Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. М. Круглов, О необходимости условия Ляпунова для нормальной сходимости, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2007, том 52, выпуск 1, 173–175

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp11>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.90.164.192

26 апреля 2023 г., 13:16:23

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

© 2007 г.

КРУГЛОВ В. М.*

О НЕОБХОДИМОСТИ УСЛОВИЯ ЛЯПУНОВА
ДЛЯ НОРМАЛЬНОЙ СХОДИМОСТИ¹⁾

Приведены необходимые и достаточные условия для слабой сходимости распределений сумм независимых случайных величин к нормальному распределению. Условия представляют собой комбинацию части условия из классического критерия нормальной сходимости и условия Ляпунова для урезанных случайных величин.

Ключевые слова и фразы: нормальная сходимость, теорема Линдберга–Феллера, слабая сходимость, условие Ляпунова.

1. Введение. Вопрос о слабой сходимости распределений сумм независимых вещественных случайных величин к нормальному распределению решен. Заинтересованный читатель может обратиться к монографиям [1]–[3]. В [4] показано, что классические критерии нормальной и пуассоновской сходимостей можно сформулировать в терминах моментов урезанных случайных величин. В дополнение к сказанному в [4] мы рассмотрим вопрос о необходимости условия Ляпунова.

Предполагается, что все рассматриваемые далее случайные величины определены на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$. Пусть X_n , $n \in \mathbf{N} = \{1, 2, \dots\}$, — независимые случайные величины с конечными дисперсиями, $B_n^2 = \mathbf{E}(X_1 - \mathbf{E}X_1)^2 + \dots + \mathbf{E}(X_n - \mathbf{E}X_n)^2$.

Теорема Ляпунова. Если

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{B_n^{2+\delta}} \sum_{k=1}^n \mathbf{E}|X_k - \mathbf{E}X_k|^{2+\delta} = 0 \quad (1)$$

для некоторого $\delta > 0$, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P} \left\{ \sum_{k=1}^n (X_k - \mathbf{E}X_k) < x B_n \right\} = \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-u^2/2} du \quad (2)$$

для каждого $x \in \mathbf{R} = (-\infty, \infty)$.

Доказательство можно найти, например, в учебнике [5].

Из условия (1) следует, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \max_{1 \leq k \leq n} \mathbf{E}|X_k - \mathbf{E}X_k|^2 / B_n^2 = 0$. Если это последнее условие выполнено и случайные величины X_n , $n \in \mathbf{N}$, равномерно ограничены, то условие (1) является следствием (2). Это наблюдение лежит в основе доказательства приводимых ниже утверждений.

* Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, факультет вычислительной математики и кибернетики, Ленинские горы, 119992 Москва, Россия; e-mail: vkrug@dataforce.net

¹⁾ Работа выполнена при поддержке РФФИ (гранты 05-01-00535, 05-01-00583).

2. Аналоги классических критериев. Пусть дана последовательность серий $X_{n,k}$, $k = 1, \dots, m_n$, $n \in \mathbf{N}$, независимых в каждой серии вещественных случайных величин, τ — фиксированное положительное число, $I[A]$ — индикаторная функция множества $A \subseteq \Omega$, $S_n = X_{n,1} + \dots + X_{n,m_n}$, $X_{n,k}(\tau) = X_{n,k}I[|X_{n,k}| \leq \tau]$. Предположим, что выполнено условие предельной равномерной малости

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \max_{1 \leq k \leq m_n} \mathbf{P}\{|X_{n,k}| > \varepsilon\} = 0 \quad \forall \varepsilon > 0. \quad (3)$$

Следующая теорема представляет собой аналог известного (см. [1, с. 136] или [2, с. 329]) критерия нормальной сходимости.

Теорема 1. Пусть даны числа $\alpha \in \mathbf{R}$ и $\sigma > 0$. Предположим, что выполнено условие (3). Для того чтобы

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}\{S_n < x\} = \Phi\left(\frac{x - \alpha}{\sigma}\right) \quad \forall x \in \mathbf{R}, \quad (4)$$

необходимо и достаточно, чтобы для некоторых $\tau > 0$ и $\delta > 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{m_n} \mathbf{P}\{|X_{n,k}| > \tau\} = 0, \quad (5)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{m_n} \mathbf{E}X_{n,k}(\tau) = \alpha, \quad (6)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{m_n} \mathbf{E}|X_{n,k}(\tau) - \mathbf{E}X_{n,k}(\tau)|^2 = \sigma^2, \quad (7)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{m_n} \mathbf{E}|X_{n,k}(\tau) - \mathbf{E}X_{n,k}(\tau)|^{2+\delta} = 0. \quad (8)$$

Доказательство. Необходимость. По упомянутому классическому критерию нормальной сходимости из (3) и (4) следует (5)–(7). Более того,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{m_n} \mathbf{P}\{|X_{n,k}| > \varepsilon\} = 0 \quad (9)$$

для любого $\varepsilon > 0$. Из условия (3) вытекает, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \max_{1 \leq k \leq m_n} \mathbf{E}|X_{n,k}(\tau)| = 0.$$

Поэтому найдется $r \in \mathbf{N}$ такое, что $\max_{1 \leq k \leq m_n} \mathbf{E}|X_{n,k}(\tau)| < \varepsilon/2$ для всех $n > r$. Для любых $n > r$ и $\delta > 0$ мы имеем

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^{m_n} \mathbf{E}|X_{n,k}(\tau) - \mathbf{E}X_{n,k}(\tau)|^{2+\delta} \\ &= \sum_{k=1}^{m_n} \mathbf{E} \left[|X_{n,k}(\tau) - \mathbf{E}X_{n,k}(\tau)|^{2+\delta} I[|X_{n,k}(\tau) - \mathbf{E}X_{n,k}(\tau)| \leq \varepsilon] \right] \\ & \quad + \sum_{k=1}^{m_n} \mathbf{E} \left[|X_{n,k}(\tau) - \mathbf{E}X_{n,k}(\tau)|^{2+\delta} I[|X_{n,k}(\tau) - \mathbf{E}X_{n,k}(\tau)| > \varepsilon] \right] \\ &\leq \varepsilon^\delta \sum_{k=1}^{m_n} \mathbf{E}|X_{n,k}(\tau) - \mathbf{E}X_{n,k}(\tau)|^2 + (2\tau)^{2+\delta} \sum_{k=1}^{m_n} \mathbf{P}\left\{|X_{n,k}(\tau)| > \frac{\varepsilon}{2}\right\}. \end{aligned}$$

Отсюда и из (7) и (9) следует (8), так как число ε можно выбрать произвольно малым.

Достаточность. По классическому критерию нормальной сходимости условия (3), (6), (7) и (9) влекут справедливость (4). Поэтому достаточно доказать, что условие (9) выполняется для любого $\varepsilon > 0$. Если $\varepsilon \geq \tau$, то оно выполнено в

силу условия (5). Пусть $\varepsilon < \tau$. Выше отмечалось, что найдется $r \in \mathbf{N}$ такое, что $\max_{1 \leq k \leq m_n} \mathbf{E}|X_{n,k}(\tau)| < \varepsilon/2$ для всех $n \geq r$. Для таких n мы имеем

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{m_n} \mathbf{P}\{|X_{n,k}| > \varepsilon\} &= \sum_{k=1}^{m_n} \mathbf{P}\{\tau \geq |X_{n,k}(\tau)| > \varepsilon\} + \sum_{k=1}^{m_n} \mathbf{P}\{|X_{n,k}| > \tau\} \\ &\leq \sum_{k=1}^{m_n} \mathbf{P}\left\{|X_{n,k}(\tau) - \mathbf{E}X_{n,k}(\tau)| > \frac{\varepsilon}{2}\right\} + \sum_{k=1}^{m_n} \mathbf{P}\{|X_{n,k}| > \tau\} \\ &\leq \left(\frac{2}{\varepsilon}\right)^{2+\delta} \sum_{k=1}^{m_n} \mathbf{E}|X_{n,k}(\tau) - \mathbf{E}X_{n,k}(\tau)|^{2+\delta} + \sum_{k=1}^{m_n} \mathbf{P}\{|X_{n,k}| > \tau\}. \end{aligned}$$

Привлекая (5) и (8), мы приходим к (9). Теорема доказана.

Теорема 2. Пусть дано число $\sigma > 0$. Предположим, что выполнено условие (3) и $\sum_{k=1}^{m_n} \mathbf{E}X_{n,k}^2 = \sigma^2$, $\mathbf{E}X_{n,k} = 0$, $k = 1, \dots, m_n$, $n \in \mathbf{N}$. Для того чтобы $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}\{S_n < x\} = \Phi(x/\sigma)$ для любого $x \in \mathbf{R}$, необходимо и достаточно, чтобы для некоторого $\delta > 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{m_n} \int_{-\infty}^{\infty} \min\{|x|^{2+\delta}, x^2\} d\mathbf{P}\{X_{n,k} < x\} = 0.$$

Доказательство. Последнее условие представляет собой соединение условия Ляпунова и условия Линдеберга. Нетрудно видеть, что оно эквивалентно условию Линдеберга. Поэтому теорема представляет собой перефразировку теоремы Линдеберга–Феллера.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гнеденко Б. В., Колмогоров А. Н. Предельные распределения для сумм независимых случайных величин. М.–Л.: Гостехиздат, 1949, 264 с.
2. Лозе М. Теория вероятностей. М.: ИЛ, 1962, 719 с.
3. Золотарев В. М. Современная теория суммирования независимых случайных величин. М.: Наука, 1986, 415 с.
4. Круглов В. М. Нормальная и пуассоновская сходимости. — Теория вероятн. и ее примен., 2003, т. 48, в. 2, с. 392–398.
5. Гнеденко Б. В. Курс теории вероятностей. М.: УРСС, 2001, 318 с.

Поступила в редакцию
4.V.2005

© 2007 г.

РОЗОВСКИЙ Л. В.*

ВЕРЯТНОСТИ СВЕРХБОЛЬШИХ УКЛОНЕНИЙ СУММ НЕЗАВИСИМЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН С ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНО УБЫВАЮЩИМ РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ¹⁾

В заметке изучаются вероятности больших уклонений суммы независимых одинаково распределенных случайных величин, функция распределения которых имеет экспоненциально убывающий хвост.

* С.-Петербургская химико-фармацевтическая академия, кафедра высшей математики, ул. проф. Попова, 14, 197376 С.-Петербург, Россия; e-mail: lrozovsky@mail.ru

¹⁾ Работа выполнена при поддержке гранта НШ-4222.2006.1 и гранта РФФИ 06-01-0179-а.