Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. Я. Шатских, Усиленный закон больших чисел для
схемы серий условных распределений эллиптически
контурированных мер, *Теория вероятн. и ее примен.*,
2005, том 50, выпуск 2, 292–311

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp108>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru
подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским согла-
шением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.6.47.48

26 апреля 2023 г., 18:24:53

© 2005 г.

ШАТСКИХ С. Я.*

УСИЛЕННЫЙ ЗАКОН БОЛЬШИХ ЧИСЕЛ ДЛЯ СХЕМЫ СЕРИЙ УСЛОВНЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКИ КОНТУРИРОВАННЫХ МЕР¹⁾

Работа посвящена изучению свойств условных распределений устойчивых эллиптически контурированных мер, заданных на вещественном гильбертовом пространстве. Рассматриваются проекции меры на возрастающую последовательность конечномерных линейных пространств, порожденных начальными отрезками ортонормированного базиса. Показано, что асимптотические свойства условных распределений, соответствующих таким проекциям меры, зависят от выбора базиса. Получены достаточные условия выбора ортонормированного базиса гильбертова пространства, при выполнении которых семейство серий условных распределений, в определенном смысле, удовлетворяет усиленному закону больших чисел.

Ключевые слова и фразы: устойчивые эллиптически контурированные меры, условные распределения, ортонормированные базисы, представление Шенберга, эквивалентные гауссовские меры, правильные операторы, сходимости почти наверное.

1. Введение и формулировка основных результатов. Рассмотрим вещественное сепарабельное гильбертово пространство $\mathbf{H}$ со скалярным произведением $\langle \cdot, \cdot \rangle$ и борелевской σ -алгеброй $\mathcal{B}(\mathbf{H})$. Пусть $\mu_\alpha \{ \cdot ; B \}$ — устойчивая эллиптически контурированная мера на $\{ \mathbf{H}, \mathcal{B}(\mathbf{H}) \}$ ($\alpha \in]0, 2]$) с характеристическим функционалом

$$\Psi_\alpha(y) = \exp \{ - \langle By, y \rangle^{\alpha/2} \}, \quad y \in \mathbf{H},$$

где $B: \mathbf{H} \rightarrow \mathbf{H}$ — линейный самосопряженный положительно определенный ядерный оператор, собственные векторы которого $\{e_n\}$ образуют ортонормированный базис (о.н.б.) в пространстве $\mathbf{H}$.

Выберем $\{f_k\}$ — произвольный о.н.б. в гильбертовом пространстве $\mathbf{H}$ и рассмотрим функцию распределения проекции меры $\mu_\alpha \{ \cdot ; B \}$ на линейную оболочку векторов $f_1, \dots, f_n$:

$$F_{1, \dots, n}^{(\alpha)}(x_1, \dots, x_n) := \mu_\alpha \left\{ h \in \mathbf{H} : \langle h, f_1 \rangle \leq x_1, \dots, \langle h, f_n \rangle \leq x_n ; B \right\}.$$

* Самарский государственный университет, ул. Академика Павлова, 1, 443011 Самара, Россия; e-mail: shatskih@ssu.samara.ru

¹⁾ Работа выполнена при поддержке гранта Президента РФ НШ-1758.2003.1.

Кроме того, рассмотрим $F_{i|1\dots i\dots n}^{(\alpha)}(x_i | x_1, \dots, \widehat{x_i}, \dots, x_n)$ — условную функцию распределения случайной величины $\langle h, f_i \rangle$ относительно системы $\langle h, f_1 \rangle, \dots, \langle h, \widehat{f_i} \rangle, \dots, \langle h, f_n \rangle$; $\widehat{}$ — знак пропуска элемента.

В связи с введенными функциями $F_{i|1\dots i\dots n}^{(\alpha)}$ возникает вопрос: в какой степени их асимптотические свойства ($n \rightarrow \infty$) зависят от выбора о.н.б. $\{f_k\}$?

Перейдем к формулировкам основных результатов. Для этого, пользуясь о.н.б. $\{f_k\}$, введем семейство ортопроекторов

$$\pi_m: \mathbf{H} \rightarrow \mathbf{H}_m, \quad (1)$$

где подпространства $\mathbf{H}_m := \text{span}\{f_1, \dots, f_m\}$, $m = 1, 2, \dots$.

Теорема 1. Если ортонормированный базис $\{f_k\}$ обладает свойством

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\langle (\pi_n B \pi_n)^{-1} f_i, f_j \rangle^2}{\langle (\pi_n B \pi_n)^{-1} f_i, f_i \rangle \langle (\pi_n B \pi_n)^{-1} f_j, f_j \rangle} \right] < +\infty, \quad (2)$$

то для любого $\alpha \in]0, 2]$ для $\mu_\alpha\{\cdot; B\}$ -почти всех $h \in \mathbf{H}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left[\Phi^{-1} \left(F_{i|1\dots i\dots n}^{(\alpha)}(h_i | h_1, \dots, \widehat{h_i}, \dots, h_n) \right) \right]^2 = 1, \quad (3)$$

где $h_j = \langle h, f_j \rangle$ и $\Phi^{-1}(\cdot)$ — функция, обратная функции стандартного гауссовского распределения $\Phi(\cdot)$.

З а м е ч а н и е. Рассматривая равенство (3) как усиленный закон больших чисел, нужно отметить, что речь идет о законе больших чисел для схемы серий, причем в пределах каждой серии случайные величины зависимы.

В том случае, когда о.н.б. $\{f_k\}$ совпадает с о.н.б. $\{e_k\}$ собственных векторов оператора B , утверждение теоремы 1 ранее было доказано автором в работе [1].

Следующая теорема дает более понятное, с вероятностной точки зрения, достаточное условие выполнения свойства (2).

Теорема 2. Если базис $\{f_k\} \subset \mathbf{H}$ является ортонормированным базисом собственных векторов ковариационного оператора $\tilde{B}$ гауссовской меры $\mu_2\{\cdot; \tilde{B}\}$, эквивалентной гауссовской мере $\mu_2\{\cdot; B\}$, то имеет место сходимость ряда (2).

Не следует думать, что для каждой меры $\mu_\alpha\{\cdot; B\}$ и для каждого о.н.б. $\{f_k\} \subset \mathbf{H}$ выполняется условие (2). В п. 5 настоящей работы приводится пример ковариационного оператора $B_0: \mathbf{H} \rightarrow \mathbf{H}$ и о.н.б. $\{f_k\} \subset \mathbf{H}$, для которых не выполняется соотношение (2), а сходимость (3) не имеет места, по крайней мере, для $\alpha = 2$.

Следует отметить, что близкие задачи выбора базиса возникают в теории вариационных методов приближенного решения операторных уравнений [2]–[4]. В этой теории при описании линейных операторов, допускающих редукцию относительно любого ортонормированного базиса гильбертова пространства, рассматривают *правильные* операторы. Предлагаемое доказательство теоремы 2 основано на том факте, что известное условие эквивалентности гауссовских мер, выраженное в терминах ковариационных операторов [5, гл. III, § 17, теорема 4], является частным случаем представления правильного оператора.

2. Обозначения. В добавление к семейству ортопроекторов $\{\pi_m\}$, определенных соотношением (1), вновь используя о.н.б. $\{f_k\} \subset \mathbf{H}$, рассмотрим семейство ортопроекторов $\{\pi_{mi}\}$:

$$\begin{aligned} \text{если } h \in \mathbf{H} \text{ и } h = \sum_{k=1}^{\infty} \langle h, f_k \rangle f_k, \\ \text{то } \pi_{mi}h = \sum_{k=1, k \neq i}^m \langle h, f_k \rangle f_k, \quad m = 1, 2, \dots, \quad 1 \leq i \leq m. \end{aligned}$$

Заметим, что у оператора $(\pi_m B \pi_m): \mathbf{H}_m \rightarrow \mathbf{H}_m$ (ввиду того, что $\ker B = \{0\}$) существует обратный. Матрицу этого оператора в базисе $\{f_k\}_{k=1, \dots, m}$ обозначим следующим образом:

$$B_m^{-1} = [\langle (\pi_m B \pi_m)^{-1} f_i, f_j \rangle] = [b_{(m)}^{ij}], \quad i, j = 1, \dots, m.$$

Введем обозначения для следующих квадратичных форм:

$$s_n^2(h) := \frac{1}{n} \langle (\pi_n B \pi_n)^{-1} \pi_n h, \pi_n h \rangle, \quad (4)$$

$$s_{n,i}^2(h) := \frac{1}{n-1} \langle (\pi_{ni} B \pi_{ni})^{-1} \pi_{ni} h, \pi_{ni} h \rangle, \quad (5)$$

$$q_n^2(h) := \frac{1}{n} \left\langle (\pi_n B \pi_n)^{-1} [\operatorname{diag}(\pi_n B \pi_n)^{-1}]^{-1} (\pi_n B \pi_n)^{-1} \pi_n h, \pi_n h \right\rangle, \quad (6)$$

где $\operatorname{diag}(\pi_n B \pi_n)^{-1}$ — конечномерный линейный оператор с диагональной в базисе $(f_1, \dots, f_n)$ матрицей $\operatorname{diag}\{b_{(n)}^{11}, b_{(n)}^{22}, \dots, b_{(n)}^{nn}\}$.

Приведем несколько удобных формул для квадратичной формы $q_n^2(h)$:

$$q_n^2(h) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{b_{(n)}^{ii}} \left(\sum_{k=1}^n b_{(n)}^{ik} h_k \right)^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{\langle (\pi_n B \pi_n)^{-1} f_i, h \rangle^2}{\langle (\pi_n B \pi_n)^{-1} f_i, f_i \rangle}. \quad (7)$$

Далее, учитывая формулу условной гауссовской плотности (теорема о нормальной корреляции [6, гл. 24, п. 24.6], [7, гл. II, § 13, теорема 2]),

будем иметь

$$\begin{aligned} \frac{1}{b_{(n)}^{ii}} \left(\sum_{k=1}^n b_{(n)}^{ik} h_k \right)^2 &= \langle (\pi_n B \pi_n)^{-1} \pi_n h, \pi_n h \rangle - \langle (\pi_{ni} B \pi_{ni})^{-1} \pi_{ni} h, \pi_{ni} h \rangle \\ &= \frac{[h_i - m_i(h^{(n)}(\hat{i}))]^2}{\sigma_n^2(\hat{i})}, \end{aligned}$$

где $m_i(h^{(n)}(\hat{i}))$, $\sigma_n^2(\hat{i})$ — условное среднее и условная дисперсия.

Таким образом,

$$q_n^2(h) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n [n s_n^2(h) - (n-1) s_{n,i}^2(h)]. \quad (8)$$

Примем обозначения для множества сходимости и предельной случайной величины последовательности квадратичных форм $\{s_n^2(h)\}$:

$$s_\infty^2(h) := \lim_{n \rightarrow \infty} s_n^2(h), \quad \Gamma := \{h \in \mathbf{H} : 0 < s_\infty^2(h) < +\infty\}.$$

Будем обозначать через $\mathbf{E}_2\{\cdot\}$ математическое ожидание по гауссовской мере

$$\mu_2\{\cdot; B\} : \mathbf{E}_2\{Z(h)\} := \int_{\mathbf{H}} Z(h) \mu_2\{dh; B\}.$$

3. Вспомогательные утверждения. Сделаем несколько кратких замечаний о структуре этого пункта. В лемме 1 мы приводим явный вид представления Шенберга функций $F_{1\dots n}^{(\alpha)}$, с помощью которого дается представление условных распределений $F_{i|1\dots i\dots n}^{(\alpha)}$ в виде непрерывной смеси гауссовских. Это представление позволяет устанавливать справедливость утверждений, относящихся к эллиптически контурированным устойчивым мерам, на основе соответствующих утверждений для гауссовских мер. В лемме 2 доказана δ -образность вспомогательной последовательности $h_{n-1}^{(\alpha)}$. Этот факт является основой для «принципа локализации», используемого при доказательстве леммы 3.

Лемма 1 (представление Шенберга). *Справедливы следующие равенства:*

$$\begin{aligned} 1^\circ. \exp\{-\langle By, y \rangle^{\alpha/2}\} \\ = \int_0^\infty \exp\left\{-\frac{1}{2} \langle u^2 By, y \rangle\right\} g\left(\frac{u^2}{2}; \frac{\alpha}{2}, 1\right) u \, du; \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} 2^\circ. F_{1\dots n}^{(\alpha)}(x_1, \dots, x_n) &= \int_0^\infty \mu_2\left\{\langle h, f_1 \rangle \leq x_1, \dots, \langle h, f_n \rangle \leq x_n; u^2 B\right\} \\ &\quad \times g\left(\frac{u^2}{2}; \frac{\alpha}{2}, 1\right) u \, du, \end{aligned} \quad (10)$$

где $g(\cdot; a, 1)$ — плотность одномерного крайнего устойчивого распределения с показателем $a \in]0, 1[$ (см. [8, гл. 2, п. 2.5]);

$$\begin{aligned} 3^\circ. \quad & F_{i|1\dots i\dots n}^{(\alpha)}(h_i | h_1, \dots, \hat{h}_i, \dots, h_n) \\ &= \int_0^\infty \Phi\left(\left[\frac{ns_n^2(h) - (n-1)s_{n,i}^2(h)}{z}\right]^{1/2}\right) h_{n-1}^{(\alpha)}(s_{n,i}^2(h), z) dz, \quad (11) \end{aligned}$$

где

$$h_m^{(\alpha)}(t, z) = \frac{\exp[-(m/2)(t/z + \ln z)] g(z/2; \alpha/2, 1)}{\int_0^\infty \exp[-(m/2)(t/u + \ln u)] g(u/2; \alpha/2, 1) du}. \quad (12)$$

Доказательство. 1°. Формула (9) сразу следует из известного соотношения (см. [8, гл. 2, п. 2.10], [9, т. 2, гл. XIII, § 6])

$$\exp(-\rho^\alpha) = \int_0^\infty \exp(-\rho^2 v) g\left(v; \frac{\alpha}{2}, 1\right) dv, \quad \alpha \in]0, 2[.$$

2°. Используя известную формулу для характеристического функционала гауссовской меры, можно утверждать, что выражения (9) и (10) связаны преобразованием Фурье–Стилтьеса. Поэтому справедливость этого пункта следует из теоремы единственности для характеристических функций.

3°. Обозначим через $f_{1\dots n}^{(\alpha)}(x_1, \dots, x_n)$ плотность распределения $F_{1\dots n}^{(\alpha)}(x_1, \dots, x_n)$. Тогда из формулы (9) получаем

$$\begin{aligned} f_{1\dots n}^{(\alpha)}(x_1, \dots, x_n) &= \frac{1}{(2\pi)^{n/2} (\det B_n)^{1/2}} \\ &\times \int_0^\infty \frac{1}{u^n} \exp\left\{-\frac{1}{2u^2} \langle (\pi_n B \pi_n)^{-1} \pi_n x, \pi_n x \rangle\right\} g\left(\frac{u^2}{2}; \frac{\alpha}{2}, 1\right) u du. \end{aligned}$$

Отсюда, записывая выражение для условных плотностей в виде отношения безусловных и применяя теорему о нормальной корреляции, с учетом обозначений (4)–(6) будем иметь:

$$\begin{aligned} & f_{i|1\dots i\dots n}^{(\alpha)}(x_i | x_1, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_n) \\ &= \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_n(\hat{i}) u} \exp\left\{-\frac{[x_i - m_i(x^{(n)}(\hat{i}))]^2}{2\sigma_n^2(\hat{i}) u^2}\right\} \\ &\times \frac{\exp\{-(n-1)[s_{n,i}^2(x)/u^2 + \ln u^2]/2\} g(u^2/2; \alpha/2, 1) u}{\int_0^\infty \exp\{-(n-1)[s_{n,i}^2(x)/v^2 + \ln v^2]/2\} g(v^2/2; \alpha/2, 1) v dv} du. \end{aligned}$$

Таким образом, используя обозначение (12), получаем

$$\begin{aligned} & F_{i|1\dots i\dots n}^{(\alpha)}(h_i | h_1, \dots, \hat{h}_i, \dots, h_n) \\ &= \int_0^\infty \Phi\left(\left[\frac{ns_n^2(h) - (n-1)s_{n,i}^2(h)}{z}\right]^{1/2}\right) h_{n-1}^{(\alpha)}(s_{n,i}^2(h), z) dz. \end{aligned}$$

Лемма 1 доказана.

Лемма 2. Если $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_\infty > 0$, то последовательность $\{h_{n-1}^{(\alpha)}(x_n, z)\}$ является δ -образной:

- 1°. $h_{n-1}^{(\alpha)}(x_n, z) > 0$ при $z > 0$;
- 2°. $\lim_{n \rightarrow \infty} h_{n-1}^{(\alpha)}(x_n, x_n) = +\infty$;
- 3°. $\int_0^\infty h_{n-1}^{(\alpha)}(x_n, z) dz \equiv 1$;
- 4°. $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\tau_n^-}^{\tau_n^+} h_{n-1}^{(\alpha)}(x_n, z) dz = 1$, где $\tau_n^\pm = x_n \pm \sqrt{2} x_n n^{-1/4}$;
- 5°. $\int_{\tau_n^+}^\infty h_{n-1}^{(\alpha)}(x_n, z) dz = O((n-1)^{1/2} \exp[-(n-1)^{1/2}/4])$.

Доказательство. Соотношения 1° и 3° очевидны. Что касается пп. 2°, 4°, 5°, то их справедливость устанавливается с помощью метода Лапласа нахождения асимптотики интегралов (см. [10, гл. II, § 2, п. 2, теорема 2.2]). При этом доказывается, что $[\tau_n^-, \tau_n^+]$ — отрезок влияния точки максимума $z = x_n$ функции $h_{n-1}^{(\alpha)}(x_n, z)$. Подробное доказательство этой леммы приведено в работе [1].

Рассмотрим последовательность вспомогательных функций

$$A_n(u; x) = \frac{1}{u} \Phi^{-1} \left(\int_0^\infty \Phi \left(\frac{u}{\sqrt{z}} \right) h_{n-1}^{(\alpha)}(x, z) dz \right), \quad (13)$$

считая $u > 0$, $x \geq 0$, $n = 1, 2, \dots$, а функцию $h_{n-1}^{(\alpha)}(\cdot, \cdot)$ определенной соотношением (12).

Лемма 3. 1°. Если у последовательности неотрицательных чисел $\{x_n\}$ существует $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_\infty > 0$, то для любой последовательности положительных чисел $\{u_n\}$ выполняется неравенство

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} A_n(u_n; x_n) \leq \frac{1}{x_\infty^{1/2}}. \quad (14)$$

2°. Если у последовательности неотрицательных чисел $\{x_n\}$ существует $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_\infty > 0$, а для последовательности $\{u_n\}$ выполняется неравенство $0 < u_n < n^{1/k}$ ($k = \text{const} \geq 5$, $\forall n > N_k$), то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_n(u_n; x_n) = \frac{1}{x_\infty^{1/2}}. \quad (15)$$

Доказательства утверждений этой леммы приведены в работе [1] (леммы 10 и 11). Дадим краткое изложение этих доказательств. Прежде всего следует отметить, что неравенство (14) является следствием неравенства Иенсена

$$A_n(u_n; x_n) \leq \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{z}} h_{n-1}^{(\alpha)}(x_n, z) dz$$

и «фильтрующего» свойства δ -образной последовательности:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{z}} h_{n-1}^{(\alpha)}(x_n, z) dz = \frac{1}{x_\infty^{1/2}}.$$

Ограничимся изложением доказательства равенства (15) в случае, когда $\lim_{m \rightarrow \infty} u_{n_m} = +\infty$, поскольку только в этом случае используется ограничение на рост последовательности $\{u_n\}$.

Учитывая утверждение п. 1°, для доказательства соотношения (15) достаточно установить неравенство

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_n(u_n; x_n) \geq \frac{1}{x_\infty^{1/2}}.$$

Для этого вначале, используя теорему о среднем, покажем, что

$$A_n(u_n; x_n) \geq \frac{1}{u_n} \Phi^{-1} \left(1 - \left[1 - \Phi \left(\frac{u_n}{\sqrt{\tau_n^*}} \right) \right] - \int_{\tau_n^+}^{\infty} h_{n-1}^{(\alpha)}(x_n, z) dz \right), \quad (16)$$

где $\tau_n^* \in [\tau_n^-, \tau_n^+]$.

Далее, применяя известную асимптотическую формулу (см. [9, т. 1, гл. VII, § 1, лемма 2])

$$1 - \Phi \left(\frac{u_n}{\sqrt{\tau_n^*}} \right) \sim \frac{\sqrt{\tau_n^*}}{u_n} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \left(-\frac{u_n^2}{2\tau_n^*} \right) \quad (n \rightarrow +\infty)$$

и п. 5° леммы 2, с учетом ограничений $0 < u_n < n^{1/k}$, $k \geq 5$, получаем равенство

$$\frac{\int_{\tau_n^+}^{\infty} h_{n-1}^{(\alpha)}(x_n, z) dz}{1 - \Phi(u_n/\sqrt{\tau_n^*})} = O \left(n^{(2+k)/k} \exp \left[-\frac{(n-1)^{1/2}}{8} \right] \right).$$

Используя это соотношение, неравенство (16) можно переписать в виде

$$A_n(u_n; x_n) \geq \frac{1}{u_n} \Phi^{-1} \left(1 - \left[1 - \Phi \left(\frac{u_n}{\sqrt{\tau_n^*}} \right) \right] [1 + o(1)] \right). \quad (17)$$

Обозначим

$$\eta_n = \left[1 - \Phi \left(\frac{u_n}{\sqrt{\tau_n^*}} \right) \right] [1 + o(1)],$$

тогда неравенство (17) принимает вид

$$A_n(u_n; x_n) \geq \frac{1}{\sqrt{\tau_n^*}} \frac{\Phi^{-1}(1 - \eta_n)}{\Phi^{-1}(1 - \eta_n/(1 + o(1)))}.$$

Но так как $\eta_n \rightarrow 0$ и $\tau_n^* \rightarrow x_\infty$ при $n \rightarrow +\infty$, а

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\Phi^{-1}(1 - \eta_n)}{\Phi^{-1}(1 - \eta_n/(1 + o(1)))} = 1,$$

то $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n(u_n; x_n) \geq 1/x_\infty^{1/2}$. Лемма 3 доказана.

Лемма 4. Последовательности $s_n^2(h)$ и $s_{n,i(n)}^2(h)$ обладают относительно гауссовской меры $\mu_2\{\cdot; B\}$ следующими свойствами.

1°. Для почти всех $h \in \mathbf{H}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n^2(h) = 1.$$

2°. Для любой последовательности натуральных чисел $i(n)$ ($1 \leq i(n) \leq n$) и для почти всех $h \in \mathbf{H}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_{n,i(n)}^2(h) = 1.$$

Доказательство. Вначале приведем квадратичные формы $s_n^2(h)$ к сумме квадратов. Для этого введем вспомогательную последовательность линейных функционалов

$$\xi_i^{(n)}(h) := \langle (\pi_n B \pi_n)^{-1/2} f_i, h \rangle, \quad i = 1, \dots, n. \quad (18)$$

Относительно гауссовской меры $\mu_2\{\cdot; B\}$ эти функционалы образуют последовательность независимых $(0, 1)$ -гауссовских случайных величин. Далее, так как

$$(\pi_n B \pi_n)^{-1/2} \pi_n h = \sum_{i=1}^n \xi_i^{(n)}(h) f_i,$$

то

$$\langle (\pi_n B \pi_n)^{-1} \pi_n h, \pi_n h \rangle = \langle (\pi_n B \pi_n)^{-1/2} \pi_n h, (\pi_n B \pi_n)^{-1/2} \pi_n h \rangle = \sum_{i=1}^n \xi_i^{(n)}(h)^2.$$

Следовательно,

$$s_n^2(h) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \xi_i^{(n)}(h)^2.$$

Для доказательства п. 1° осталось воспользоваться усиленным законом больших чисел в форме Кантелли [7, гл. IV, § 3, теорема 1]. В самом деле, используя признак сходимости почти наверное и неравенство Чебышева, будем иметь

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{\infty} \mu_2 \left\{ \frac{1}{n} \left| \sum_{i=1}^n [\xi_i^{(n)}(h)^2 - 1] \right| > \varepsilon; B \right\} \\ & \leq \frac{1}{\varepsilon^4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} \mathbf{E}_2 \left\{ \left(\sum_{i=1}^n [\xi_i^{(n)}(h)^2 - 1] \right)^4 \right\} \\ & = \frac{1}{\varepsilon^4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} \left[\sum_{i=1}^n \mathbf{E}_2 \{ (\xi_i^{(n)}(h)^2 - 1)^4 \} \right. \\ & \quad \left. + 6 \sum_{i,j=1, i < j}^n \mathbf{E}_2 \{ [\xi_i^{(n)}(h)^2 - 1]^2 \} \mathbf{E}_2 \{ [\xi_j^{(n)}(h)^2 - 1]^2 \} \right] \\ & = \frac{1}{\varepsilon^4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} [60n + 12n(n-1)] < +\infty. \end{aligned}$$

2°. Как было показано выше (см. формулы (7) и (8)),

$$s_n^2(h) - \frac{n-1}{n} s_{n,i(n)}^2(h) = \frac{1}{n} \frac{\langle (\pi_n B \pi_n)^{-1} f_{i(n)}, h \rangle^2}{\langle (\pi_n B \pi_n)^{-1} f_{i(n)}, f_{i(n)} \rangle}.$$

Нетрудно показать, что относительно гауссовской меры $\mu_2\{\cdot; B\}$ случайные величины

$$\frac{\langle (\pi_n B \pi_n)^{-1} f_{i(n)}, h \rangle}{\langle (\pi_n B \pi_n)^{-1} f_{i(n)}, f_{i(n)} \rangle^{1/2}}, \quad n = 1, 2, \dots,$$

являются $(0, 1)$ -гауссовскими. Поэтому, используя неравенство Чебышева, для любого $\varepsilon > 0$ получаем

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{\infty} \mu_2 \left\{ s_n^2(h) - \frac{n-1}{n} s_{n,i(n)}^2(h) > \varepsilon; B \right\} \\ & \leq \frac{1}{\varepsilon^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \mathbf{E}_2 \left\{ \frac{\langle (\pi_n B \pi_n)^{-1} f_{i(n)}, h \rangle^4}{\langle (\pi_n B \pi_n)^{-1} f_{i(n)}, f_{i(n)} \rangle^2} \right\} = \frac{1}{\varepsilon^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{n^2} < +\infty. \end{aligned}$$

Следовательно, для $\mu_2\{\cdot; B\}$ -почти всех $h \in \mathbf{H}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[s_n^2(h) - \frac{n-1}{n} s_{n,i(n)}^2(h) \right] = 0,$$

и, таким образом, п. 2° следует из п. 1°. Лемма доказана.

З а м е ч а н и е. Можно показать, что последовательность случайных величин $\{ns_n^2(h) - n\}$, $h \in \mathbf{H}$, $n = 1, 2, \dots$, образует квадратично интегрируемый мартингал с квадратической характеристикой, равной $2n$.

Лемма 5. Для того чтобы последовательность квадратичных форм $\{q_n^2(h)\}$ сходилась по гауссовской мере $\mu_2\{\cdot; B\}$ к единице, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\langle (\pi_n B \pi_n)^{-1} f_i, f_j \rangle^2}{\langle (\pi_n B \pi_n)^{-1} f_i, f_i \rangle \langle (\pi_n B \pi_n)^{-1} f_j, f_j \rangle} = 0. \quad (19)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Достаточность условия (19) следует из неравенства Чебышева, так как по известным формулам для интегралов по гауссовским мерам (см. [11, гл. II, § 2, п. 3])

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_2\{q_n^2(h)\} &= \frac{1}{n} \operatorname{tr}(\pi_n B \pi_n)^{-1} [\operatorname{diag}(\pi_n B \pi_n)^{-1}]^{-1} = 1; \\ \mathbf{E}_2\{[q_n^2(h) - 1]^2\} &= \mathbf{E}_2\{q_n^4(h)\} - 1 \\ &= \frac{2}{n^2} \operatorname{tr} \left\{ (\pi_n B \pi_n)^{-1} [\operatorname{diag}(\pi_n B \pi_n)^{-1}]^{-1} \right\}^2 \\ &= \frac{2}{n^2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\langle (\pi_n B \pi_n)^{-1} f_i, f_j \rangle^2}{\langle (\pi_n B \pi_n)^{-1} f_i, f_i \rangle \langle (\pi_n B \pi_n)^{-1} f_j, f_j \rangle}. \quad (20) \end{aligned}$$

Докажем необходимость условия (19). С одной стороны, справедливость этого условия можно установить, вычисляя $\psi_n(t)$ — характеристические функции квадратичных форм $q_n^2(h)$ и рассматривая сходимость

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \psi_n(t) = e^{it}, \quad \forall t \in]-\infty, +\infty[.$$

С другой стороны, утверждение леммы 5 следует из соотношений (20) ввиду того известного факта, что последовательность многочленов второго (или даже большего) порядка сходится по гауссовской мере $\mu_2\{\cdot; B\}$ тогда и только тогда, когда она сходится по норме в пространствах $\mathbf{L}^p(\mu_2\{\cdot; B\})$ для всех $p \in [1, \infty[$ (см. [12, п. 5.6.5]). Лемма доказана.

Лемма 6. Если сходится ряд (2), то для $\mu_2\{\cdot; B\}$ -почти всех $h \in \mathbf{H}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} q_n^2(h) = 1.$$

Доказательство. Запишем разложение квадратичной формы $nq_n^2(h)$ по системе (18) случайных величин $\{\xi_i^{(n)}(h)\}$:

$$\begin{aligned} nq_n^2(h) &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left\langle (\pi_n B \pi_n)^{-1/2} [\text{diag}(\pi_n B \pi_n)^{-1}]^{-1} (\pi_n B \pi_n)^{-1/2} f_i, f_j \right\rangle \\ &\quad \times \xi_i^{(n)}(h) \xi_j^{(n)}(h). \end{aligned}$$

Введем сокращающее обозначение

$$D_n = (\pi_n B \pi_n)^{-1/2} [\text{diag}(\pi_n B \pi_n)^{-1}]^{-1} (\pi_n B \pi_n)^{-1/2}$$

и воспользуемся (см. [13, гл. 4, §§ 1, 3]) представлением квадратичной формы $nq_n^2(h)$ в виде суммы мартингал-разностей:

$$nq_n^2(h) - n = \sum_{k=1}^n \gamma_{kn}(h),$$

где

$$\gamma_{kn}(h) = \langle D_n f_k, f_k \rangle \{[\xi_k^{(n)}(h)]^2 - 1\} + 2 \xi_k^{(n)}(h) \sum_{j=k+1}^n \langle D_n f_k, f_j \rangle \xi_j^{(n)}(h).$$

Вычислим моменты величин $\gamma_{kn}(h)$: $\mathbf{E}_2\{\gamma_{kn}(h)\} \equiv 0$;

$$\mathbf{E}_2\{\gamma_{kn}^2(h)\} = 2 \langle D_n f_k, f_k \rangle^2 + 4 \sum_{j=k+1}^n \langle D_n f_k, f_j \rangle^2; \quad (21)$$

$$\mathbf{E}_2\{\gamma_{in}(h) \gamma_{jn}(h)\} = 0, \quad i \neq j; \quad (22)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_2\{\gamma_{kn}^4(h)\} &= 60 \langle D_n f_k, f_k \rangle^4 + 240 \langle D_n f_k, f_k \rangle^2 \sum_{j=k+1}^n \langle D_n f_k, f_j \rangle^2 \\ &\quad + 144 \left(\sum_{j=k+1}^n \langle D_n f_k, f_j \rangle^2 \right)^2. \end{aligned} \quad (23)$$

Теперь воспользуемся усиленным законом больших чисел в форме Кантелли для сумм мартингал-разностей (см. [13, гл. 4, § 10]): если для каждого натурального n случайные величины $\{\xi_i^{(n)}(h)\}_{i=1, \dots, n}$ независимы и

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n \sqrt{\mathbf{E}_2 \{\gamma_{kn}^4(h)\}} \right)^2 < +\infty, \quad (24)$$

то почти наверное по мере $\mu_2\{\cdot; B\}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} q_n^2(h) = 1.$$

Покажем, что из условия (2) следует (24). В самом деле, из соотношений (21) и (23) получаем неравенство

$$\mathbf{E}_2 \{\gamma_{kn}^4(h)\} \leq 60 \left[\langle D_n f_k, f_k \rangle^2 + 2 \sum_{j=k+1}^n \langle D_n f_k, f_j \rangle^2 \right]^2 = 15 \mathbf{E}_2 \{\gamma_{kn}^2(h)\}^2.$$

Отсюда, учитывая (20) и (22), будем иметь

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \sqrt{\mathbf{E}_2 \{\gamma_{kn}^4(h)\}} &\leq \sqrt{15} \sum_{k=1}^n \mathbf{E}_2 \{\gamma_{kn}^2(h)\} = \sqrt{15} \mathbf{E}_2 \{[nq_n^2(h) - n]^2\} \\ &= 2\sqrt{15} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\langle (\pi_n B \pi_n)^{-1} f_i, f_j \rangle^2}{\langle (\pi_n B \pi_n)^{-1} f_i, f_i \rangle \langle (\pi_n B \pi_n)^{-1} f_j, f_j \rangle}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n \sqrt{\mathbf{E}_2 \{\gamma_{kn}^4(h)\}} \right)^2 \\ \leq 60 \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\langle (\pi_n B \pi_n)^{-1} f_i, f_j \rangle^2}{\langle (\pi_n B \pi_n)^{-1} f_i, f_i \rangle \langle (\pi_n B \pi_n)^{-1} f_j, f_j \rangle} \right]^2. \end{aligned}$$

Лемма доказана.

Лемма 7. Для любого $\alpha \in]0, 2[$ предельная случайная величина $s_{\infty}^2(h)$ обладает следующими свойствами.

1°. Для $\mu_{\alpha}\{\cdot; B\}$ -почти всех $h \in \mathbf{H}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n^2(h) = s_{\infty}^2(h).$$

2°. Для любой последовательности натуральных чисел $i(n)$ ($1 \leq i(n) \leq n$) и для $\mu_{\alpha}\{\cdot; B\}$ -почти всех $h \in \mathbf{H}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_{n, i(n)}^2(h) = s_{\infty}^2(h).$$

3°. При выполнении условия (2) для $\mu_\alpha\{\cdot; B\}$ -почти всех $h \in \mathbf{H}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} q_n^2(h) = s_\infty^2(h).$$

$$4^\circ. \mu_\alpha\{s_\infty^2(h) \leq u; B\} = \int_0^{u/2} g(t; \alpha/2, 1) dt.$$

Доказательство. 1°. Выберем произвольное $\sigma > 0$ и рассмотрим $\mu_2\{\cdot; \sigma^2 B\}$ — гауссовскую меру с нулевым средним и ковариационным оператором $\sigma^2 B$. Из леммы 4 следует, что при $n \rightarrow +\infty$

$$s_n^2(h) \rightarrow \sigma^2 \quad \text{п.н. по мере } \mu_2\{\cdot; \sigma^2 B\}. \quad (25)$$

Таким образом (см. [7, гл. II, § 10, п. 3, теорема 1]), для любых $\sigma > 0$ и $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu_2\left\{\sup_{k \geq 0} |s_{n+k}^2(h) - s_n^2(h)| > \varepsilon; \sigma^2 B\right\} = 0.$$

Отсюда, используя представление Шенберга (10), получаем фундаментальность п.н. последовательности $\{s_n^2(h)\}$ по устойчивой мере $\mu_\alpha\{\cdot; B\}$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu_\alpha\left\{\sup_{k \geq 0} |s_{n+k}^2(h) - s_n^2(h)| > \varepsilon; B\right\} = 0.$$

Следовательно, можно утверждать (см. [7, гл. II, § 10, п. 5, теорема 4]), что существуют $\mathcal{B}(\mathbf{H})$ -измеримая случайная величина $s_{\infty, \alpha}^2(h)$ и множество сходимости $\Gamma_\alpha \in \mathcal{B}(\mathbf{H})$ такие, что $\mu_\alpha\{\Gamma_\alpha; B\} = 1$ и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n^2(h) = s_{\infty, \alpha}^2(h), \quad \forall h \in \Gamma_\alpha.$$

С другой стороны, $\Gamma_\alpha \subseteq \Gamma$, $s_{\infty, \alpha}^2(h) = s_\infty^2(h)$, $h \in \Gamma_\alpha$ и $\mu_\alpha\{\Gamma; B\} = 1$.

Можно считать, что $s_{\infty, \alpha}^2(h) > 0$ для любого $h \in \Gamma_\alpha$, так как $\mu_\alpha\{s_{\infty, \alpha}^2(h) = 0; B\} = 0$ (см. п. 4° этой леммы).

2°. На основании п. 2° леммы 4 можно утверждать, что для любого $\sigma > 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [s_n^2(h) - s_{n, i(n)}^2(h)] = 0 \quad \text{п.н. по мере } \mu_2\{\cdot; \sigma^2 B\}.$$

Повторяя рассуждения п. 1°, получаем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [s_n^2(h) - s_{n, i(n)}^2(h)] = 0 \quad \text{п.н. по мере } \mu_\alpha\{\cdot; B\}.$$

Теперь доказательство п. 2° следует из п. 1° настоящей леммы.

3°. На основании леммы 6 можно утверждать, что для любого $\sigma > 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [s_n^2(h) - q_n^2(h)] = 0 \quad \text{п.н. по мере } \mu_2\{\cdot; \sigma^2 B\}.$$

Далее доказательство буквально повторяет рассуждения п. 2°.

4°. Как следует из (25), для любого $\sigma > 0$

$$\mu_2\{s_\infty^2(h) \leq u; \sigma^2 B\} = \begin{cases} 0, & \text{когда } u < \sigma^2, \\ 1, & \text{когда } u > \sigma^2. \end{cases}$$

Поэтому, вновь пользуясь представлением Шенберга (10), получаем:

$$\mu_\alpha\{s_\infty^2(h) \leq u; B\} = \int_0^{\sqrt{u}} g\left(\frac{\sigma^2}{2}; \frac{\alpha}{2}, 1\right) \sigma d\sigma = \int_0^{u/2} g\left(t; \frac{\alpha}{2}, 1\right) dt.$$

Лемма доказана.

Лемма 8. Для любого натурального k

$$\mu_\alpha\left\{\bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcap_{n=m}^{\infty} \left\{h: \sup_{i=1, \dots, n} \frac{\langle (\pi_n B \pi_n)^{-1} f_i, h \rangle^2}{\langle (\pi_n B \pi_n)^{-1} f_i, f_i \rangle} \leq n^{2/k}\right\}; B\right\} = 1.$$

Доказательство. Установим справедливость утверждения леммы вначале для гауссовской меры $\mu_2\{\cdot; s^2 B\}$, $s > 0$.

Обозначим для краткости:

$$W_n^{(k)} := \left\{h: \sup_{i=1, \dots, n} \frac{\langle (\pi_n B \pi_n)^{-1} f_i, h \rangle^2}{\langle (\pi_n B \pi_n)^{-1} f_i, f_i \rangle} \leq n^{2/k}\right\}, \quad V_k := \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcap_{n=m}^{\infty} W_n^{(k)}.$$

Тогда из включений

$$\bigcap_{n=m}^{\infty} W_n^{(k)} \subseteq \bigcap_{n=m+1}^{\infty} W_n^{(k)}, \quad m = 1, 2, \dots,$$

следует равенство

$$\mu_2\{V_k; s^2 B\} = \lim_{m \rightarrow \infty} \mu_2\left\{\bigcap_{n=m}^{\infty} W_n^{(k)}; s^2 B\right\}.$$

Далее, переходя к дополнениям, получаем

$$\mu_2\left\{\bigcap_{n=m}^{\infty} W_n^{(k)}; s^2 B\right\} \geq 1 - \sum_{n=m}^{\infty} \mu_2\left\{\overline{W_n^{(k)}}; s^2 B\right\}. \quad (26)$$

Установим сходимость ряда в правой части (26). Так как

$$\begin{aligned} \mu_2\left\{\overline{W_n^{(k)}}; s^2 B\right\} &= \mu_2\left\{h: \sup_{i=1, \dots, n} \frac{\langle (\pi_n B \pi_n)^{-1} f_i, h \rangle^2}{\langle (\pi_n B \pi_n)^{-1} f_i, f_i \rangle} > n^{2/k}; s^2 B\right\} \\ &\leq \sum_{i=1}^n \mu_2\left\{h: \frac{\langle (\pi_n B \pi_n)^{-1} f_i, h \rangle^2}{\langle (\pi_n B \pi_n)^{-1} f_i, f_i \rangle} > n^{2/k}; s^2 B\right\} \\ &= \sum_{i=1}^n 2 \left[1 - \Phi\left(\frac{n^{1/k}}{s}\right)\right] = 2n \left[1 - \Phi\left(\frac{n^{1/k}}{s}\right)\right], \end{aligned}$$

то, пользуясь известным неравенством (см. [9, т. 1, гл. VII, § 1, лемма 2])

$$1 - \Phi(u) < u^{-1} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-u^2/2} \quad (u > 0),$$

будем иметь:

$$\sum_{n=m}^{\infty} \mu_2 \left\{ \overline{W_n^{(k)}}; s^2 B \right\} \leq \sqrt{\frac{2}{\pi}} s \sum_{n=m}^{\infty} n^{1-1/k} \exp \left\{ -\frac{n^{2/k}}{2s^2} \right\} < +\infty$$

для любого $s > 0$. Теперь можно перейти к пределу в неравенстве (26). Тогда для любого $s > 0$ получаем

$$\mu_2 \{V_k; s^2 B\} \geq 1 - \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{n=m}^{\infty} \mu_2 \left\{ \overline{W_n^{(k)}}; s^2 B \right\} = 1.$$

Для доказательства леммы осталось воспользоваться представлением Шенберга (10).

4. Доказательства теорем. Доказательство теоремы 1. Из леммы 7 следует существование множества $\tilde{\Gamma} \in \mathcal{B}(\mathbf{H})$ (с мерой $\mu_\alpha \{\tilde{\Gamma}; B\} \equiv 1$), для каждого элемента которого выполняются пп. 1°–3° этой леммы. Кроме того, ввиду п. 4° леммы 7 можно считать, что $s_\infty^2(h) \neq 0$ для любого $h \in \tilde{\Gamma}$. Установим справедливость следующего неравенства: если $h \in \tilde{\Gamma}$, то

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left[\Phi^{-1} \left(F_{i|1\dots i\dots n}^{(\alpha)}(h_i | h_1, \dots, \hat{h}_i, \dots, h_n) \right) \right]^2 \leq 1. \quad (27)$$

Действительно, из формул (11), (12) следует соотношение

$$\begin{aligned} & \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left[\Phi^{-1} \left(F_{i|1\dots i\dots n}^{(\alpha)}(h_i | h_1, \dots, \hat{h}_i, \dots, h_n) \right) \right]^2 \\ & \leq \sup_{1 \leq i \leq n} A_n^2 \left([ns_n^2(h) - (n-1)s_{n,i}^2(h)]^{1/2}; s_{n,i}^2(h) \right) \\ & \quad \times \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n [ns_n^2(h) - (n-1)s_{n,i}^2(h)] \\ & = A_n^2 \left([ns_n^2(h) - (n-1)s_{n,i(n)}^2(h)]^{1/2}; s_{n,i(n)}^2(h) \right) q_n^2(h), \end{aligned}$$

где $i(n)$ — натуральное число, на котором достигается супремум. Отсюда, используя п. 1° леммы 3 и пп. 2°, 3° леммы 7, получаем неравенство (27):

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left[\Phi^{-1} \left(F_{i|1\dots i\dots n}^{(\alpha)}(h_i | h_1, \dots, \hat{h}_i, \dots, h_n) \right) \right]^2 \leq \frac{1}{s_\infty^2(h)} s_\infty^2(h) = 1.$$

Покажем теперь, что при $h \in \tilde{\Gamma} \cap V_5$ (см. обозначение множества V_k в доказательстве леммы 8)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left[\Phi^{-1} \left(F_{i|1\dots i\dots n}^{(\alpha)}(h_i | h_1, \dots, \hat{h}_i, \dots, h_n) \right) \right]^2 \geq 1. \quad (28)$$

В самом деле, элементы $h \in V_5$ (см. лемму 8) обладают следующим свойством: существует натуральное $m = m(h)$ такое, что

$$\sup_{1 \leq i \leq n} \left| \frac{\langle (\pi_n B \pi_n)^{-1} f_i, h \rangle}{\langle (\pi_n B \pi_n)^{-1} f_i, f_i \rangle^{1/2}} \right| \leq n^{1/5} \quad (29)$$

для всех $n \geq m(h)$. С другой стороны, из формул (7), (13) следует при $n \geq m(h)$ неравенство

$$\begin{aligned} & \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left[\Phi^{-1} \left(F_{i|1\dots i\dots n}^{(\alpha)}(h_i | h_1, \dots, \hat{h}_i, \dots, h_n) \right) \right]^2 \\ & \geq \inf_{m(h) \leq i \leq n} A_n^2 \left(\left| \frac{\langle (\pi_n B \pi_n)^{-1} f_i, h \rangle}{\langle (\pi_n B \pi_n)^{-1} f_i, f_i \rangle^{1/2}} \right|; s_{n,i}^2(h) \right) \\ & \quad \times \frac{1}{n} \sum_{i=m(h)}^n \frac{\langle (\pi_n B \pi_n)^{-1} f_i, h \rangle^2}{\langle (\pi_n B \pi_n)^{-1} f_i, f_i \rangle} \\ & = A_n^2 \left(\left| \frac{\langle (\pi_n B \pi_n)^{-1} f_{j(n)}, h \rangle}{\langle (\pi_n B \pi_n)^{-1} f_{j(n)}, f_{j(n)} \rangle^{1/2}} \right|; s_{n,j(n)}^2(h) \right) \\ & \quad \times \frac{1}{n} \sum_{i=m(h)}^n \frac{\langle (\pi_n B \pi_n)^{-1} f_i, h \rangle^2}{\langle (\pi_n B \pi_n)^{-1} f_i, f_i \rangle}, \end{aligned} \quad (30)$$

где $j(n)$ — натуральное число, на котором достигается инфимум. Осталось заметить, что свойство (29) позволяет использовать п. 2° леммы 3 для перехода к пределу в неравенстве (30). Вновь используя пп. 2°, 3° леммы 7, будем иметь для $h \in \tilde{\Gamma} \cap V_5$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left[\Phi^{-1} \left(F_{i|1\dots i\dots n}^{(\alpha)}(h_i | h_1, \dots, \hat{h}_i, \dots, h_n) \right) \right]^2 \geq \frac{1}{s_\infty^2(h)} s_\infty^2(h) = 1.$$

Утверждение теоремы следует из неравенств (27) и (28), а также того факта (см. лемму 8), что $\mu_\alpha\{\tilde{\Gamma}; B\} = 1$.

Доказательство теоремы 2. Вначале проведем оценку величины

$$\langle (\pi_n B \pi_n)^{-1} f_i, f_j \rangle, \quad i, j = 1, \dots, n.$$

Используя условие эквивалентности гауссовских мер в гильбертовом пространстве, можно утверждать (см. [5, гл. III, § 17, теорема 4], [11, гл. II, § 4, п. 3]), что $\ker B = \ker \tilde{B}$, $B^{1/2} \mathbf{H} = \tilde{B}^{1/2} \mathbf{H}$ и

$$\tilde{B}^{-1/2} B \tilde{B}^{-1/2} = I + G, \quad (31)$$

где I — единичный оператор, G — самосопряженный оператор Гильберта–Шмидта, а оператор $I + G$ имеет ограниченный обратный. Далее, при $i, j = 1, \dots, n$, ввиду (31),

$$\begin{aligned} \langle (\pi_n B \pi_n)^{-1} f_i, f_j \rangle &= \langle [\pi_n \tilde{B}^{1/2} (I + G) \tilde{B}^{1/2} \pi_n]^{-1} f_i, f_j \rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{\lambda_i \lambda_j}} \left\langle \left[(\pi_n \tilde{B}^{1/2} \pi_n)^{-1} [\pi_n \tilde{B}^{1/2} (I + G) \tilde{B}^{1/2} \pi_n] \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \times (\pi_n \tilde{B}^{1/2} \pi_n)^{-1} \right]^{-1} f_i, f_j \right\rangle, \end{aligned} \quad (32)$$

где λ_k — собственные числа оператора $\tilde{B}$: $\tilde{B} f_k = \lambda_k f_k$, $k = 1, 2, \dots$. Оператор $\tilde{B}^{1/2}$ в базисе $\{f_n\}$ имеет диагональную матрицу, поэтому

$$\tilde{B}^{1/2} \pi_n \tilde{B}^{-1/2} \pi_n = \tilde{B}^{-1/2} \pi_n \tilde{B}^{1/2} = \pi_n, \quad (33)$$

$$(\pi_n \tilde{B}^{1/2} \pi_n)^{-1} = \pi_n \tilde{B}^{-1/2} \pi_n. \quad (34)$$

Переписывая равенство (32) с учетом (33) и (34), будем иметь:

$$\langle (\pi_n B \pi_n)^{-1} f_i, f_j \rangle = \frac{1}{\sqrt{\lambda_i \lambda_j}} \langle [\pi_n (I + G) \pi_n]^{-1} f_i, f_j \rangle. \quad (35)$$

Покажем, что

$$\langle [\pi_n (I + G) \pi_n]^{-1} f_i, f_j \rangle = \langle f_i, f_j \rangle - \left\langle [\pi_n (I + G) \pi_n]^{-1} (\pi_n G \pi_n) f_i, f_j \right\rangle. \quad (36)$$

В самом деле, обозначим

$$[\pi_n (I + G) \pi_n]^{-1} f_i = g_i, \quad i = 1, \dots, n.$$

Тогда левая часть соотношения (36) равна $\langle g_i, f_j \rangle$, а правая, ввиду самосопряженности оператора $\pi_n (I + G) \pi_n$, принимает вид

$$\begin{aligned} &\left\langle [\pi_n - [\pi_n (I + G) \pi_n]^{-1} (\pi_n G \pi_n)] f_i, f_j \right\rangle \\ &= \left\langle [\pi_n (I + G) \pi_n] [\pi_n - [\pi_n (I + G) \pi_n]^{-1} (\pi_n G \pi_n)] f_i, g_j \right\rangle \\ &= \langle \pi_n f_i, g_j \rangle = \langle g_i, f_j \rangle. \end{aligned}$$

Рассмотрим поведение операторов $[\pi_n (I + G) \pi_n]^{-1} \pi_n$ при $n \rightarrow \infty$. Для этого воспользуемся известными фактами теории проекционных методов приближенного решения операторных уравнений [3], [4]. Следуя [4, гл. II, § 4], будем говорить, что обратимый оператор A допускает редукцию относительно ортонормированного базиса $\{f_n\}$, если

$$\forall h \in \mathbf{H}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \|[\pi_n A \pi_n]^{-1} \pi_n h - A^{-1} h\| = 0. \quad (37)$$

Известно (см. [3, гл. 4, теорема 16.4], [4, гл. II, теорема 5.1]), что для выполнения соотношения (37) для любого ортонормированного базиса необходимо и достаточно, чтобы оператор A был правильным, т.е. допускал представление

$$A = \gamma I + S + T,$$

где $\gamma = \text{const} \neq 0$, S — линейный непрерывный оператор, $\|S\| < |\gamma|$, а T — линейный вполне непрерывный оператор. Ясно, что оператор $I + G$ — правильный, поэтому можно утверждать, что

$$\forall h \in \mathbf{H}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left\| [\pi_n(I + G) \pi_n]^{-1} \pi_n h - (I + G)^{-1} h \right\| = 0.$$

Следовательно, применяя теорему Банаха–Штейнгауза [14, гл. III, § 4, теорема 3], будем иметь

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad \left\| [\pi_n(I + G) \pi_n]^{-1} \pi_n \right\| < C < +\infty. \quad (38)$$

Далее, ввиду (38),

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left\langle [\pi_n(I + G) \pi_n]^{-1} (\pi_n G \pi_n) f_i, f_j \right\rangle^2 \\ &= \sum_{i=1}^n \left\| [\pi_n(I + G) \pi_n]^{-1} (\pi_n G \pi_n) f_i \right\|^2 \\ &\leq \left\| [\pi_n(I + G) \pi_n]^{-1} \pi_n \right\|^2 \sum_{i=1}^n \|G f_i\|^2 \leq C^2 \|G\|_{HS}^2, \end{aligned} \quad (39)$$

где $\|\cdot\|_{HS}$ — норма Гильберта–Шмидта. Аналогично, из неравенства (38) и того, что $\|f_i\| = 1$, получаем

$$\left\langle [\pi_n(I + G) \pi_n]^{-1} (\pi_n G \pi_n) f_i, f_i \right\rangle \leq C \|G f_i\|, \quad (40)$$

а из сходимости ряда $\|G\|_{HS}^2 = \sum_{i=1}^{\infty} \|G f_i\|^2 < +\infty$ следует, что

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \|G f_i\| = 0.$$

Поэтому из неравенства (40) будем иметь: для любого $\varepsilon > 0$ существует $N_\varepsilon > 0$ такое, что для каждого $i = N_\varepsilon + 1, \dots, n$ выполняется неравенство

$$0 \leq \left\langle [\pi_n(I + G) \pi_n]^{-1} (\pi_n G \pi_n) f_i, f_i \right\rangle \leq \varepsilon.$$

Отсюда, выбирая $\varepsilon < \frac{1}{2}$, на основе равенств (35) и (36) получаем оценку

$$\langle (\pi_n B \pi_n)^{-1} f_i, f_i \rangle \geq \frac{1}{2\lambda_i}, \quad \text{когда } N_\varepsilon + 1 \leq i \leq n. \quad (41)$$

Теперь легко установить справедливость свойства (2). Действительно, используя соотношения (35) и (36), обозначим:

$$S_n := \frac{1}{n^2} \left[n + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n \sum_{j=1}^n \frac{\langle [\pi_n(I+G)\pi_n]^{-1}(\pi_n G \pi_n) f_i, f_j \rangle^2}{\langle (\pi_n B \pi_n)^{-1} f_i, f_i \rangle \langle (\pi_n B \pi_n)^{-1} f_j, f_j \rangle \lambda_i \lambda_j} \right].$$

Далее, на основе неравенств (39), (41) и неравенства Коши–Буняковского получаем

$$\begin{aligned} S_n &\leq \frac{1}{n^2} \left[n + 4 \sum_{i=N_\varepsilon+1}^n \sum_{j=N_\varepsilon+1}^n \langle [\pi_n(I+G)\pi_n]^{-1}(\pi_n G \pi_n) f_i, f_j \rangle^2 \right. \\ &\quad + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{N_\varepsilon+1} \sum_{j=1}^{N_\varepsilon+1} \frac{\langle (\pi_n B \pi_n)^{-1} f_i, f_j \rangle^2}{\langle (\pi_n B \pi_n)^{-1} f_i, f_i \rangle \langle (\pi_n B \pi_n)^{-1} f_j, f_j \rangle} \\ &\quad \left. + 2 \sum_{i=1}^{N_\varepsilon} \sum_{j=N_\varepsilon+1}^n \frac{\langle (\pi_n B \pi_n)^{-1} f_i, f_j \rangle^2}{\langle (\pi_n B \pi_n)^{-1} f_i, f_i \rangle \langle (\pi_n B \pi_n)^{-1} f_j, f_j \rangle} \right] \\ &\leq \frac{1}{n^2} \left[n + 4 C^2 \|G\|_{HS}^2 + N_\varepsilon(N_\varepsilon - 1) + 2(n - N_\varepsilon - 1) N_\varepsilon \right] \leq \frac{C_1}{n}, \end{aligned}$$

где $C_1 = \text{const}$. Следовательно, $\sum_{n=1}^{\infty} S_n^2 < +\infty$. Теорема доказана.

5. Пример. Здесь мы приводим пример линейного самосопряженного положительно определенного ядерного оператора $B_0: \mathbf{H} \rightarrow \mathbf{H}$ и о.н.б. $\{f_k\} \subset \mathbf{H}$, для которых не выполняются соотношения (2) и (19). Именно,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\langle (\pi_n B_0 \pi_n)^{-1} f_i, f_j \rangle^2}{\langle (\pi_n B_0 \pi_n)^{-1} f_i, f_i \rangle \langle (\pi_n B_0 \pi_n)^{-1} f_j, f_j \rangle} \\ \geq \frac{1}{4} \left(\frac{\pi^2}{3} - 3 \right) = 0.072467 \dots \end{aligned} \quad (42)$$

Автор благодарит И. А. Блатова, указавшего на возможность построения примера на основе функции Грина трехточечного разностного оператора [15].

Пусть $\mathbf{H}$ — вещественное сепарабельное гильбертово пространство с о.н.б. $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$. Введем бесконечное семейство конечномерных подпространств:

$$\mathbf{H}_{(2^{k-1}, 2^{k+1}-2)} = \text{span}\{f_{2^{k-1}}, \dots, f_{2^{k+1}-2}\}, \quad k = 1, 2, \dots$$

В каждом из этих подпространств рассмотрим конечномерные операторы

$$B_0^{(k)}: \mathbf{H}_{(2^{k-1}, 2^{k+1}-2)} \longrightarrow \mathbf{H}_{(2^{k-1}, 2^{k+1}-2)},$$

задаваемые в базисе $\{f_n\}$ ($n = 2^k - 1, \dots, 2^{k+1} - 2$) трехдиагональными симметрическими $(2^k \times 2^k)$ -матрицами:

$$B_0^{(k)} = \frac{1}{2^{2k}} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Зададим оператор $B_0: \mathbf{H} \rightarrow \mathbf{H}$ в базисе $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ с помощью блочнодиагональной бесконечной симметрической матрицы

$$B_0 = \text{diag}[B_0^{(1)}, B_0^{(2)}, \dots, B_0^{(k)}, \dots].$$

Оператор B_0 ограничен, положительно определен и является ядерным. Далее, будем считать, что $n = 2^{k+1} - 2$, тогда

$$\begin{aligned} \pi_n B_0 \pi_n &= \text{diag}[B_0^{(1)}, B_0^{(2)}, \dots, B_0^{(k)}]; \\ (\pi_n B_0 \pi_n)^{-1} &= \text{diag}[(B_0^{(1)})^{-1}, (B_0^{(2)})^{-1}, \dots, (B_0^{(k)})^{-1}]. \end{aligned}$$

Используя известные формулы обращения трехдиагональных матриц (см. [16, гл. 2, § 2.12]), будем иметь

$$(B_0^{(l)})^{-1} = 2^{2l} \left[\min(r, s) - \frac{rs}{2^l + 1} \right], \quad r, s = 1, \dots, 2^l, \quad l = 1, \dots, k.$$

Следовательно, при $n = 2^{k+1} - 2$, суммируя по блокам, получаем

$$\begin{aligned} & \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\langle (\pi_n B_0 \pi_n)^{-1} f_i, f_j \rangle^2}{\langle (\pi_n B_0 \pi_n)^{-1} f_i, f_i \rangle \langle (\pi_n B_0 \pi_n)^{-1} f_j, f_j \rangle} \\ & > \frac{1}{4(2^k - 1)^2} \sum_{r=1}^{2^k} \sum_{s=1}^{2^k} \left[\min \left(\frac{r}{2^k + 1}, \frac{s}{2^k + 1} \right) - \frac{r}{2^k + 1} \frac{s}{2^k + 1} \right]^2 \\ & \quad \times \left[\frac{r}{2^k + 1} \left(1 - \frac{r}{2^k + 1} \right) \frac{s}{2^k + 1} \left(1 - \frac{s}{2^k + 1} \right) \right]^{-1}. \quad (43) \end{aligned}$$

Рассмотрим двойной интеграл (от квадрата корреляционной функции броуновского моста) как предел интегральных сумм:

$$\begin{aligned} & \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m^2} \sum_{i=1}^{m-1} \sum_{j=1}^{m-1} \left[\min \left(\frac{i}{m}, \frac{j}{m} \right) - \frac{i}{m} \frac{j}{m} \right]^2 \left[\frac{i}{m} \left(1 - \frac{i}{m} \right) \frac{j}{m} \left(1 - \frac{j}{m} \right) \right]^{-1} \\ & = \int_0^1 \int_0^1 \frac{[\min(x, y) - xy]^2}{x(1-x)y(1-y)} dx dy = \frac{\pi^2}{3} - 3. \end{aligned}$$

Учитывая это равенство и переходя к пределу в неравенстве (43), получаем соотношение (42).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Шатский С. Я. Устойчивые эллиптически контурированные меры в гильбертовом пространстве: асимптотические свойства условных распределений. — Изв. РАЕН, сер. МММИУ, 1999, № 3, с. 43–81.
2. Мизлин С. Г. Вариационные методы в математической физике. М.: Наука, 1970, 512 с.
3. Красносельский М. А., Вайникко Г. М., Забрейко П. П., Рунцикий Я. Б., Стеценко В. Я. Приближенное решение операторных уравнений. М.: Наука, 1969, 455 с.
4. Гохберг И. Ц., Фельдман И. А. Уравнения в свертках и проекционные методы их решения. М.: Наука, 1971, 352 с.
5. Скороход А. В. Интегрирование в гильбертовом пространстве. М.: Наука, 1975, 232 с.
6. Крамер Г. Математические методы статистики. М.: Мир, 1975, 648 с.
7. Ширяев А. Н. Вероятность. М.: Наука, 1989, 640 с.
8. Золотарев В. М. Одномерные устойчивые распределения. М.: Наука, 1983, 304 с.
9. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Т. 1, 2. М.: Мир, 1984, 526 с., 752 с.
10. Федорюк М. В. Асимптотика: интегралы и ряды. М.: Наука, 1987, 544 с.
11. Далецкий Ю. Л., Фомин С. В. Меры и дифференциальные уравнения в бесконечномерных пространствах. М.: Наука, 1983, 384 с.
12. Богачев В. И. Гауссовские меры. М.: Наука, 1997, 352 с.
13. Гирко В. Л. Предельные теоремы для функций случайных величин. Киев: Вища школа, 1983, 208 с.
14. Люстерник Л. А., Соболев В. И. Элементы функционального анализа. М.: Наука, 1965, 520 с.
15. Самарский А. А., Николаев Е. С. Методы решения сеточных уравнений. М.: Наука, 1978, 591 с.
16. Ильин В. П., Кузнецов Ю. И. Трехдиагональные матрицы и их приложения. М.: Наука, 1985, 207 с.

Поступила в редакцию
8.ІІ.2001

Исправленный вариант
15.Х.2003