теории банаховых решеток можно найти в книгах [6]–[8].

* Государственная академия легкой промышленности Украины, кафедра вычислительной техники и прикладной математики, ул. Немировича-Данченко, 2, 252011 Киев, Украина.

Подмножество (x_α) банаховой решетки E называется порядково ограниченным, если существуют элементы y и z такие, что $y \leq x_\alpha \leq z$ для всех x_α . Банахова решетка E называется σ -полной, если для всякой порядково ограниченной последовательности $(x_n) \subset E$ в E существуют верхняя грань $\sup_{n \geq 1} x_n$ и нижняя грань $\inf_{n \geq 1} x_n$.

В σ -полной банаховой решетке E определим верхний и нижний пределы ограниченной последовательности:

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} x_n = \inf_m \left(\sup_{n \geq m} x_n \right), \quad \liminf_{n \rightarrow \infty} x_n = \sup_m \left(\inf_{n \geq m} x_n \right).$$

Для последовательности с.э. (Y_i) в сепарабельной банаховой решетке $\sup_{i < n} Y_i$ и $\inf_{i < n} Y_i$ будут борелевскими с.э., и в соответствии с приведенным выше определением можно рассматривать $\limsup_{n \rightarrow \infty} Y_n$ и $\liminf_{n \rightarrow \infty} Y_n$.

Основные результаты работы будут установлены для q -вогнутых банаховых решеток. Напомним соответствующее определение. Пусть $1 \leq q < \infty$. Банахова решетка E называется q -вогнутой, если существует такая константа $D_{(q)} = D_{(q)}(E)$, что для любого n и для любых элементов $(x_i)_{i=1}^n \subset E$ выполняется неравенство

$$\left(\sum_{i=1}^n \|x_i\|^q \right)^{1/q} \leq D_{(q)} \left\| \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^q \right)^{1/q} \right\|.$$

Простые примеры σ -полных q -вогнутых банаховых решеток — это пространства L_p и l_p , $1 \leq p \leq q$. σ -полной будет также банахова решетка, порожденная безусловным базисом. Пространство $C[0, 1]$ дает пример банаховой решетки, которая не будет σ -полной и не будет q -вогнутой для любого конечного q .

Перейдем к определению среднего квадратического отклонения с.э. в банаховой решетке. Пусть $\psi(t)$ — выпуклая, неубывающая функция такая, что $\psi(0) = 0$, $\lim_{t \rightarrow \infty} \psi(t) = \infty$. Пространство Орлича $L_\psi(\Omega) = L_\psi(\Omega, \mathcal{A}, P, R)$ — это совокупность всех с.в. η , заданных на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ таких, что $E\psi(|\eta|/c) < \infty$ для некоторого $c > 0$. $L_\psi(\Omega)$ — банахово пространство с нормой $\|\eta\|_\psi = \inf\{c > 0: E\psi(|\eta|/c) \leq 1\}$. Когда $\psi(t) = t^p$, $1 \leq p < \infty$, $L_\psi(\Omega)$ обозначается через $L_p(\Omega)$, $\|\eta\|_p = (E|\eta|^p)^{1/p}$.

Рассмотрим с.э. X , заданный на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, со значениями в банаховой решетке E , $EX = 0$. Среднее ψ -отклонение с.э. X определим формулой

$$\mathfrak{O}_\psi X = \sup \left\{ E\eta X: \|\eta\|_{L'_\psi(\Omega)} \leq 1 \right\}, \quad (2)$$

где $L'_\psi(\Omega)$ — сопряженное пространство к $L_\psi(\Omega)$. Отсюда для

$$1 \leq p < \infty: \mathfrak{O}_p X = \sup \left\{ E\eta X: \|\eta\|_{p'} \leq 1 \right\} \quad \text{при} \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1.$$

Элемент $\mathfrak{O}X = \mathfrak{O}_2 X$ банаховой решетки E будем называть средним квадратическим отклонением с.э. X .

Пусть $R: E^* \rightarrow E$ — ковариационный оператор с.э. X , H_R — гильбертово подпространство пространства E , ассоциированное с R , т.е. пополнение $R(E^*)$ в норме скалярного произведения $\langle Rf, Rg \rangle = Ef(X)g(X)$, $f, g \in E^*$. Обозначим через K замкнутый единичный шар в H_R . Известно [5, с. 208], что $K = \{x \in E: x = E\eta X, \|\eta\|_2 \leq 1\}$. Следовательно, среднее квадратическое отклонение с.э. X можно также определить равенством

$$\mathfrak{O}X = \sup \{x: x \in K\}. \quad (3)$$

Таким образом, для существования среднего квадратического отклонения $\mathfrak{O}X$ в σ -полной банаховой решетке необходима и достаточна порядковая ограниченность множества K .

Например, достаточным будет условие: для $\tau \in L_2(\Omega)$, $u \in E$

$$|X| \leq \tau u \quad \text{п.н.} \quad (4)$$

Для с.в. $\xi \in L_2(\Omega)$ выполняется равенство

$$\|\xi\|_2 = \sup \left\{ \mathbf{E} \eta \xi : \|\eta\|_2 \leq 1 \right\}.$$

Поэтому в функциональных банаховых решетках определение (3) эквивалентно обычному

$$\mathfrak{G}X = \left\{ \sigma(t) = \|X(t)\|_2, t \in T \right\}.$$

Пусть (X_n) — последовательность независимых копий с.э. X ,

$$S_n = \sum_{i=1}^n X_i, \quad a_n = \left(2nL(L(n)) \right)^{1/2}.$$

Будем говорить, что с.э. X удовлетворяет порядковому ЗПЛ, если выполняются равенства:

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{a_n} = \mathfrak{G}X \text{ п.н.}, \quad \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{a_n} = -\mathfrak{G}X \text{ п.н.}, \quad (5)$$

где $\mathfrak{G}X$ определяется равенством (3).

Теорема 1. Пусть X — случайный элемент в сепарабельной q -вогнутой, $1 \leq q < \infty$, банаховой решетке E , $\mathbf{E}X = 0$. Тогда

(i) если $1 \leq q < 2$ и существует $\mathfrak{G}X$, то для любого $q \leq p < 2$

$$\mathbf{E} \left\| \sup_{n > 1} \left| \frac{S_n}{a_n} \right| \right\|^p \leq C_{p,q} \|\mathfrak{G}X\|^p$$

и выполняется ЗПЛ (5);

(ii) если $2 \leq q < \infty$ и существует $\mathfrak{G}_\psi X$, где $\psi(t) = |t|^q \ln(1 + |t|)$, а $\mathfrak{G}_\psi X$ определяется равенством (2), то

$$\mathbf{E} \left\| \sup_{n > 1} \left| \frac{S_n}{a_n} \right| \right\|^q \leq C_q \|\mathfrak{G}_\psi X\|^q$$

и выполняется ЗПЛ (5);

(iii) в 2-вогнутой банаховой решетке $E = l_2$ существует симметричный случайный элемент X такой, что для любого $\varepsilon > 0$ и $\psi_\varepsilon(t) = t^2 \ln^{1-\varepsilon}(1 + |t|)$ существует $\mathfrak{G}_{\psi_\varepsilon} X$, но ЗПЛ (5) для случайного элемента X не выполняется.

Следствие 1. В условиях пп. (i) и (ii) теоремы 1

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left\| \sup_{n > m} \frac{S_n}{a_n} - \mathfrak{G}X \right\| = 0 \text{ п.н.}, \quad \lim_{m \rightarrow \infty} \left\| \inf_{n > m} \frac{S_n}{a_n} + \mathfrak{G}X \right\| = 0 \text{ п.н.}$$

Следствие 2. Если E — банахово идеальное пространство (БИП) измеримых функций на измеримом пространстве (T, Λ, μ) и $X = \{X(t) = \sigma(t) \hat{X}(t), t \in T\}$, то п. (ii) теоремы 1 остается справедливым при замене условия «существует $\mathfrak{G}_\psi X$ » на соотношения а) $\sigma(t) \in E$, б) $\sup \{\mathbf{E} \psi(\hat{X}(t)) : t \in T\} < \infty$.

Теорема 2. (i) Пусть X — случайный элемент в банаховой решетке E , $\mathbf{E}X = 0$, E — q -вогнута при некотором $q < \infty$ (имеет конечный котип), существуют случайная величина $\tau \in L_2(\Omega)$ и элемент $u \in E$, удовлетворяющие неравенству (4). Тогда для случайного элемента X выполняется ЗПЛ (5) и при $0 < r < 2$

$$\mathbf{E} \left\| \sup_{n > 1} \left| \frac{S_n}{a_n} \right| \right\|^r \leq C_{r,q} \|\tau\|_2^r \|u\|^r.$$

(ii) Если в условиях п. (i) случайная величина $\tau \in L_\psi(\Omega)$ при $\psi(t) = |t|^p \ln(1 + |t|)$, $p \geq 2$, то

$$\mathbf{E} \left\| \sup_{n > 1} \left| \frac{S_n}{a_n} \right| \right\|^p \leq C_{p,q} \|\tau\|_\psi^p \|u\|^p.$$

(iii) Если банахова решетка E не является q -вогнутой ни при каком конечном q (имеет бесконечный котип), то существуют случайный элемент X в E и элемент $u \in E$ такие, что п.н. $|X| \leq u$, но ЗПЛ (5) для X не выполняется.

2. Доказательство теоремы 1. Сначала установим ряд вспомогательных утверждений.

Лемма 1. Пусть (ξ_i) — последовательность независимых случайных величин $E\xi_i = 0$. Тогда

(i) для любого $p > 0$

$$E \left(\sup_{n \geq 1} \frac{|\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n|}{a_n} \right)^p \leq C_p E \left(\sup_{n \geq 1} \frac{\xi_1^2 + \xi_2^2 + \dots + \xi_n^2}{n} \right)^{p/2}, \quad (6)$$

где $a_n = (2nL(L(n)))^{1/2}$;

(ii) если ξ_i — это независимые копии случайной величины ξ , $0 < p < 2$, то

$$E \left(\sup_{n \geq 1} \frac{|\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n|}{a_n} \right)^p \leq C_p (E\xi^2)^{p/2}. \quad (7)$$

Доказательство. Задача оценивания моментов в ЗПЛ даже в значительно более общей ситуации рассматривалась в работе [9]. Но результаты были приведены только для моментов степени $p < 2$. Неравенство (7) — следствие основной теоремы из [9]. Там же содержится следующее полезное неравенство:

$$E \left(\sup_{n \geq 1} \frac{|\sum_{i=1}^n \varepsilon_i b_i|}{a_n} \right)^2 \leq C \sup_{n \geq 1} \frac{b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2}{n}, \quad (8)$$

где ε_i — симметричные н.с.в. Бернулли, $P\{\varepsilon_i = -1\} = P\{\varepsilon_i = 1\} = \frac{1}{2}$, $b_i \in \mathbf{R}$ (в [9] оценка (8) дается для банаховых пространств). Для с.в. вида $\xi_i = \varepsilon_i b_i$ и $p = 2$ оценка (6) эквивалентна (8).

Далее, воспользуемся представлением (см. [5, с. 159])

$$\sup_{n \geq 1} \frac{|\sum_{i=1}^n \varepsilon_i b_i|}{a_n} = \sup_{n \geq 1} \left\| \sum_{i=1}^n Y_i \right\|_{l_\infty}, \quad (9)$$

где $Y_i = (0, \dots, 0, \varepsilon_i b_i a_i^{-1}, \varepsilon_i b_i a_{i+1}^{-1}, \varepsilon_i b_i a_{i+2}^{-1}, \dots)$ — симметричные н.с.в. в пространстве l_∞ . Из представления (9), неравенств Леви и Кахана [5, с. 40, 100] и (8) имеем для любого $0 < p < \infty$

$$\begin{aligned} \left(E \left(\sup_{n \geq 1} \frac{|\sum_{i=1}^n \varepsilon_i b_i|}{a_n} \right)^p \right)^{1/p} &= \left(E \left(\sup_{n \geq 1} \left\| \sum_{i=1}^n Y_i \right\|_{l_\infty} \right)^p \right)^{1/p} \\ &\leq \left(2 E \left(\left\| \sum_{i=1}^n Y_i \right\|_{l_\infty} \right)^p \right)^{1/p} \leq C_p \left(E \left(\left\| \sum_{i=1}^n Y_i \right\|_{l_\infty} \right)^2 \right)^{1/2} \\ &\leq C_p \sup_{n \geq 1} \left(\frac{b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2}{n} \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Последняя оценка и теорема Фубини приводят к неравенству (6) для симметричных с.в. Общий случай сводится к симметричному с помощью стандартной процедуры симметризации: $\xi_i^s = \xi_i - \xi'_i$, (ξ'_i) — независимая копия последовательности (ξ_i) . Лемма 1 доказана.

Для последовательности (ξ_i) независимых копий с.в. ξ положим

$$N_1(\xi) = \|\xi\|_\psi,$$

$$N_2(\xi) = E \sup_{n \geq 1} \left| \frac{\xi_n}{n} \right|,$$

$$N_3(\xi) = E \sup_{n \geq 1} \left| \frac{|\xi_1| + |\xi_2| + \dots + |\xi_n|}{n} \right|,$$

$$N_4(\xi) = E \sup_{n \geq 1} \left| \frac{|\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n|}{n} \right|.$$

Лемма 2. Если $\psi(t) = |t| \ln(1 + |t|)$, $\mathbb{E}\xi = 0$, то существуют константы C_i , $i = 1, \dots, 4$, такие, что

$$C_1 N_1(\xi) \leq C_2 N_2(\xi) \leq C_3 N_3(\xi) \leq C_4 N_4(\xi) \leq N_1(\xi). \quad (10)$$

Доказательство. Пусть $L_\psi(\Omega)$ — пространство Орлича с нормой $N_1(\cdot)$. Непосредственно проверяется, что $N_2(\cdot)$, $N_3(\cdot)$, $N_4(\cdot)$ — нормы на $L_\psi(\Omega)$. Неравенства (10) означают, что нормы $N_i(\cdot)$, $i = 1, \dots, 4$, эквивалентны. Сначала установим эквивалентность норм $N_i(\cdot)$, $i = 1, 2, 3$. Известно [10], что пространство $L_\psi(\Omega)$ с нормой $N_1(\cdot)$ будет банаховой решеткой с естественным порядком: $\xi(\omega) \leq \zeta(\omega) \iff \mathbb{P}\{\xi(\omega) \leq \zeta(\omega)\} = 1$. Очевидно, что $N_2(\cdot)$ и $N_3(\cdot)$ — монотонные нормы на $L_\psi(\Omega)$, т.е. если $0 \leq \xi(\omega) \leq \zeta(\omega)$, то $N_2(\xi) \leq N_2(\zeta)$ и $N_3(\xi) \leq N_3(\zeta)$.

Далее воспользуемся известным результатом [11]: условия

$$(i) \quad N_1(\xi) < \infty, \quad (ii) \quad N_2(\xi) < \infty, \quad (iii) \quad N_3(\xi) < \infty$$

эквивалентны. Эквивалентность соотношений (i), (ii), (iii) означает, что $N_2(\cdot)$, $N_3(\cdot)$ — банаховы монотонные нормы на банаховой решетке $L_\psi(\Omega)$ с нормой $N_1(\cdot)$. Поскольку в банаховой решетке любая монотонная банахова норма эквивалентна исходной норме [7], [10], то $N_1(\cdot)$, $N_2(\cdot)$ и $N_3(\cdot)$ эквивалентны, т.е.

$$C_1 N_1(\xi) \leq C_2 N_2(\xi) \leq C_3 N_3(\xi) \leq N_1(\xi).$$

Нам не известно, будет ли в общем случае норма $N_4(\cdot)$ монотонной. Но очевидно, что $N_4(\xi) \leq N_3(\xi)$, и для окончания доказательства соотношения (10) покажем, что

$$N_2(\xi) \leq C N_4(\xi). \quad (11)$$

Сначала рассмотрим случай симметрично распределенной с.в. ξ . Как и в лемме 1, воспользуемся представлением

$$\sup_{n \geq 1} \frac{|\sum_{i=1}^n \xi_i|}{n} = \sup_{n \geq 1} \left\| \sum_{i=1}^n Y_i \right\|_{l_\infty}, \quad \sup_{n \geq 1} \frac{|\xi_n|}{n} = \sup_{n \geq 1} \|Y_n\|_{l_\infty},$$

где $Y_i = (0, \dots, 0, \xi_i/i, \xi_i/(i+1), \xi_i/(i+2), \dots)$ — н.с.в. в l_∞ . Отсюда по неравенству Леви

$$N_2(\xi) = \mathbb{E} \sup_{n \geq 1} \|Y_n\|_{l_\infty} \leq 2 \mathbb{E} \left\| \sum_{i=1}^n Y_i \right\|_{l_\infty} \leq 2 \mathbb{E} \sup_{n \geq 1} \left\| \sum_{i=1}^n Y_i \right\|_{l_\infty} = 2 N_4(\xi).$$

Чтобы получить оценку (11) в общем случае, снова делается симметризация: $\xi_i^s = \xi_i - \xi_i'$. Отметим, что условие $\mathbb{E}\xi = 0$ применяется только в этом месте. Лемма 2 доказана.

Лемма 3. Пусть случайная величина $\xi > 0$ п.н., $\mathbb{E}\xi = \infty$, (ξ_i) — последовательность независимых копий ξ . Тогда существует числовая последовательность (d_i) , $d_i > 0$, для которой сходится ряд $\sum_i d_i^{-1}$, но

$$\sum_i \xi_i d_i^{-1} = \infty \quad \text{п.н.}$$

Доказательство. Для сходимости ряда $\sum_i \xi_i d_i^{-1}$ п.н. необходимо и достаточно, чтобы $\sum_i \mathbb{E} \min(1, \xi_i d_i^{-1}) < \infty$ [12, с. 53]. Поэтому для доказательства леммы достаточно построить положительную последовательность (d_i) , для которой сходится ряд $\sum_i d_i^{-1}$, но

$$\sum_i \mathbb{E} \hat{\xi}_i d_i^{-1} = \infty, \quad (12)$$

где $\hat{\xi}_i = \xi$, если $\xi < d_i$, и $\hat{\xi}_i = 0$, если $\xi \geq d_i$.

Пусть $F(t)$ — функция распределения с.в. ξ , $m(t) = \int_0^t s dF(s)$. По определению

$$\mathbb{E} \hat{\xi}_i = m(d_i). \quad (13)$$

Последовательность (d_i) будем строить рекуррентным образом из равенств

$$m(d_n) \sum_{i=n+1}^{\infty} d_i^{-1} = 1, \quad (14)$$

или, что эквивалентно,

$$\frac{1}{d_n} = \frac{1}{m(d_{n-1})} - \frac{1}{m(d_n)}. \quad (15)$$

Положим $d_1 = 1$, $d_n = d_{n-1} + t_n$. Для заданного d_{n-1} определяем t_n как корень уравнения

$$\frac{1}{m(d_{n-1})} = \frac{1}{m(d_{n-1} + t)} + \frac{1}{(d_{n-1} + t)}. \quad (16)$$

При $t = 0$ левая часть равенства (16) меньше правой, а при $t \rightarrow \infty$ правая монотонно и непрерывно убывает к 0. Поэтому уравнение (16) имеет решение. Следовательно, существует последовательность (d_i) , для которой, в силу равенства (15), сходится ряд $\sum_i d_i^{-1}$, а согласно (14)

$$\sum_{i=n}^{\infty} m(d_i) d_i^{-1} \geq m(d_n) \sum_{i=n}^{\infty} d_i^{-1} \geq 1.$$

Отсюда и из (13) получаем равенство (12). Лемма 3 доказана.

Лемма 4. Пусть ξ — симметричная случайная величина с функцией распределения $F(t)$, для которой при $t > 2$

$$1 - F(t) = (t \ln(t))^{-2}. \quad (17)$$

Тогда

$$\mathbf{E} \xi^2 \ln(1 + |\xi|) = \infty, \quad (18)$$

$$\mathbf{E} \xi^2 \left(\ln(1 + |\xi|) \right)^{1-\varepsilon} < \infty, \quad \varepsilon > 0, \quad (19)$$

$$\mathbf{E} \left(\sup_{n \geq 1} \frac{|\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n|}{a_n} \right)^2 = \infty, \quad (20)$$

где (ξ_i) — независимые копии ξ .

Доказательство. Соотношения (18), (19) — прямое следствие равенства (17). Мы опускаем соответствующие вычисления. Ясно также, что $\mathbf{E} \xi^2 < \infty$, последовательность (ξ_i) удовлетворяет ЗПЛ (1) с $b_i = 1$ и

$$\sup_{n \geq 1} \frac{|\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n|}{a_n} < \infty \quad \text{п.н.} \quad (21)$$

При выполнении условия (21) равенство (20) эквивалентно соотношению (см. [5, с. 159])

$$\mathbf{E} \sup_{n \geq 1} \left| \frac{\xi_n}{a_n} \right|^2 = \infty. \quad (22)$$

Установим (22). Из симметричности с.в. ξ , неравенства Леви и (21) следует существование t_0 , для которого

$$\mathbf{P} \left\{ \sup_{n \geq 1} \left| \frac{\xi_n}{a_n} \right| > t_0 \right\} \leq 2\mathbf{P} \left\{ \sup_{n \geq 1} \frac{|\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n|}{a_n} > t_0 \right\} < \frac{1}{2}.$$

Отсюда (см. лемму 2.6 в [5, с. 51]) при достаточно больших $t > t_0$

$$\mathbf{P} \left\{ \sup_{n \geq 1} \left| \frac{\xi_n}{a_n} \right| > t \right\} \geq \frac{1}{2} \sum_{n \geq 1} \mathbf{P} \{ \xi_n > a_n t \} \geq \frac{1}{2} \sum_{n > t} (1 - F(a_n t))$$

$$\begin{aligned} &\geq \frac{1}{2} \sum_{n>t} \left(t^2 n L(L(n)) \right)^{-1} \left(\frac{3}{2} \ln(n) + \frac{1}{2} \ln(L(L(n))) \right)^{-2} \\ &\geq C t^{-2} \sum_{n>t} \left(n(\ln(n))^2 \ln \ln(n) \right)^{-1} \geq C_1 \left(t^2 \ln(t) \ln \ln(t) \right)^{-1}. \end{aligned}$$

Последняя оценка и приводит к равенству (22). Лемма 4 доказана.

Перейдем к доказательству пп. (i), (ii) теоремы 1. Каждая сепарабельная σ -полная банахова решетка порядково изоморфна некоторому БИП [6, с. 29]. Поскольку q -вогнутая ($q < \infty$) банахова решетка будет σ -полной [6, с. 6], а порядковый изоморфизм между банаховыми решетками сохраняет как порядок, так и верхние (нижние) грани, то достаточно рассмотреть случай, когда E — это q -вогнутое БИП на измеримом пространстве (T, Λ, μ) .

Отметим также, что в q -вогнутом ($q < \infty$) БИП норма порядково непрерывна, т.е. $x_n \downarrow 0 \Rightarrow \|x_n\| \rightarrow 0$, а следовательно,

$$x(t) = o\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} x_n(t) \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \|x(t) - x_n(t)\| = 0 \quad (23)$$

(см. [6, с. 83], [10]). Напомним, что последовательность (x_n) элементов банаховой решетки E называется o -сходящейся к элементу $x \in E$, $x = o\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$, если существует такая последовательность (v_n) , что $|x - x_n| < v_n$ и $v_n \downarrow 0$, т.е. $v_1 \geq v_2 \geq \dots$ и $\inf_n v_n = 0$.

Не ограничивая общности будем считать, что $\mu(T) = 1$. В БИП с порядково непрерывной нормой для выполнения обоих равенств в (23) достаточны условия (см. [7, с. 364], [10]):

$$\mu\left(t \in T: x(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n(t)\right) = 1 \quad (24)$$

и существует элемент $y(t) \in E$ такой, что для всех $n \geq 1$

$$\mu\left(t \in T: |x_n(t)| \leq y(t)\right) = 1. \quad (25)$$

Докажем справедливость первого равенства в (5), второе рассматривается аналогично. Пусть $X = \{X(t), t \in T\}$ — с.э. в БИП E ,

$$\begin{aligned} \mathfrak{G}_\psi X &= \left\{ \sigma_\psi(t), t \in T \right\}, & \mathfrak{G} X &= \left\{ \sigma(t), t \in T \right\}, \\ U_m &= U_m(t) = \sup_{n \geq m} \frac{S_n(t)}{a_n}, & U &= U(t) = \sup_{n \geq 1} \left| \frac{S_n(t)}{a_n} \right|. \end{aligned}$$

Учитывая соотношения

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} x_n = o\text{-}\lim_{m \rightarrow \infty} \left(\sup_{n \geq m} x_n \right), \quad \liminf_{n \rightarrow \infty} x_n = o\text{-}\lim_{m \rightarrow \infty} \left(\inf_{n \geq m} x_n \right),$$

достаточно показать, что

$$P\left\{ o\text{-}\lim_{m \rightarrow \infty} U_m = \mathfrak{G} X \right\} = 1. \quad (26)$$

Согласно (24), (25), равенство (26) вытекает из соотношений:

$$\mu\left(t \in T: \lim_{n \rightarrow \infty} U_m(t) = \sigma(t)\right) = 1 \quad \text{п.н.}, \quad (27)$$

$$E\|U(t)\|^q < \infty \quad \text{п.н.} \quad (28)$$

Нетрудно заметить, что равенство (27) — прямое следствие ЗПЛ (1) для одинаково распределенных с.в. и теоремы Фубини.

Чтобы проверить условие (28), воспользуемся оценкой

$$\left(E\|Y(t)\|^q \right)^{1/q} \leq D_q \left\| \left(E|Y(t)|^q \right)^{1/q} \right\|, \quad (29)$$

установленной в [13] для любого с.э. $Y(t)$ в q -вогнутом БИП и $1 \leq q < \infty$. Предположим, что $2 \leq q < \infty$. Из неравенства (29) и оценки (6) леммы 1 имеем

$$\left(\mathbb{E} \|U(t)\|^q \right)^{1/q} \leq C_q \left\| \left(\mathbb{E} \left(\sup_{n \geq 1} \frac{\sum_{i=1}^n |X_i(t)|^2}{n} \right)^{q/2} \right)^{1/q} \right\|. \quad (30)$$

Далее воспользуемся известным числовым неравенством

$$\left(\frac{s_1 + s_2 + \dots + s_n}{n} \right)^\beta \leq \frac{s_1^\beta + s_2^\beta + \dots + s_n^\beta}{n}, \quad \beta \geq 1, s_i \geq 0. \quad (31)$$

Поскольку в пространстве Орлича $L_\psi(\Omega)$ норма $\|\eta\|_\psi$ эквивалентна норме $\mathfrak{G}_\psi \eta$, заданной формулой (2), то из оценки (10) леммы 2 и (31) имеем

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \sup_{n \geq 1} \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |X_i(t)|^2 \right)^{q/2} &\leq \mathbb{E} \sup_{n \geq 1} \frac{\sum_{i=1}^n |X_i(t)|^q}{n} \leq C N_1(|X(t)|^q) \\ &\leq C_q \|X(t)\|_\psi^q \leq C_q \|\sigma_\psi(t)\|_\psi^q. \end{aligned} \quad (32)$$

В условиях п. (ii) теоремы 1 $\|\sigma_\psi(t)\| < \infty$, и, следовательно, неравенство (28) немедленно вытекает из неравенств (30), (32).

Случай $1 \leq q < 2$ рассматривается подобным образом с использованием неравенства (29) и оценки 7 леммы 1.

Перейдем к доказательству п. (iii). Пусть ξ — симметричная с.в., построенная в лемме 4, $\eta = \sup_{n \geq 1} (|\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n|/a_n)$, (ξ_i) и (η_i) — независимые копии ξ и η соответственно. По лемме 4 $\mathbb{E} \eta^2 = \infty$, а согласно лемме 3 существует числовая последовательность (σ_i) , для которой сходится ряд $\sum_i \sigma_i^2$, но

$$\sum_{i>1} \eta_i^2 \sigma_i^2 = \infty \quad \text{п.н.} \quad (33)$$

Рассмотрим в пространстве l_2 с.э. $X = (\xi_i \sigma_i)$. Тогда из оценок (18), (19) леммы 4 следует, что $\mathfrak{G}_\psi X$ не существует, а для любого $\varepsilon > 0$ $\mathfrak{G}_{\psi_\varepsilon} X = \mathfrak{G}_{\psi_\varepsilon}(\xi) \cdot (\sigma_i) \in l_2$. Для выполнения ЗПЛ (5) в l_2 необходимо, чтобы

$$\sup_{n>1} \left| \frac{S_n}{a_n} \right| \in l_2 \quad \text{п.н.} \quad (34)$$

Но с.э. $\sup_{n>1} |S_n/a_n|$ эквивалентен по распределению с.э. $(\eta_i \sigma_i)$ и, в силу (33), соотношение (34) не выполняется. Теорема 1 доказана.

Следствия 1, 2 содержатся в доказательстве теоремы 1.

3. Доказательство теоремы 2. Далее нам потребуется одно утверждение, близкое к лемме 2.

Лемма 5. Пусть $1 \leq r < p < 2r < \infty$, (ξ_i) — последовательность независимых копий случайной величины ξ ,

$$\begin{aligned} N_5(\xi) &= \|\xi\|_p, \quad N_6(\xi) = \left\| \sup_{n \geq 1} \frac{|\xi_n|}{n^{1/p}} \right\|_r, \\ N_7(\xi) &= \left\| \sup_{n \geq 1} \left(\frac{|\xi_1|^p + |\xi_2|^p + \dots + |\xi_n|^p}{n} \right)^{1/p} \right\|_r. \end{aligned}$$

Тогда существуют константы C_5, C_6, C_7 такие, что

$$C_5 N_5(\xi) \leq C_6 N_6(\xi) \leq C_7 N_7(\xi) \leq N_5(\xi). \quad (35)$$

Доказательство. Воспользуемся следующим известным результатом [14]: если $0 < s < t < 2$, $\mathbb{E} \xi = 0$, то эквивалентны условия

$$\|\xi\|_t < \infty, \quad (36)$$

$$\mathbb{E} \sup_{n \geq 1} \frac{|\xi_n|^s}{n^{s/t}} < \infty. \quad (37)$$

Выведем отсюда эквивалентность условий

$$a) N_5(\xi) < \infty, \quad b) N_6(\xi) < \infty, \quad c) N_7(\xi) < \infty. \quad (38)$$

Ясно, что при $1 \leq s < t < 2$ условия (36), (37) эквивалентны для любых с.в. ξ . Поэтому, положив в (36), (37) $|\xi|^d = \eta$, $r = sd$, $p = td$, $d \geq 1$, получим эквивалентность условий (38), а) и (38), б) при $1 \leq r < p < 2r < \infty$. Отсюда в силу закона больших чисел для одинаково распределенных с.в. и определения нормы $N_7(\cdot)$ следует, что при выполнении любого из условий (38) $\sup_{n \geq 1} [(|\xi_1|^p + |\xi_2|^p + \dots + |\xi_n|^p)/n] < \infty$ п.н. Тогда [5, с. 159] условие (38), б) эквивалентно (38), с), т.е. $N_5(\cdot)$, $N_6(\cdot)$, $N_7(\cdot)$ — банаховы нормы на банаховой решетке $L_p(\Omega)$. Как и в лемме 2, остается проверить их монотонность, но это очевидно.

Перейдем к доказательству п. (i) теоремы 2. Можно считать, что $1 < r < 2 < q < \infty$. Для с.э. Y в банаховом пространстве B , $EY = 0$, хорошо известно неравенство

$$E\|Y\|^r \leq E\|Y - Y'\|^r, \quad (39)$$

Y' — независимая копия Y . Из рассмотрения банахова пространства

$$B = \left\{ (x_i): x_i \in E, \| (x_i) \|_B = \left\| \sup_{n \geq 1} \frac{|x_1 + x_2 + \dots + x_n|}{a_n} \right\| < \infty \right\}$$

и с.э. $Y = (X_i)$ со значениями в B , неравенства (39) и доказательства теоремы 1 (оценка (28)) следует, что нам достаточно установить оценку

$$E\|U(t)\|^r \leq C_{r,q} \|\tau\|_2^r \|u(t)\|^r \quad (40)$$

для БИП E и симметрично распределенного с.э. $X = \{X(t), t \in T\}$. Поэтому далее предполагаем, что $X = \varepsilon \tilde{X}$, где ε и $\tilde{X}$ независимы, $\tilde{X}$ — копия X , ε — с.в. Бернулли.

Снова применим оценки (6) и (29):

$$\begin{aligned} E\|U(t)\|^r &\leq E\left(E_{\tilde{X}}\|U(t)\|^q\right)^{r/q} \\ &\leq C_q E\left\|E_{\tilde{X}}\left(\sup_{n \geq 1} \frac{|\hat{X}_1(t)|^2 + |\hat{X}_2(t)|^2 + \dots + |\hat{X}_n(t)|^2}{n}\right)^{q/2}\right\|^r \\ &\leq C_q E\left(\sup_{n \geq 1} \frac{\tau_1^2 + \tau_2^2 + \dots + \tau_n^2}{n}\right)^{r/2} \|u(t)\|^r, \end{aligned}$$

где через $E_{\tilde{X}}(\xi)$ обозначаем математическое ожидание с.в. ξ при фиксированном $\tilde{X}$. Применяя к последнему неравенству лемму 5 с $p = 2$, $1 < r < 2$, получаем оценку (40).

Доказательство п. (ii) аналогично приведенному выше, только вместо леммы 5 надо воспользоваться леммой 2.

(iii) Хорошо известен контрпример В. И. Тариеладзе и С. А. Чобаняна [15] к центральной предельной теореме в банаховом пространстве бесконечного котипа. Некоторые видоизменения их метода позволяют получить нужный нам пример. Мы опускаем соответствующие построения. Близкая конструкция будет приведена в другом месте в нашей совместной работе с А. Н. Пличко. Теорема 2 доказана.

4. Замечания. 1. Говорят, что с.э. X удовлетворяет ограниченному ЗПЛ, если $\limsup_{n \rightarrow \infty} \|S_n/a_n\| < \infty$ п.н., и, соответственно, компактному ЗПЛ, если последовательность (S_n/a_n) относительно компактна п.н. [5]. Построенный в п. (iii) теоремы 1 с.э. X — это пример с.э., для которого не выполняется порядковый ЗПЛ (5), но выполняются ограниченный и компактный ЗПЛ ($E\|X\|_{l_2}^2 = \|\otimes X\|_{l_2}^2 < \infty$).

2. Из неравенства

$$\sup_{n > 1} \left\| \frac{S_n}{a_n} \right\| \leq \left\| \sup_{n > 1} \left| \frac{S_n}{a_n} \right| \right\| \quad (41)$$

ясно, что из порядкового ЗПЛ (5) следует ограниченный ЗПЛ.

3. Для банаховой решетки $c_0 = \{x = (x_i): \lim_{i \rightarrow \infty} x_i = 0\}$, $\|x\| = \sup_{i \geq 1} |x_i|$, неравенство (41) превращается в равенство. Поэтому в c_0 ограниченный и порядковый ЗПЛ эквивалентны.

Отметим также, что в пространстве c_0 существует с.э. X , для которого выполняется ограниченный ЗПЛ (а следовательно, и порядковый ЗПЛ) и не выполняется компактный ЗПЛ [5, с. 213, 224].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Khintchine A. Über einen Satz der Wahrscheinlichkeitsrechnung. — Fund. Math., 1924, v. 6, p. 9–12.
2. Колмогоров А. Н. Теория вероятностей и математическая статистика. М.: Наука, 1986, 534 с.
3. Петров В. В. Суммы независимых случайных величин. М.: Наука, 1972, 414 с.
4. Bingham N. H. Variants on the law of the iterated logarithm. — Bull. London Math. Soc., 1986, v. 18, № 5, p. 433–467.
5. Ledoux M., Talagrand M. Probability in Banach Spaces. Berlin–Heidelberg: Springer-Verlag, 1991, 480 p.
6. Lindenstrauss J., Tzafriri L. Classical Banach Spaces. V. 2. Berlin–Heidelberg: Springer-Verlag, 1979, 243 p.
7. Канторович Л. В., Акилов Г. П. Функциональный анализ. М.: Наука, 1984, 752 с.
8. Иосида К. Функциональный анализ. М.: Мир, 1967, 624 с.
9. Pisier G. Sur la loi du logarithme itéré dans les espaces de Banach. — Lecture Notes in Math., 1976, v. 526, p. 203–210.
10. Бужвалов А. В. и др. Банаховы решетки — некоторые банаховы аспекты теории. — Успехи матем. наук, 1979, т. 34, № 2, с. 137–183.
11. Burkholder D. L. Successive conditional expectations of an integrable function. — Ann. Math. Statist., 1962, v. 33, № 3, p. 887–893.
12. Казан Ж.-П. Случайные функциональные ряды. М.: Мир, 1973, 304 с.
13. Matsak I. K., Plichko A. M. On maximums of independent random variables in a function Banach lattice. — Probab. Math. Statist., 1997, v. 17.
14. Choi Bong Dac, Sung Soo Hak. On moment conditions for the supremum of normed sum. — Stochastic Process. Appl., 1987, v. 26, № 1, p. 99–106.
15. Chobanjan S. A., Tarieladze V. I. A counterexample concerning the CLT in Banach space. — Lecture Notes in Math., 1978, v. 656, p. 25–30.

Поступила в редакцию
17.IV.1998

© 1999 г.

ALIEV F. A.*

NEW CHARACTERIZATION OF DISCRETE DISTRIBUTIONS THROUGH WEAK RECORDS

Пусть $X_1, X_2, \dots$ — последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин, принимающих значения $0, 1, \dots$, с функцией распределения F такой, что $F(n) < 1$ для любого $n = 0, 1, \dots$ и $EX_1 \ln(1 + X_1) < \infty$. Пусть $X_{L(n)}$ есть значение n -го слабого рекорда, а $\{A_k\}_{k=0}^{\infty}$ — последовательность положительных чисел такая, что

* Ankara University, Faculty of Science, Department of Statistics, Turkey; Baku State University, Faculty of Applied Mathematics, Azerbaijan; e-mail: aliev@science.ankara.edu.tr