Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. И. Володин, Т.-С. Ну, М. Ordóñez Cabrera, Скорость сходимости для зависимого бутстрепа среднего, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2005, том 50, выпуск 2, 344–352

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp111>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.174.149.18

26 апреля 2023 г., 15:38:20

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

© 2005 г. ВОЛОДИН А.*, ОРДОНЬЕС КАБРЕРА М.**, ХУ Т.-З.***

СКОРОСТЬ СХОДИМОСТИ ДЛЯ
ЗАВИСИМОГО БУТСТРЕПА СРЕДНЕГО¹⁾

Получен ряд результатов о полной сходимости для зависимого бутстрепа среднего в духе результатов Баума–Каца, Эрдеша, Сюя–Роббинса и Спитцера.

Ключевые слова и фразы: бутстреп среднего, зависимый бутстреп, скорость сходимости, экспоненциальные неравенства, усиленный закон больших чисел.

1. Введение. Тема данного исследования касается полной сходимости для зависимого бутстрепа, полученного из некоторой последовательности случайных величин в духе Баума–Каца, Эрдеша, Сюя–Роббинса и Спитцера.

Работы о состоятельности бутстреп-оценок привлекают в последнее время большое внимание как с теоретической, так и с прикладной точки зрения из-за растущей потребности в этой процедуре. Важно отметить, что экспоненциальные неравенства играют большую роль в доказательстве асимптотической значимости бутстрепа среднего.

Начнем с небольшого обсуждения предыдущих результатов, где рассматривается последовательность независимых одинаково распределенных (н.о.р.) случайных величин и классический (независимый) бутстреп среднего. Пусть $\{X, X_n, n \geq 1\}$ есть последовательность н.о.р. случайных величин, определенных на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$. Для $\omega \in \Omega$ и $n \geq 1$ пусть $P_n(\omega) = n^{-1} \sum_{i=1}^n \delta_{X_i(\omega)}$ означает эмпирическую меру и пусть $\{\hat{X}_{n,j}^{(\omega)}, 1 \leq j \leq m(n)\}$ — н.о.р. случайные величины с законом распределения $P_n(\omega)$, где $\{m(n), n \geq 1\}$ — последовательность натуральных чисел. Другими словами, случайные величины $\{\hat{X}_{n,j}^{(\omega)}, 1 \leq j \leq m(n)\}$ получены случайным отбором с возвращением из n случайных величин $X_1(\omega), \dots, X_n(\omega)$. Для каждого $n \geq 1$ случайный вектор $\{\hat{X}_{n,j}^{(\omega)}, 1 \leq j \leq m(n)\}$ называется *бутстреп выборкой Эфрона* [7] из $X_1, \dots, X_n$ объема $m(n)$. Пусть $\bar{X}_n(\omega) = n^{-1} \sum_{j=1}^n X_j(\omega)$ — выборочное среднее.

* Department of Mathematics and Statistics, University of Regina, Regina, Saskatchewan, S4S 0A2, Canada; e-mail: andrei@math.uregina.ca

** Department of Mathematical Analysis, University of Seville, Seville 41080, Spain; e-mail: cabrera@us.es

*** Department of Mathematics, Tsing Hua University, Hsinchu 30043, Taiwan; e-mail: tchu@math.nthu.edu.tw

¹⁾ Работа А. Володина поддержана грантом от National Sciences and Engineering Research Council of Canada. Работа М. Ордоньеса Кабреры поддержана грантами BFM 2000-0344-C0201 и FQM 127. Работа Т.-З. Ху поддержана грантом NSC91-2118-M-007-008.

Когда распределение X невырождено и $\mathbf{E}X^2 < \infty$, Бикел и Фридман [4] показали, что для почти всех $\omega \in \Omega$ верна следующая центральная предельная теорема:

$$n^{1/2} \left(\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \hat{X}_{n,j}^{(\omega)} - \bar{X}_n(\omega) \right) \xrightarrow{d} N(0, \sigma^2).$$

Здесь и далее $\sigma^2 = \mathbf{D}X$. Отметим, что по теореме Гливенко–Кантелли $P_n(\omega)$ приближается к $\mathcal{L}(X)$ для почти всех $\omega \in \Omega$ с ростом n и по классической центральной предельной теореме Леви

$$n^{1/2} \left(\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n X_j - \mathbf{E}X \right) \xrightarrow{d} N(0, \sigma^2).$$

Отсюда следует, что для почти всех $\omega \in \Omega$ бутстреп-статистика

$$n^{1/2} \left(\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \hat{X}_{n,j}^{(\omega)} - \bar{X}_n(\omega) \right)$$

близка по распределению к

$$n^{1/2} \left(\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n X_j - \mathbf{E}X \right),$$

когда n достаточно велико. В этом заключается основная идея бутстрепа, и мы отсылаем к основополагающей работе Эфрона [7], где эта интересная идея выражена явно и подтверждена серией важных примеров.

Усиленные законы больших чисел для бутстрепа среднего были доказаны Атрейей [2] и Чёргё [6]. Аренал-Гутиэррес, Матран и Куеста-Албертос [1] проанализировали результаты работ [2] и [6]. Затем, учитывая различные скорости роста объема повторной выборки $m(n)$, они привели новые, более простые доказательства этих результатов. Они также привели примеры, показывающие, что объемы повторных выборок, необходимые для утверждения сходимости почти на верное (п.н.), являются практически оптимальными.

Другая публикация, важная для нашей статьи, это работа Микоша [10]. Он установил ряд полезных экспоненциальных неравенств, которые являются важным инструментом для доказательства состоятельности бутстрепа среднего. Основываясь на этих экспоненциальных неравенствах, Ли, Росальский и Ахмед [9] доказали полную сходимость в духе Баума–Каца, Эрдеша, Сюя–Роббинса и Спитцера для бутстрепа среднего и наличие моментов супремума нормированных бутстреп-сумм. Важно отметить, что в статье [9] не накладываются условия на маргинальные или совместные распределения случайных величин, из которых извлекается бутстреп-перевыборка. В нашей статье мы используем такой же подход.

Понятие процедуры зависимого бутстрепа было введено Смитом и Тейлором в статье [12], где также установлены некоторые важные свойства такого бутстрепа. Основной целью данной статьи является расширение и обобщение результатов Ли, Росальского и Ахмеда [9] об усиленном законе больших чисел на случай процедуры зависимого бутстрепа. Основными инструментами являются расширение и обобщение результатов Микоша [10] (см. п. 4) и Смита и Тейлора [12] (п. 2).

2. Зависимый бутстреп. Результаты этого пункта представляют собой изменение, обобщение и расширение результатов Смита и Тейлора (см. [12] и [13]) на случай зависимого бутстрепа из последовательности не обязательно н.о.р. случайных величин. Отметим, что Смит и Тейлор рассматривали только случай н.о.р. Мы приводим этот пункт для ссылок, так как эти результаты играют важную роль в дальнейшем.

Пусть $\{X_n, n \geq 1\}$ — последовательность случайных величин (не обязательно независимых и одинаково распределенных), которые определены на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$. Пусть $\{m(n), n \geq 1\}$ и $\{k(n), n \geq 1\}$ — две последовательности таких натуральных чисел, что $m(n) \leq nk(n)$ для всех $n \geq 1$.

Для $\omega \in \Omega$ и $n \geq 1$ *зависимый бутстреп* $\{\hat{X}_{n,j}^{(\omega)}, 1 \leq j \leq m(n)\}$ определяется как выборка объема $m(n)$, извлеченная без возвращения из набора $nk(n)$ значений, полученных как $k(n)$ копий выборочных наблюдений $X_1(\omega), \dots, X_n(\omega)$. Эта процедура *зависимого бутстрепа* предназначена для уменьшения разброса оценок и, следовательно, для получения лучших доверительных интервалов. Мы отсылаем к статье [13], где доказан этот факт и приведены результаты моделирования доверительных интервалов с целью изучения возможных выигрышей в вероятности накрытия и длине интервалов.

Приводимое ниже предложение 1 дает совместное распределение случайных величин, полученных из *зависимого бутстрепа*. Нам потребуются следующие обозначения.

Для $\omega \in \Omega$, $n \geq 1$ и вещественного числа x положим $\tau(x) = \sum_{j=1}^n I\{X_j(\omega) \leq x\}$, где $I\{\cdot\}$ — индикаторная функция. Следовательно, случайная величина $\tau(x)$ подсчитывает число наблюдений, меньших или равных x .

Для конечной последовательности $\{x_1, x_2, \dots, x_m\}$ вещественных чисел обозначим $\{x_{(1)}, x_{(2)}, \dots, x_{(m)}\}$ ее невозрастающую перестановку, т.е. $x_{(1)} \leq x_{(2)} \leq \dots \leq x_{(m)}$ и для любого $1 \leq j \leq m$ найдется такое $1 \leq i \leq m$, что $x_i = x_{(j)}$.

Предложение 1. Пусть $\omega \in \Omega$, $n \geq 1$ и $\{x_1, \dots, x_m\}$ — последовательность вещественных чисел.

1) Если $k(n)\tau(x_{(j)}) \geq j$ для всех $1 \leq j \leq m(n)$, то

$$\mathbf{P}\left\{\hat{X}_{n,1}^{(\omega)} \leq x_1, \dots, \hat{X}_{n,m(n)}^{(\omega)} \leq x_{m(n)}\right\} = \prod_{j=1}^{m(n)} \frac{k(n)\tau(x_{(j)}) - (j-1)}{k(n)n - (j-1)}.$$

2) Если $k(n)\tau(x_{(j)}) < j$ хотя бы для одного $1 \leq j \leq m(n)$, то эта вероятность равна нулю.

Доказательство. Пусть π — такая перестановка чисел $1, \dots, m(n)$, что $\pi(j) = i$ для $x_i = x_{(j)}$. Тогда

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\left\{\hat{X}_{n,1}^{(\omega)} \leq x_1, \dots, \hat{X}_{n,m(n)}^{(\omega)} \leq x_{m(n)}\right\} &= \mathbf{P}\left\{\hat{X}_{n,\pi(1)}^{(\omega)} \leq x_{(1)}, \dots, \hat{X}_{n,\pi(m(n))}^{(\omega)} \leq x_{(m(n))}\right\} \\ &= \mathbf{P}\left\{\hat{X}_{n,\pi(1)}^{(\omega)} \leq x_{(1)}\right\} \mathbf{P}\left\{\hat{X}_{n,\pi(2)}^{(\omega)} \leq x_{(2)} \mid \hat{X}_{n,\pi(1)}^{(\omega)} \leq x_{(1)}\right\} \times \dots \\ &\quad \times \mathbf{P}\left\{\hat{X}_{n,\pi(m(n))}^{(\omega)} \leq x_{(m(n))} \mid \hat{X}_{n,\pi(1)}^{(\omega)} \leq x_{(1)}, \dots, \hat{X}_{n,\pi(m(n)-1)}^{(\omega)} \leq x_{(m(n)-1)}\right\} \\ &= \prod_{j=1}^{m(n)} \frac{k(n)\tau(x_{(j)}) - (j-1)}{k(n)n - (j-1)}, \end{aligned}$$

если $k(n)\tau(x_{(j)}) \geq j$ для всех $1 \leq j \leq m(n)$.

Вторая часть предложения очевидна.

Естественно, случайные величины $\{\hat{X}_{n,j}^{(\omega)}, 1 \leq j \leq m(n)\}$, полученные *зависимым бутстрепом*, являются *зависимыми*. Они обладают так называемым свойством отрицательной зависимости — это будет показано в предложении 2. Понятие отрицательной зависимости было введено Леманом [8] следующим образом.

Случайные величины $Y_1, Y_2, \dots$ *отрицательно зависимы*, если для любого $n \geq 2$ выполняются неравенства

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{Y_1 \leq y_1, \dots, Y_n \leq y_n\} &\leq \prod_{i=1}^n \mathbf{P}\{Y_i \leq y_i\}, \\ \mathbf{P}\{Y_1 > y_1, \dots, Y_n > y_n\} &\leq \prod_{i=1}^n \mathbf{P}\{Y_i > y_i\}, \end{aligned}$$

каковы бы ни были последовательности $\{y_1, \dots, y_n\}$ вещественных чисел.

Предложение 2. Для $\omega \in \Omega$ и $n \geq 1$ случайные величины, полученные *зависимым бутстрепом* $\{\hat{X}_{n,j}^{(\omega)}, 1 \leq j \leq m(n)\}$, являются *отрицательно зависимыми* и *перестановочными*.

Доказательство. Докажем только первое неравенство в определении отрицательной зависимости, ибо второе неравенство доказывается аналогичным образом.

Пусть $\{x_1, \dots, x_{m(n)}\}$ — последовательность вещественных чисел. Представляет интерес только случай, когда $k(n)\tau(x_{(j)}) \geq j$ для всех $1 \leq j \leq m(n)$. В силу предложения 1

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{\hat{X}_{n,1}^{(\omega)} \leq x_1, \dots, \hat{X}_{n,m(n)}^{(\omega)} \leq x_{m(n)}\} &= \prod_{j=1}^{m(n)} \frac{k(n)\tau(x_{(j)}) - (j-1)}{k(n)n - (j-1)} \\ &\leq \prod_{j=1}^{m(n)} \frac{k(n)\tau(x_{(j)})}{k(n)n} = \prod_{j=1}^{m(n)} \mathbf{P}\{\hat{X}_{n,j}^{(\omega)} \leq x_j\}. \end{aligned}$$

Свойство перестановочности непосредственно следует из предложения 1.

3. Несколько технических лемм. В этом пункте мы приводим несколько технических результатов, используемых при доказательстве основных результатов статьи. Некоторые из лемм представляют собой расширение и обобщение известных ранее результатов. Для того чтобы статья была самодостаточна, мы намечаем их доказательства.

Для простоты под $\ln$ -функцией в этом пункте мы подразумеваем функцию натурального логарифма. Результаты могут быть легко обобщены на другие логарифмические функции с основанием, большим единицы.

Первая лемма хорошо известна (см., например, [5]) и тривиальна. Поэтому мы опускаем доказательство.

Лемма 1. Пусть $\{Y_n, n \geq 1\}$ — последовательность отрицательно зависимых случайных величин.

1) Если $\{f_n, n \geq 1\}$ — последовательность измеримых, монотонно возрастающих (или убывающих) вещественных функций, то $\{f_n(Y_n), n \geq 1\}$ есть последовательность отрицательно зависимых случайных величин.

2) Для всех $n \geq 1$ справедливо неравенство $\mathbf{E} \prod_{j=1}^n Y_j \leq \prod_{j=1}^n \mathbf{E} Y_j$, если эти математические ожидания конечны.

К сожалению, функция, обратная к функции $\phi(t) = t^{1/\beta} / \ln t$, $t > 0$, $0 < \beta < e$, не выписывается в явном виде. Но следующая лемма дает хорошую «аппроксимацию» обратной функции.

Лемма 2. Пусть $\phi(t) = t^{1/\beta} / \ln t$ и $\psi(t) = t^\beta \ln^\beta t$, $t \geq e$, $0 < \beta < e$. Тогда

$$\left(\frac{1}{\beta} \left(1 - \frac{\beta}{e} \right) \right)^\beta t \leq \psi(\phi(t)) \leq \left(\frac{1}{\beta} \right)^\beta t.$$

Доказательство. Отметим, что

$$\psi(\phi(t)) = \frac{t}{\beta^\beta} \left(1 - \frac{\beta \ln \ln t}{\ln t} \right)^\beta \quad \text{и} \quad 1 - \frac{\beta}{e} \leq 1 - \frac{\beta \ln \ln t}{\ln t} \leq 1$$

для $t \geq e$, что может быть установлено дифференцированием.

Основная идея леммы 2 состоит в том, что для положительной случайной величины Y условия $\mathbf{E}\phi^{-1}(Y) < \infty$ и $\mathbf{E}\psi(Y) < \infty$ равносильны.

Следующая лемма может быть найдена в статье В.В. Петрова (см. [11, теорема 2]). Отметим, что в ней отсутствует условие независимости.

Лемма 3. Пусть $\phi(t)$, $t > 0$, — положительная, строго возрастающая функция, удовлетворяющая условию $\phi(t) \rightarrow \infty$, когда $t \rightarrow \infty$. Положим $b_n = \phi(n)$, $n \geq 1$. Пусть, более того, $\{Y_n, n \geq 1\}$ — последовательность одинаково распределенных случайных величин. Если

$$\sum_{j=n}^{\infty} \frac{1}{b_j} = O\left(\frac{n}{b_n}\right)$$

и $\mathbf{E}\phi^{-1}(Y_1) < \infty$, где ϕ^{-1} — обратная функция к ϕ , то

$$\frac{1}{b_n} \sum_{j=1}^n Y_j = 0 \quad \text{п.н.}$$

В следующей лемме также важно отметить отсутствие условия независимости.

Лемма 4. Пусть $\{X_n, n \geq 1\}$ — такая последовательность одинаково распределенных случайных величин, что

$$\mathbf{E}|X_1|^\alpha |\ln |X_1||^{\alpha/2} < \infty$$

для некоторого $0 < \alpha < 2$. Тогда

$$\frac{\ln n}{n^{2/\alpha}} \sum_{j=1}^n X_j^2 \rightarrow 0 \quad \text{п.н.}$$

Доказательство. Для того чтобы применить лемму 3, положим $Y_n = X_{n^2}$, $b_n = n^{2/\alpha} / \ln n$, $n \geq 1$, и $\beta = \alpha/2$ (тогда $0 < \beta < 1$). Если $\phi(t) = t^{1/\beta} / \ln t$, $t \geq e$, то $b_n = \phi(n)$, и по лемме 2 с $\psi(t) = t^\beta (\ln t)^\beta$ условия $\mathbf{E}\phi^{-1}(Y_1) < \infty$ и $\mathbf{E}\psi(Y_1) < \infty$ будут эквивалентны. Отметим, что

$$\mathbf{E}\psi(Y_1) = 2^{\alpha/2} \mathbf{E}|X_1|^\alpha |\ln |X_1||^{\alpha/2} < \infty.$$

Последнее, что мы должны установить, это соотношение $\sum_{j=n}^\infty 1/b_j = O(n/b_n)$.

Имеем:

$$\sum_{j=n}^\infty \frac{1}{b_j} = \sum_{j=n}^\infty \frac{\ln j}{j^{1/\beta}} = \sum_{m=1}^\infty \sum_{k=nm}^{n(m+1)-1} \frac{\ln k}{k^{1/\beta}} \leq \sum_{m=1}^\infty \frac{n \ln(mn)}{(nm)^{1/\beta}}.$$

Так как последовательность $\{(\ln k)/k^{1/\beta}, k \geq e^{1/\beta}\}$ строго возрастает, то последняя сумма не превосходит

$$\frac{n \ln n}{n^{1/\beta}} \sum_{m=1}^\infty \frac{1 + \ln m / \ln 2}{m^{1/\beta}} = C \frac{n \ln n}{n^{1/\beta}} = C \frac{n}{b_n}.$$

В силу леммы 3

$$\frac{\ln n}{n^{2/\alpha}} \sum_{j=1}^n X_j^2 \rightarrow 0 \quad \text{п.н.}$$

Лемма 4 доказана.

Две следующие леммы имеют дело со сходимостью максимумов случайных величин. Опять-таки, не накладываются условия независимости.

Лемма 5. Пусть $\{X_n, n \geq 1\}$ — последовательность положительных случайных величин и $\{b_n, n \geq 1\}$ — такая неубывающая последовательность положительных чисел, что $b_n \rightarrow \infty$. Тогда условия $X_n/b_n \rightarrow 0$ п.н. и $\max_{1 \leq j \leq n} X_j/b_n \rightarrow 0$ п.н. равносильны.

Доказательство. Пусть $X_n/b_n \rightarrow 0$ п.н. Для любого $n \geq k \geq 2$ справедливы следующие неравенства:

$$\frac{1}{b_n} \max_{1 \leq j \leq n} X_j \leq \frac{1}{b_n} \max_{1 \leq j \leq k-1} X_j + \frac{1}{b_n} \max_{k \leq j \leq n} X_j \leq \frac{1}{b_n} \max_{1 \leq j \leq k-1} X_j + \max_{k \leq j \leq n} \frac{X_j}{b_j}.$$

Так как последовательность $\{b_n, n \geq 1\}$ не убывает, то последнее выражение не превосходит

$$\frac{1}{b_n} \max_{1 \leq j \leq k-1} X_j + \sup_{j \geq k} \frac{X_j}{b_j} \rightarrow 0,$$

где сперва $n \rightarrow \infty$, а потом $k \rightarrow \infty$. Обратное утверждение очевидно.

Следующая лемма обобщает следствие к теореме 3 из статьи Барнеса и Таккера [3].

Лемма 6. Пусть $\psi(t)$, $t \geq 0$, — строго возрастающая функция и $\{b_n, n \geq 1\}$ — такая неубывающая последовательность положительных чисел, что $\psi(b_n) \geq Cn$, $n \geq 1$, где C не зависит от n . Пусть, более того, $\{X_n, n \geq 1\}$ — такая последовательность положительных одинаково распределенных случайных величин, что $E\psi(X_1/\varepsilon) < \infty$ при любом $\varepsilon > 0$. Тогда

$$\frac{1}{b_n} \max_{1 \leq j \leq n} X_j \rightarrow 0 \quad \text{п.н.}$$

Доказательство. Для любого $\varepsilon > 0$

$$\sum_{n=1}^{\infty} P\{X_n > \varepsilon b_n\} \leq \sum_{n=1}^{\infty} P\left\{C^{-1}\psi\left(\frac{X_1}{\varepsilon}\right) > n\right\} \leq C^{-1}E\psi\left(\frac{X_1}{\varepsilon}\right) < \infty.$$

По лемме Бореля–Кантелли $X_n/b_n \rightarrow 0$ п.н. Теперь для завершения доказательства достаточно применить утверждение леммы 5.

Следующее экспоненциальное неравенство является основным инструментом, используемым при доказательстве закона больших чисел для зависимого бутстрепа среднего, представленного в теореме (см. п. 4). Оно является аналогом экспоненциального неравенства Микоша (см. [10, лемма 5.1]) на случай зависимого бутстрепа.

Нам нужно добавить два дополнительных обозначения к обозначениям из п. 2. Пусть $\{X_n, n \geq 1\}$ — последовательность (не обязательно независимых или одинаково распределенных) случайных величин. Для $\omega \in \Omega$ и $n \geq 1$ положим

$$M_n(\omega) = \frac{1}{m(n)} \max_{1 \leq j \leq n} |X_j(\omega) - \bar{X}_n(\omega)|,$$

$$B_n(\omega) = \frac{1}{n m(n)} \sum_{j=1}^n (X_j(\omega) - \bar{X}_n(\omega))^2,$$

где

$$\bar{X}_n(\omega) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n X_j(\omega).$$

Лемма 7. Пусть $\{a_n, n \geq 1\}$ и $\{h_n, n \geq 1\}$ — две последовательности положительных чисел. Тогда для $\omega \in \Omega$ и $n \geq 1$ таких, что $h_n M_n(\omega) < 1$, и любых $\varepsilon > 0$ выполняется следующее неравенство:

$$P\left\{\left|\frac{1}{m(n)} \sum_{j=1}^{m(n)} \hat{X}_{n,j}^{(\omega)} - \bar{X}_n(\omega)\right| \geq \varepsilon a_n\right\} \leq 2 \exp\left\{-\varepsilon h_n a_n + \frac{h_n^2 B_n(\omega)}{2(1 - h_n M_n(\omega))}\right\}.$$

$$P\left\{\left|\frac{1}{m(n)} \sum_{j=1}^{m(n)} \hat{X}^{(\omega)_{n,j}} - \bar{X}_n(\omega)\right| \geq \varepsilon a_n\right\} \leq 2 \exp\left\{-\varepsilon h_n a_n + \frac{h_n^2 B_n(\omega)}{2(1 - h_n M_n(\omega))}\right\}.$$

Доказательство. По неравенству Маркова

$$P\left\{\left|\frac{1}{m(n)} \sum_{j=1}^{m(n)} \hat{X}_{n,j}^{(\omega)} - \bar{X}_n(\omega)\right| \geq \varepsilon a_n\right\}$$

$$\leq \exp\{-\varepsilon h_n a_n\} E \exp\left\{h_n \left|\frac{1}{m(n)} \sum_{j=1}^{m(n)} \hat{X}_{n,j}^{(\omega)} - \bar{X}_n(\omega)\right|\right\}$$

$$\leq \exp\{-\varepsilon h_n a_n\} E \exp\left\{h_n \left(\frac{1}{m(n)} \sum_{j=1}^{m(n)} \hat{X}_{n,j}^{(\omega)} - \bar{X}_n(\omega)\right)\right\}$$

$$+ \exp\{-\varepsilon h_n a_n\} E \exp\left\{-h_n \left(\frac{1}{m(n)} \sum_{j=1}^{m(n)} \hat{X}_{n,j}^{(\omega)} - \bar{X}_n(\omega)\right)\right\}.$$

Оценим только среднее в первом слагаемом в правой части, точно такая же оценка имеет место и для среднего во втором слагаемом.

Начнем с того, что в силу предложения 2 случайные величины $\{\hat{X}_{n,j}^{(\omega)}, 1 \leq j \leq m(n)\}$, $n \geq 1$, полученные процедурой зависимого бутстрепа, являются отрицательно зависимыми и перестановочными. Следовательно, по п. 1) леммы 1 случайные величины

$$\left\{ \exp \left\{ \frac{h_n}{m(n)} \left(\hat{X}_{n,j}^{(\omega)} - \bar{X}_n(\omega) \right) \right\}, 1 \leq j \leq m(n) \right\}$$

отрицательно зависимы и одинаково распределены. Поэтому

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \exp \left\{ h_n \left(\frac{1}{m(n)} \sum_{j=1}^{m(n)} \hat{X}_{n,j}^{(\omega)} - \bar{X}_n(\omega) \right) \right\} &= \mathbf{E} \left[\prod_{j=1}^{m(n)} \exp \left\{ \frac{h_n}{m(n)} \left(\hat{X}_{n,j}^{(\omega)} - \bar{X}_n(\omega) \right) \right\} \right] \\ &\leq \prod_{j=1}^{m(n)} \mathbf{E} \exp \left\{ \frac{h_n}{m(n)} \left(\hat{X}_{n,j}^{(\omega)} - \bar{X}_n(\omega) \right) \right\} \end{aligned}$$

по п. 2) леммы 1. В силу одинаковой распределенности это выражение равно

$$\begin{aligned} \left[\mathbf{E} \exp \left\{ \frac{h_n}{m(n)} \left(\hat{X}_{n,1}^{(\omega)} - \bar{X}_n(\omega) \right) \right\} \right]^{m(n)} &= \left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \exp \left\{ \frac{h_n}{m(n)} (X_i(\omega) - \bar{X}_n(\omega)) \right\} \right]^{m(n)} \\ &= \left[1 + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(\frac{h_n^2}{2! m(n)^2} (X_i(\omega) - \bar{X}_n(\omega))^2 + \frac{h_n^3}{3! m(n)^3} (X_i(\omega) - \bar{X}_n(\omega))^3 \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{h_n^4}{4! m(n)^4} (X_i(\omega) - \bar{X}_n(\omega))^4 + \dots \right) \right]^{m(n)} \\ &= \left[1 + \frac{h_n^2}{m(n)} \sum_{i=1}^n \frac{(X_i(\omega) - \bar{X}_n(\omega))^2}{nm(n)} \right. \\ &\quad \left. \times \left(\frac{1}{2!} + \frac{h_n}{3!} \frac{X_i(\omega) - \bar{X}_n(\omega)}{m(n)} + \frac{h_n^2}{4!} \left(\frac{X_i(\omega) - \bar{X}_n(\omega)}{m(n)} \right)^2 + \dots \right) \right]^{m(n)} \\ &\leq \left[1 + \frac{h_n^2}{m(n)} \frac{B_n(\omega)}{2} (1 + h_n M_n(\omega) + (h_n M_n(\omega))^2 + \dots) \right]^{m(n)} \\ &= \left[1 + \frac{h_n^2}{2m(n)} \frac{B_n(\omega)}{1 - h_n M_n(\omega)} \right]^{m(n)} \leq \exp \left\{ \frac{h_n^2}{2m(n)} \frac{B_n(\omega)}{1 - h_n M_n(\omega)} \right\}^{m(n)} \\ &= \exp \left\{ \frac{h_n^2 B_n(\omega)}{2(1 - h_n M_n(\omega))} \right\}. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\mathbf{P} \left\{ \left| \frac{1}{m(n)} \sum_{j=1}^{m(n)} \hat{X}_{n,j}^{(\omega)} - \bar{X}_n(\omega) \right| \geq \varepsilon a_n \right\} \leq 2 \exp \left\{ -\varepsilon h_n a_n + \frac{h_n^2 B_n(\omega)}{2(1 - h_n M_n(\omega))} \right\}.$$

4. Скорость полной сходимости для зависимого бутстрепа среднего. С помощью полученных результатов можно вывести закон больших чисел для зависимого бутстрепа среднего. Этот закон является аналогом теоремы 2.1 работы [9] для случая зависимого бутстрепа.

Теорема. Пусть $\{X_n, n \geq 1\}$ — последовательность (не обязательно независимых или одинаково распределенных) случайных величин и $\{a_n, n \geq 1\}$ — последовательность положительных чисел. Если

$$(i) \quad \frac{\ln n}{m(n) a_n} \max_{1 \leq i \leq n} |X_i| \rightarrow 0 \quad \text{н.ч.,}$$

$$(ii) \quad \frac{\ln n}{nm(n)a_n^2} \sum_{i=1}^n X_i^2 \rightarrow 0 \quad \text{п.н.},$$

то для всех вещественных чисел r , любого $\varepsilon > 0$ и почти всех $\omega \in \Omega$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^r \mathbf{P} \left\{ \left| \frac{1}{m(n)} \sum_{j=1}^{m(n)} \hat{X}_{n,j}^{(\omega)} - \bar{X}_n(\omega) \right| \geq \varepsilon a_n \right\} < \infty.$$

Прежде чем доказывать эту теорему, сделаем ряд замечаний.

З а м е ч а н и я. 1. Результат теоремы будет тем более сильным, чем больше значение r . В противоположность теоремам Баума–Каца, Эрдёша, Сюя–Роббинса и Спитцера о полной сходимости, значение r не играет никакой роли в условиях теоремы и может быть взято произвольно большим.

2. При $r = 0$ по лемме Бореля–Кантелли и результату теоремы можно утверждать, что для почти всех $\omega \in \Omega$

$$\frac{1}{a_n} \left(\frac{1}{m(n)} \sum_{j=1}^{m(n)} \hat{X}_{n,j}^{(\omega)} - \bar{X}_n(\omega) \right) \rightarrow 0 \quad \text{п.н.}$$

3. В силу леммы 5, если $(\ln n)/(m(n)a_n) \downarrow 0$ монотонно, то условие (i) теоремы эквивалентно более слабому и значительно более простому условию

$$\frac{\ln n}{m(n)a_n} X_n \rightarrow 0 \quad \text{п.н.}$$

4. Тщательный анализ доказательства теоремы показывает, что условия (i) и (ii) могут быть слегка ослаблены:

$$(i') \quad \frac{\ln n}{m(n)a_n} \max_{1 \leq i \leq n} |X_i - \bar{X}_n| \rightarrow 0 \quad \text{п.н.},$$

$$(ii') \quad \frac{\ln n}{nm(n)a_n^2} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2 \rightarrow 0 \quad \text{п.н.}$$

Игнорируя тот факт, что условия (i') и (ii') очевидно слабее, чем условия (i) и (ii), следует заметить, что они более громоздки и их сложнее проверить.

Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы. Утверждение теоремы очевидно для $r < -1$, так что предположим, что $r \geq -1$. В обозначениях леммы 7 пусть

$$\Omega_0 = \left\{ \omega: \frac{\ln n}{a_n} M_n(\omega) \rightarrow 0, \frac{\ln n}{a_n^2} B_n(\omega) \rightarrow 0 \right\}.$$

Легко проверить, что условия (i) и (ii) влекут $\mathbf{P}(\Omega_0) = 1$.

Для фиксированного $r \geq -1$, $\varepsilon > 0$ и $\omega \in \Omega_0$ положим

$$h_n = \frac{3+r}{\varepsilon a_n} \ln n, \quad n \geq 1.$$

Так как $\omega \in \Omega_0$, то можно утверждать, что

$$h_n M_n(\omega) = \frac{3+r}{\varepsilon} \frac{\ln n}{a_n} M_n(\omega) \rightarrow 0 \quad \text{и} \quad \frac{h_n^2}{\ln n} B_n(\omega) = \left(\frac{3+r}{\varepsilon} \right)^2 \frac{\ln n}{a_n^2} B_n(\omega) \rightarrow 0.$$

Пусть n будет настолько большим, что

$$h_n^2 B_n(\omega) \leq \ln n \quad \text{и} \quad h_n M_n(\omega) \leq \frac{1}{2}.$$

Из леммы 7 следует, что

$$\begin{aligned} n^r \mathbf{P} \left\{ \left| \frac{\sum_{j=1}^{m(n)} \hat{X}_{n,j}^{(\omega)}}{m(n)} - \bar{X}_n(\omega) \right| \geq \varepsilon_n \right\} &\leq 2n^r \exp \left\{ -\varepsilon h_n a_n + \frac{h_n^2 B_n(\omega)}{2(1 - h_n M_n(\omega))} \right\} \\ &\leq 2n^r \exp \{ -(3+r) \ln n + \ln n \} = 2n^r \exp \{ -(2+r) \ln n \} \leq 2n^{-2}, \end{aligned}$$

так как $r \geq -1$, откуда следует утверждение теоремы.

Следствие. Пусть $\{X_n, n \geq 1\}$ — последовательность одинаково распределенных (не обязательно независимых) случайных величин и $0 < \alpha < 2$. Если

$$E|X_1|^\alpha |\ln |X_1||^\alpha < \infty,$$

то для любого r , любого $\varepsilon > 0$ и почти всех $\omega \in \Omega$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^r \mathbf{P} \left\{ \left| \frac{1}{n^{1/\alpha}} \sum_{j=1}^n (\hat{X}_{n,j}^{(\omega)} - \bar{X}_n(\omega)) \right| \geq \varepsilon \right\} < \infty.$$

Доказательство. Положим

$$m(n) = n \quad \text{и} \quad a_n = n^{(1-\alpha)/\alpha}, \quad n \geq 1.$$

Нужно проверить, что выполняются условия (i) и (ii).

Для условия (i) обозначим

$$b_n = \frac{n^{1/\alpha}}{\ln n} \quad \text{и} \quad \psi(t) = t^\alpha (\ln t)^\alpha, \quad t \geq 1.$$

В силу леммы 2 имеем $\psi(b_n) \geq Cn$, где величина C не зависит от n . Теперь условие (i) следует из леммы 6.

Условие (ii) непосредственно вытекает из леммы 4. Следует отметить, что утверждение леммы 4 остается справедливым даже при более слабом моментном условии.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Arenal-Gutiérrez E., Matrán C., Cuesta-Albertos J. A. On the unconditional strong law of large numbers for the bootstrap mean. — *Statist. Probab. Lett.*, 1996, v. 27, № 1, p. 49–60.
2. Athreya K. B. Strong law for the bootstrap. — *Statist. Probab. Lett.*, 1983, v. 1, p. 147–150.
3. Barnes G. R., Tucker H. G. On almost sure convergence of normed maxima of independent random variables. — *J. London Math. Soc.* (2), 1977, v. 16, p. 377–383.
4. Bickel P. J., Freedman D. Some asymptotic theory for the bootstrap. — *Ann. Statist.*, 1981, v. 9, p. 1196–1217.
5. Bozorgnia A., Patterson R. F., Taylor R. L. Limit theorems for dependent random variables. — *Proceedings of the First World Congress of Nonlinear Analysts* (Tampa, 1992). Ed. by V. Lakshmikantham. Berlin: de Gruyter, 1996, p. 1639–1650.
6. Csörgő S. On the law of large numbers for the bootstrap mean. — *Statist. Probab. Lett.*, 1992, v. 14, № 1, p. 1–7.
7. Efron B. Bootstrap methods: Another look at the jackknife. — *Ann. Statist.*, 1979, v. 7, p. 1–26.
8. Lehmann E. L. Some concepts of dependence. — *Ann. Math. Statist.*, 1966, v. 37, p. 1137–1153.
9. Li D., Rosalsky A., Ahmed S. E. Complete convergence of bootstrapped means and moments of the supremum of normed bootstrapped sums. — *Stochastic Anal. Appl.*, 1999, v. 17, № 5, p. 799–814.
10. Mikosch T. Almost sure convergence of bootstrapped means and U -statistics. — *J. Statist. Plann. Inference*, 1994, v. 41, № 1, p. 1–19.
11. Petrov V. V. On the strong law of large numbers. — *Statist. Probab. Lett.*, 1996, v. 26, № 4, p. 377–380.
12. Smith W. D., Taylor R. L. Consistency of dependent bootstrap estimators. — *Amer. J. Math. Management Sci.*, 2001, v. 21, № 3–4, p. 359–382.
13. Smith W., Taylor R. L. Dependent bootstrap confidence intervals. — *IMS Lecture Notes Monogr. Ser.*, 2001, v. 37, p. 91–107.