Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. М. Зубков, Рецензия на книгу Newman Charles M.
“Topics in Disordered Systems”, *Теория вероятн. и ее
примен.*, 1999, том 44, выпуск 4, 886–887

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp1077>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.81.137.203

26 апреля 2023 г., 16:52:56

© 1999 г.

КРИТИКА И БИБЛИОГРАФИЯ

Newman Charles M. Topics in Disordered Systems. Basel: Birkhäuser, 1997. viii+88 p.

Книга представляет собой обработку курса из 11 лекций, который был прочитан ее автором весной 1996 г. в Электротехническом университете г. Цюриха. В ней рассматривается важный класс вероятностных моделей статистической механики, а именно, модели Изинга неоднородных сред с независимыми одинаково распределенными попарными взаимодействиями. Обычно предполагается, что частицы расположены в конечном множестве Λ узлов целочисленной d -мерной решетки $\mathbb{Z}^d$ и что каждая частица может находиться в одном из двух состояний: $+1$ и -1 . Множество возможных состояний совокупности частиц, находящихся в конечном множестве $\Lambda \subset \mathbb{Z}^d$, совпадает с $S_\Lambda = \{-1, +1\}^\Lambda$. Считается, что соседние (находящиеся на расстоянии 1) частицы взаимодействуют друг с другом так, что каждой конфигурации $s = \{s_x, x \in \Lambda\}$ (при отсутствии дополнительных граничных условий) соответствует гамильтониан

$$H_\Lambda(s) = - \sum_{\substack{x, y \in \Lambda \\ |x-y|=1}} J_{\{x, y\}}^\Lambda s_x s_y,$$

где действительные числа $J_{\{x, y\}}^\Lambda$ интерпретируются как взаимодействие между частицами, находящимися в точках x и y . Основными состояниями называются конфигурации s , минимизирующие гамильтониан $H_\Lambda(s)$. На множестве S_Λ возможных состояний системы частиц задается вероятностное распределение P_Λ , в котором вероятность каждого состояния $s \in S_\Lambda$ пропорциональна $\exp\{-\beta H_\Lambda(s)\}$; параметр β интерпретируется как температура.

При $\Lambda \rightarrow \mathbb{Z}^d$ распределения P_Λ сходятся к так называемым гиббсовским распределениям на множестве состояний бесконечной совокупности частиц, расположенных в узлах решетки $\mathbb{Z}^d$. При $\beta \rightarrow \infty$ распределения P_Λ сходятся к равномерным распределениям на множестве основных состояний.

Модели Изинга уже несколько десятилетий интенсивно изучаются физиками и математиками. Для физиков — это простейшие модели, отражающие свойства ферромагнетиков (при $J_{\{x, y\}}^\Lambda \geq 0$) или антиферромагнетиков (при $J_{\{x, y\}}^\Lambda \leq 0$); математиков привлекают сложность связанных с моделями Изинга задач и нетривиальность свойств, в частности, возникновение фазовых переходов, т.е. резких качественных изменений предельного (при $\Lambda \rightarrow \infty$) распределения P_Λ при переходе температуры β через критические значения. Отметим, что если все $J_{\{x, y\}}^\Lambda$ принимают значения одного знака, то основными состояниями являются $s_x \equiv +1$ и $s_x \equiv -1$, поскольку именно они минимизируют гамильтониан.

В лекциях Ньюмена рассматривается случай, когда взаимодействия $J_{\{x, y\}}^\Lambda$ сами являются независимыми одинаково распределенными случайными величинами. При этом структура множеств основных состояний и гиббсовских распределений усложняется и появляется возможность описывать моделями Изинга более широкий класс физических объектов (например, симметричные распределения взаимодействий соответствуют спиновым стеклам). Особенностью книги является то, что изложение построено на систематическом использовании связей между моделями Изинга и различными видами процессов просачивания.

Курс лекций разбит на 4 части. Первая посвящена моделям неупорядоченных ферромагнетиков, в которых взаимодействия $J_{\{x, y\}}^\Lambda$ независимы, одинаково распределены и неотрицательны. Ранее была высказана гипотеза о том, что при малых

d не существует основных состояний, отличных от констант. Здесь справедливость этой гипотезы доказана для случая $d = 2$.

Во второй части рассматриваются сильно неупорядоченные системы, в которых независимые одинаково распределенные взаимодействия $J_{\{x,y\}}^{\Lambda}$ имеют симметричные распределения, а распределения $|J_{\{x,y\}}^{\Lambda}|$ существенно зависят от Λ . В двумерном случае единственность пары основных состояний выводится из известных результатов о структуре графа процесса просачивания, однако при $d \geq 3$ имеются лишь частные результаты такого рода.

В третьей части с помощью представления процессом просачивания доказано, что при достаточно высоких температурах распределение Гиббса единственно. В последней части, посвященной неупорядоченным системам при низких температурах, обсуждаются различные понятия и гипотезы, встречающиеся в физической литературе по спиновым стеклам, разрабатывается их математическая формализация, изучаются способы сходимости к термодинамическому пределу (когда $\Lambda \rightarrow \mathbb{Z}^d$) в системах, которые могут иметь много сложных основных состояний. Здесь же приводится постановка ряда нерешенных задач, представляющих интерес для развития этой теории.

Книга завершается двумя дополнениями («Бесконечные геодезические и измеримость» и «Неупорядоченные системы и метасостояния»), списком библиографии на 100 названий и предметным указателем.

Курс лекций Ч. Ньюмена полезен как интересным методическим подходом к изучаемым задачам, так и тем, что он позволяет специалистам-вероятностникам получить представление о специфическом круге задач теории неупорядоченных систем и об их связях с процессами просачивания.

А. М. Зубков

Ш и р я е в А. Н. Основы стохастической финансовой математики. Том I. Факты. Модели. Стр. I–XXI, 1–489. Том II. Теория. Стр. XXII–XXXVII, 490–1017. М.: ФАЗИС, 1998.

Мое мнение об этой книге может быть сформулировано как

Теорема. Книга имеет существенное историческое значение.

Теорему, конечно, полагается сопроводить доказательством; впрочем, доказательства теорем часто нужны не столько для того, чтобы удостовериться в их истинности, сколько для того, чтобы объяснить, что же именно утверждается в теореме. Мне не удалось найти короткого доказательства высказанной теоремы — настолько, что сразу приходится извиниться перед возможным читателем за превышение общепринятого объема журнальной рецензии. Но отчасти меня реабилитирует то обстоятельство, что в объявленной теореме утверждается (как мне кажется) довольно много. Квасиматематическая форма изложения в виде «теорем» и «лемм» (по ассоциации с «Этикой» Спинозы) позволяет в какой-то степени структурировать нижеследующий текст, для чего иной возможности я не вижу.

Итак, в монографии А. Н. Ширяева речь идет о математической теории финансовых рынков, и потому неудивительно, что доказательство начинается со следующей леммы.

Лемма 1 (социально-экономическая). *России необходим финансовый рынок.*

Аргументация пойдет от свойств денежной системы любого древнего или современного государства. Я ни в коей мере не являюсь специалистом в данном вопросе и рассуждаю в стиле дружеской беседы на кухне московской квартиры. Между прочим, из квартирной кухни видно не так уж мало. Например, из кухни видно, что никакое государство, в том числе и самое тоталитарное, никогда не было в силах отменить *денежную систему*. Наиболее знаменитая попытка — это железные деньги спартанского царя Ликурга. Впрочем, по мнению Бертрана Рассела, ни один из спартанцев не мог устоять перед взяткой, если он оказывался за границей, где его покупали за настоящие деньги.

Но денежные системы нестабильны по многим причинам: инфляция, банкротства, в том числе дефолты в государственном масштабе, и т.д. Одним из существенных источников нестабильности являются свободные денежные средства населения,