Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Ю. Королев, И. Г. Шевцова, О точности нормальной аппроксимации. I, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2005, том 50, выпуск 2, 353–366

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp112>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.237.59.107

26 апреля 2023 г., 12:52:36

© 2005 г.

КОРОЛЕВ В. Ю.*, ШЕВЦОВА И. Г.*

О ТОЧНОСТИ НОРМАЛЬНОЙ АППРОКСИМАЦИИ. I

Приведены практически применимые оценки точности нормальной аппроксимации для распределений сумм независимых одинаково распределенных абсолютно непрерывных случайных величин с конечными моментами порядка $2 + \delta$, $0 < \delta \leq 1$. При этом правая часть оценки представляет собой сумму двух слагаемых, первое из которых является ляпуновской дробью с абсолютной константой, как угодно близкой к асимптотически правильной, а второе убывает экспоненциально быстро.

Ключевые слова и фразы: центральная предельная теорема, нормальная аппроксимация, неравенство Берри-Эссеена, оценка скорости сходимости, асимптотически правильная константа.

1. Введение. Пусть $X_1, X_2, \dots$ — независимые одинаково распределенные случайные величины (с.в.), удовлетворяющие условиям

$$\mathbf{E}X_1 = 0, \quad \mathbf{D}X_1 = \sigma^2 < \infty. \quad (1.1)$$

Функцию распределения с.в. X_1 обозначим $F(x)$, ее характеристическую функцию — $f(t)$. Введем аналогичные обозначения для функции распределения и характеристической функции нормированной суммы $S_n = (X_1 + \dots + X_n)/(\sigma\sqrt{n})$:

$$F_n(x) = F^{*n}(x\sigma\sqrt{n}), \quad f_n(t) = \left(f\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)\right)^n.$$

Функцию распределения и плотность стандартного нормального закона обозначим $\Phi(x)$ и $\varphi(x)$ соответственно:

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-t^2/2} dt, \quad \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{x^2}{2}\right\}.$$

Центральная предельная теорема утверждает, что последовательность функций распределения нормированных сумм S_n случайных величин, удовлетворяющих условию (1.1), при $n \rightarrow \infty$ равномерно сходится к стандартной нормальной функции распределения:

$$\rho(F_n, \Phi) \equiv \sup_x |F_n(x) - \Phi(x)| \rightarrow 0.$$

Известно, что при условии существования абсолютного момента порядка $2 + \delta$ с $0 < \delta \leq 1$, т.е. при условии

$$\beta^{2+\delta} \equiv \mathbf{E}|X_1|^{2+\delta} < \infty, \quad (1.2)$$

величина $\rho(F_n, \Phi)$ имеет порядок $n^{-\delta/2}$. А именно, справедливо неравенство

$$\rho(F_n, \Phi) \leq C_\delta L_n^{2+\delta}, \quad (1.3)$$

где

$$L_n^{2+\delta} = \frac{\beta^{2+\delta}}{\sigma^{2+\delta} n^{\delta/2}},$$

* Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, факультет вычислительной математики и кибернетики, Ленинские горы, 119992 Москва, ГСП-2, Россия; e-mail: vkorolev@comtv.ru

¹⁾ Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты 03-01-00428, 04-01-00671, 05-07-90103).

а C_δ — положительная абсолютная постоянная (см., например, [6, гл. VI, теорема 6]). При $\delta = 0$ нормальная сходимости имеет место, но может быть как угодно медленной [5].

Лучше всего изучен случай, когда $\delta = 1$, т.е.

$$\beta^3 \equiv \mathbf{E}|X_1|^3 < \infty. \quad (1.4)$$

Для этой ситуации классическое неравенство Берри–Эссеена устанавливает, что

$$\rho(F_n, \Phi) \leq CL_n^3, \quad (1.5)$$

где $L_n^3 = \beta^3/(\sigma^3\sqrt{n})$, а C — положительная абсолютная постоянная [14], [15]. История отыскания значения абсолютной константы в неравенстве Берри–Эссеена интересна и богата результатами. Так, Э. Берри утверждал, что $C \leq 1.88$, однако, как обнаружил позднее П. Л. Сюй [18], его вычисления содержали ошибку. К.-Г. Эссеен [15] показал, что $C \leq 7.59$. Х. Бергстрём [13] показал, что $C \leq 4.8$. К. Такано [22] получил оценку $C \leq 2.031$. По-видимому, работа Такано (опубликованная на японском языке) выпала из поля зрения некоторых исследователей, так как в нескольких более поздних публикациях приводятся немного худшие оценки. В частности, в работе [17] имеется упоминание о неопубликованных вычислениях, дающих $C \leq 2.9$. В работе Д. Л. Уоллеса [26] приведена оценка $C \leq 2.05$. В. Феллер [9], упоминая результат Уоллеса, также обходит вниманием работу Такано. Вычислению наименьшего возможного значения абсолютной постоянной C придавал большое значение А. Н. Колмогоров. В работе [3] он высказал предположение о том, что $C = 1/\sqrt{2\pi}$. К сожалению, это предположение оказалось не совсем точным: в 1956 г., решая несколько иную задачу, К.-Г. Эссеен [17] показал, что в (1.5) постоянная C не может быть меньше, чем

$$C_1 = \frac{\sqrt{10} + 3}{6\sqrt{2\pi}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} + 0.0107899 \dots$$

Этот результат получен как следствие решения задачи о наименьшей постоянной C_* , обеспечивающей асимптотическую оценку

$$\rho(F_n, \Phi) \leq C_* L_n^3 + o(L_n^3).$$

Эссеен показал, что в рассматриваемой ситуации $C_* = C_1$. Поскольку $C \geq C_*$, была найдена нижняя оценка для C . Далее, как показал Б. А. Rogozin [8],

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \inf_{a, b} \frac{\sigma^3 \sqrt{n}}{\beta^3} \sup_x \left| F_n(x) - \Phi\left(\frac{x-a}{b}\right) \right| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \leq 0.3990.$$

Тем самым предположение Колмогорова было в определенном смысле подтверждено.

Тем не менее, точное значение константы C в классическом неравенстве Берри–Эссеена до сих пор неизвестно. В 1966–1967 гг. В. М. Золотарев показал, что $C < 0.9051$ [2] и $C < 0.8197$ [27]. В 1972 г. Ван Беек [25] улучшил результат Золотарева и, используя тот же метод, получил оценку $C < 0.7975$. Наилучшая на сегодняшний день «безусловная» верхняя оценка константы C в классическом неравенстве Берри–Эссеена

$$C \leq 0.7655$$

принадлежит И. С. Шиганову [11].

Дальнейшие усилия по уточнению неравенства Берри–Эссеена были направлены на усовершенствование его структуры. В частности, В. М. Золотарев [2] добился уточнения константы при L_n^3 за счет внесения в неравенство дополнительных членов и показал, что справедливо неравенство

$$\rho(F_n, \Phi) \leq 0.8197L_n^3 + 0.5894L_n^4 + O(L_n^5), \quad L_n^3 \rightarrow 0.$$

Г. Правитц [21] показал, что, если $L_n^3 \leq 0.1$, то $\rho(F_n, \Phi) \leq 0.51513L_n^3$.

Развивая идею о том, что оптимальная структура оценки точности нормальной аппроксимации должна включать слагаемое вида L_n^3 с оптимальным коэффициентом C_1 плюс «добавка», убывающая быстрее, чем $n^{-1/2}$, В. Бенткус [12] показал, что существует положительная постоянная $\bar{C}$, обеспечивающая оценку

$$|F_n(x) - \Phi(x)| \leq \left(\frac{1}{6\sqrt{2\pi}} + \varphi(x) \right) L_n^3 + \bar{C}L_n^5,$$

из которой вытекает, что

$$\rho(F_n, \Phi) \leq \frac{7L_n^3}{6\sqrt{2\pi}} + \bar{C}L_n^5 \quad \left(\frac{7}{6\sqrt{2\pi}} = 0.4654 \dots \right).$$

Наконец, недавно Г. П. Чистяков [10] доказал, что в указанных предположениях существует абсолютная постоянная $\tilde{C}$ такая, что

$$\rho(F_n, \Phi) \leq C_1 L_n^3 + \tilde{C} L_n^{40/13} |\ln L_n^3|^{7/6}.$$

Приведенные выше результаты являются универсальными, они справедливы при любых распределениях слагаемых с конечным третьим моментом. Однако, в такой их универсальности заключен и их недостаток: во многих практических ситуациях приведенные выше оценки являются слишком грубыми. Без дополнительных предположений абсолютная константа в первом слагаемом в правой части неравенства Чистякова, убывающем как $O(n^{-1/2})$, не может быть уменьшена. Таким образом, по сути единственный путь существенного уточнения упомянутых результатов заключается в рассмотрении достаточно общих частных случаев.

В некоторых конкретных (также достаточно общих) ситуациях, когда имеется некоторая дополнительная информация о распределении слагаемых, эти оценки можно уточнить. В частности, В. Бенткус [12] показал, что если слагаемые X_j имеют симметричное распределение, то существует абсолютная постоянная $\hat{C}$ такая, что

$$\rho(F_n, \Phi) \leq \frac{L_n^3}{\sqrt{2\pi}} + \hat{C}L_n^4.$$

Накладывая другие условия, оценки точности нормальной аппроксимации можно уточнить весьма существенно. В этом нас убеждает хорошо известный результат К.-Г. Эссеена [16], согласно которому если распределение слагаемых X_j не является решетчатым, то при $n \rightarrow \infty$

$$F_n(x) - \Phi(x) = \frac{\mathbf{E}X_1^3}{6\sigma^3\sqrt{2\pi n}} (1 - x^2) e^{-x^2/2} + o(n^{-1/2}) \quad (1.6)$$

равномерно по $x \in \mathbf{R}$ (см. также [9]). Легко видеть, что

$$\sup_x |1 - x^2| e^{-x^2/2} = 1.$$

Таким образом, учитывая, что $|\mathbf{E}X_1^3| \leq \mathbf{E}|X_1|^3$, из (1.6) мы получаем неравенство

$$\rho(F_n, \Phi) \leq \frac{L_n^3}{6\sqrt{2\pi}} + R_n, \quad (1.7)$$

справедливое для случая нерешетчатого распределения слагаемых, где $R_n = o(n^{-1/2})$ при $n \rightarrow \infty$. Более того, из (1.7) вытекает соотношение

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} L_n^{-3} \rho(F_n, \Phi) \leq \frac{1}{6\sqrt{2\pi}} < 0.0665, \quad (1.8)$$

откуда в силу (1.6) мы заключаем, что для случая нерешетчатых слагаемых число $1/(6\sqrt{2\pi}) < 0.0665$ является асимптотически правильной абсолютной постоянной в

аналоге неравенства Берри–Эссеена. К сожалению, из-за отсутствия явных оценок величины R_n неравенством (1.7) нельзя пользоваться для практических вычислений.

Для случая $0 < \delta < 1$ в работе [23] (также см. [22]) получена следующая таблица значений оценок константы C_δ :

$\delta =$	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
$C_\delta \leq$	1.102	1.076	1.008	0.950	0.902	0.863	0.833	0.812	0.802

Л. Падитц [19] показал, что при $\delta = 0$ имеет место неравенство

$$\rho(F_n, \Phi) \leq 3.51 \frac{1}{\sigma^2} \mathbb{E} \left(X_1^2 \min \left\{ 1, \frac{|X_1|}{\sigma\sqrt{n}} \right\} \right),$$

откуда вытекает, что имеет место равномерная по $\delta \in (0, 1]$ оценка $C_\delta \leq 3.51$, так как при любом $\delta \in (0, 1]$ выражение в правой части последнего неравенства не превосходит $3.51 L_n^{2+\delta}$.

Однако об оценках асимптотически правильных констант

$$\underline{C}(\delta) = \sup \limsup_{n \rightarrow \infty} (L_n^{2+\delta})^{-1} \rho(F_n, \Phi),$$

где супремум берется по всем распределениям F , удовлетворяющим условиям (1.1) и (1.2), в случае $0 < \delta < 1$ на сегодняшний день не известно практически ничего. В то же время, на фоне все возрастающего интереса к изучению случайных величин, распределения которых имеют так называемые тяжелые хвосты (что отчасти обусловлено необходимостью решать задачи, связанные с большими рисками), особую важность приобретает вопрос о возможности использования нормальной аппроксимации для распределений сумм слагаемых, распределения которых имеют (в некотором смысле) тяжелые хвосты, и о ее точности.

В данной работе мы рассматриваем «гладкий» случай и предполагаем, что слагаемые имеют ограниченную плотность $p(x)$:

$$\sup_x p(x) \equiv A < \infty. \quad (1.9)$$

Мы показываем, что при условиях (1.1), (1.2) с $\delta \in (0, 1]$ и (1.9) для любого $\varepsilon > 0$ справедлива оценка

$$\rho(F_n, \Phi) \leq \left(\frac{2^{1-\delta/2} \Gamma((\delta+2)/2)}{\pi(1+\delta)(2+\delta)} + \varepsilon \right) L_n^{2+\delta} + Q_n, \quad (1.10)$$

где $\Gamma(\cdot)$ — эйлерова гамма-функция, а величина $Q_n = Q_n(\delta, A, \beta^{2+\delta}, \sigma^2, \varepsilon)$ при каждом $\varepsilon > 0$ убывает экспоненциально быстро с ростом n . При этом в случае $\delta = 1$ (т.е. при выполнении условия (1.4))

$$\frac{2^{1-\delta/2} \Gamma((\delta+2)/2)}{\pi(1+\delta)(2+\delta)} = \frac{1}{6\sqrt{2}\pi}$$

и в (1.10) константа при L_n^3 может быть выбрана как угодно близкой к неухудшаемой асимптотической константе в (1.7). Это обстоятельство позволяет высказать предположение, что и для остальных значений $\delta \in (0, 1]$ число $C(\delta) = 2^{1-\delta/2} \Gamma((\delta+2)/2) / (\pi(1+\delta)(2+\delta))$ является асимптотически правильной абсолютной постоянной в аналоге неравенства (1.3) для нерешетчатых распределений. Величина же Q_n в (1.10) имеет эффективно вычисляемое явное выражение в терминах элементарных функций, что позволяет, выбирая ε оптимальным образом, применять приводимые ниже оценки при практических вычислениях, связанных с использованием нормальной аппроксимации. Мы также показываем, что в (1.10) можно совсем избавиться от ε , но платой за отсутствие добавки ε в константе при $L_n^{2+\delta}$ будет ухудшение скорости убывания Q_n

с ростом n : вместо экспоненциально быстрого убывания Q_n в таком случае мы имеем $Q_n = O((L_n^{2+\delta})^{3/2} |\ln L_n^{2+\delta}|^{\delta/4})$. В частности, при $\delta = 1$ справедливо соотношение

$$\rho(F_n, \Phi) \leq \frac{1}{6\sqrt{2\pi}} \cdot L_n^3 + O\left((L_n^3)^{3/2} |\ln L_n^3|^{1/4}\right).$$

Всюду далее для упрощения записей, не ограничивая общность, мы полагаем $\sigma^2 = 1$.

2. Основные результаты. Пусть d — некоторое число, лежащее в интервале $(0, \sqrt{2})$. Введем функции

$$a_1(d) = \frac{1}{4} \sum_{r=2}^{\infty} \frac{1}{r} \left(\frac{d^2}{2}\right)^{r-2} = -\frac{1}{d^4} \left[\frac{d^2}{2} + \ln\left(1 - \frac{d^2}{2}\right)\right], \quad (2.1)$$

$$a_2(d) = d^{2-\delta} a_1(d) + \frac{2^{1-\delta}}{(1+\delta)(2+\delta)}, \quad (2.2)$$

$$b_1(d) = \frac{1}{2} - d^{\delta/2} a_2(d). \quad (2.3)$$

Несложно видеть, что

$$a_1(d) = \frac{1}{4} \sum_{r=2}^{\infty} \frac{1}{r} \left(\frac{d^2}{2}\right)^{r-2} = \frac{1}{4} \left[\frac{1}{2} + \sum_{r=3}^{\infty} \frac{1}{r} \left(\frac{d^2}{2}\right)^{r-2}\right],$$

причем

$$\sum_{r=3}^{\infty} \frac{1}{r} \left(\frac{d^2}{2}\right)^{r-2} = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j+2} \left(\frac{d^2}{2}\right)^j \leq \frac{1}{3} \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{d^2}{2}\right)^j = \frac{d^2}{3(2-d^2)},$$

так что

$$\lim_{d \rightarrow 0+} a_1(d) = \frac{1}{8},$$

и, стало быть,

$$\lim_{d \rightarrow 0+} a_2(d) = \frac{2^{1-\delta}}{(1+\delta)(2+\delta)}, \quad \lim_{d \rightarrow 0+} b_1(d) = \frac{1}{2}.$$

Более того, можно убедиться, что функция $b_1(d)$ монотонно убывает при $d \in (0, \sqrt{2})$, причем на интервале $(0, \sqrt{2})$ лежит единственный нуль этой функции, который мы обозначим $d_0(\delta)$.

Обозначим $d(\delta) = \min\{d_0(\delta), (\beta^{2+\delta})^{-2(1-\delta)/\delta}\}$.

Теорема 2.1. Пусть выполнены условия (1.1), (1.2) и (1.9). Тогда для любого $n \geq 2$ справедлива оценка

$$\rho(F_n, \Phi) \leq \inf_{0 < d \leq d(\delta)} \left\{ g(d) \frac{\beta^{2+\delta}}{n^{\delta/2}} + V_n(\beta^{2+\delta}, d) + W_n(A, \beta^{2+\delta}, d) \right\}, \quad (2.4)$$

где

$$g(d) = \frac{\Gamma((2+\delta)/2)}{2\pi} \frac{a_2(d)}{b_1^{1+\delta/2}(d)}, \quad (2.5)$$

$$V_n(\beta^{2+\delta}, d) = \frac{(\beta^{2+\delta})^2}{\pi d^2 n} \exp \left\{ -\frac{d^2 n}{(\beta^{2+\delta})^2} \right\}, \quad (2.6)$$

$$W_n(A, \beta^{2+\delta}, d) = \frac{\beta^{2+\delta} A}{d} \left[1 - \frac{d^2}{3\pi^2 A^2 (\beta^{2+\delta})^2} \left(1 - \frac{(2d)^{2+\delta}}{\pi^{2+\delta} (\beta^{2+\delta})^{1+\delta}} \right)^3 \right]^{n-2}. \quad (2.7)$$

Поскольку основной вклад в оценку (2.4) вносит первое слагаемое под знаком инфимума в правой части, медленнее других убывающее по n , существенную роль играет абсолютная константа в этом слагаемом. С целью сделать вид этой константы более наглядным, мы приведем еще одну, эквивалентную, но, на наш взгляд, более удобную формулировку теоремы 2.1.

Легко видеть, что на интервале $(0, d_0(\delta))$ функция $g(d)$ монотонно возрастает, причем

$$\lim_{d \rightarrow 0+} g(d) = \frac{2^{1-\delta/2} \Gamma((\delta+2)/2)}{\pi(1+\delta)(2+\delta)}, \quad \lim_{d \rightarrow d_0(\delta)-} g(d) = +\infty.$$

Поэтому для любого $\varepsilon > 0$ существует корень d_ε уравнения

$$g(d) = \frac{2^{1-\delta/2} \Gamma((\delta+2)/2)}{\pi(1+\delta)(2+\delta)} + \varepsilon, \quad (2.8)$$

лежащий в полуинтервале $(0, d_0(\delta))$. При этом d_ε как функция ε монотонно возрастает от $0+$ до $d_0(\delta)$ при ε , изменяющемся от $0+$ до $+\infty$. Поэтому найдется такое значение $\varepsilon(\delta)$, что для любого $\varepsilon \in (0, \varepsilon(\delta))$ справедливо неравенство $0 < d_\varepsilon < d(\delta)$.

Теорема 2.2. Пусть выполнены условия (1.1), (1.2) и (1.9). Тогда для любого $n \geq 2$ справедлива оценка

$$\rho(F_n, \Phi) \leq \inf_{0 < \varepsilon < \varepsilon(\delta)} \left\{ \left(\frac{2^{1-\delta/2} \Gamma((\delta+2)/2)}{\pi(1+\delta)(2+\delta)} + \varepsilon \right) \frac{\beta^{2+\delta}}{n^{\delta/2}} + V_n(\beta^{2+\delta}, d_\varepsilon) + W_n(A, \beta^{2+\delta}, d_\varepsilon) \right\}, \quad (2.9)$$

где $V_n(\beta^{2+\delta}, d)$ и $W_n(A, \beta^{2+\delta}, d)$ определены в формулировке теоремы 2.1.

Для случая $\delta = 1$ (т.е. при выполнении условия (1.4)) из теоремы 2.1 мы получаем следующее утверждение. Пусть $\varepsilon > 0$ и d'_ε — единственный корень уравнения

$$g(d) = \frac{1}{6\sqrt{2\pi}} + \varepsilon$$

(лежащий в полуинтервале $(0, 1.14]$).

Следствие 2.1. Пусть выполнены условия (1.1), (1.4) и (1.9). Тогда для любого $n \geq 2$ справедлива оценка

$$\rho(F_n, \Phi) \leq \inf_{\varepsilon > 0} \left\{ \left(\frac{1}{6\sqrt{2\pi}} + \varepsilon \right) \frac{\beta^3}{\sqrt{n}} + V_n(\beta^3, d'_\varepsilon) + W_n(A, \beta^3, d'_\varepsilon) \right\}, \quad (2.10)$$

где

$$V_n(\beta^3, d) = \frac{(\beta^3)^2}{\pi d^2 n} \exp \left\{ -\frac{d^2 n}{(\beta^3)^2} \right\}, \quad (2.11)$$

$$W_n(A, \beta^3, d) = \frac{A\beta^3}{d} \left[1 - \frac{d^2}{3\pi^2 A^2 (\beta^3)^2} \left(1 - \frac{8d^3}{\pi^3 (\beta^3)^2} \right)^3 \right]^{n-2}. \quad (2.12)$$

З а м е ч а н и е 2.1. Как видно, для вычисления оценки (2.10) при каждом n достаточно знать лишь третий абсолютный момент и максимум плотности распределения с.в. X_1 . Используя это обстоятельство, мы построили графики зависимости оценки (2.10) от числа наблюдений n при некоторых значениях A и β^3 (рис. 1, 2 — см. с. 364, 365). При условиях (1.1) константа A не может быть сколь угодно близкой к нулю, более того, как показано в работе [7], для любой абсолютно непрерывной с.в. X с $EX = 0$, $DX = 1$ и ограниченной плотностью $p_X(x)$ выполнено соотношение

$$\sup_x p_X(x) \geq \frac{1}{2\sqrt{3}} > 0.288675.$$

Другими словами, в сделанных выше предположениях всегда $12A^2 \geq 1$. Как несложно видеть, оценка (2.10) тем хуже, чем больше A и β^3 (правая часть (2.10) принимает

наименьшее значение при $A = (2\sqrt{3})^{-1}$ и $\beta^3 = 1$). Поэтому на рис. 1 показано поведение оценки при $\beta^3 = 1.5$, а на рис. 2 — при $\beta^3 = 3$. На каждом рисунке приведены четыре графика, соответствующих значениям $A = 0.3$ (что близко к наименьшему возможному), $A = 0.5, 0.7, 1$. Так, например, третий абсолютный момент нормированного распределения Стюдента с четырьмя степенями свободы, имеющего довольно тяжелые хвосты, равен 2.8284, а максимум плотности — 0.5303, и график, близкий к оценке точности нормальной аппроксимации для распределений сумм с так распределенными слагаемыми можно найти на рис. 2 (кривая, соответствующая $A = 0.5$). Отметим, что на рис. 1, 2 приведены значения оценки (2.10), деленной на дробь Ляпунова $\beta^3/\sqrt{n}$. Это сделано для удобства ее сравнения с оценкой Берри-Эссеена, в которой используется наилучшая на сегодняшний день константа Шиганова 0.7655. Как видно из приведенных графиков, при малых n оценка Берри-Эссеена-Шиганова лучше. Но уже при n порядка нескольких десятков оценка (2.10) становится гораздо более точной.

Из теоремы 2.1 вытекает оценка асимптотически правильной константы в оценке скорости сходимости в центральной предельной теореме для гладких распределений, не зависящая от A . А именно, имеет место следующий результат.

Следствие 2.2. В условиях (1.1), (1.2) и (1.9) для любого $\delta \in (0, 1]$ справедливо соотношение

$$\sup \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{\delta/2}}{\beta^{2+\delta}} \rho(F_n, \Phi) \leq C(\delta) \equiv \frac{2^{1-\delta/2} \Gamma((\delta+2)/2)}{\pi(1+\delta)(2+\delta)},$$

где супремум берется по всем распределениям F , удовлетворяющим условиям (1.1), (1.2) и (1.9).

Как мы уже отмечали,

$$C(1) = \frac{1}{6\sqrt{2\pi}}.$$

Поэтому справедлив следующий результат.

Следствие 2.3. В условиях (1.1), (1.4) и (1.9) справедливо соотношение

$$\sup \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n}}{\beta^3} \rho(F_n, \Phi) \leq \frac{1}{6\sqrt{2\pi}} < 0.0665,$$

где супремум берется по всем распределениям F , удовлетворяющим условиям (1.1), (1.4) и (1.9) (что аналогично соотношению (1.8)).

С другой стороны, несложно убедиться, что

$$\sup_{0 < \delta \leq 1} C(\delta) = \lim_{\delta \rightarrow 0+} C(\delta) = \frac{1}{\pi}.$$

Поэтому из следствия 2.2 вытекает следующий довольно неожиданный факт: вне зависимости от значения $\delta \in (0, 1]$

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{\delta/2}}{\beta^{2+\delta}} \rho(F_n, \Phi) \leq \frac{1}{\pi} < 0.31831,$$

каким бы ни было распределение F , удовлетворяющее условиям (1.2) и (1.9).

Рассмотрим подробнее структуру оценки точности нормальной аппроксимации для случая гладких распределений. Для такой ситуации следствие 2.2 влечет соотношение

$$\rho(F_n, \Phi) \leq C(\delta) L_n^{2+\delta} + o(L_n^{2+\delta}).$$

Стремясь избавиться от присутствия ε в формулировках теоремы 2.2 и следствия 2.1, попытаемся уточнить вид члена $o(L_n^{2+\delta})$ в последнем соотношении. С этой целью заметим, что из следствия 2.1 вытекает существование не зависящих от n и d_ε положительных конечных констант Q', Q'', q' и q'' таких, что

$$\rho(F_n, \Phi) \leq C(\delta) L_n^{2+\delta} + \varepsilon L_n^{2+\delta} + \frac{Q'}{d_\varepsilon^2 n} \exp\{-q' d_\varepsilon^2 n\} + \frac{Q''}{d_\varepsilon} \exp\{-q'' d_\varepsilon^2 n\}. \quad (2.13)$$

В качестве q', q'', Q', Q'' можно взять

$$\begin{aligned} q' &= q'(\beta^{2+\delta}) = (\beta^{2+\delta})^{-2}, & Q' &= Q'(\beta^{2+\delta}) = \frac{(\beta^{2+\delta})^2}{\pi}, \\ q'' &= q''(A, \beta^{2+\delta}) = \frac{1}{3\pi^2 A^2 (\beta^{2+\delta})^2} \left(1 - \frac{4\sqrt{2}}{\pi^2}\right)^3 \approx \frac{0.00262}{A^2 (\beta^{2+\delta})^2}, \\ Q'' &= Q''(A, \beta^{2+\delta}) = e^2 A \beta^{2+\delta} \approx 7.38905 \beta^{2+\delta} A. \end{aligned}$$

Заметим также, что с помощью элементарных рассуждений можно получить оценку

$$d(\delta, \varepsilon) \geq M(\delta) \varepsilon^{2/\delta},$$

где

$$\begin{aligned} M(\delta) &= \{8\pi(1+\delta)(2+\delta)\}^{2/\delta} \left\{ 2^{1-\delta/2}(1+\delta)(2+\delta) \Gamma\left(\frac{2+\delta}{2}\right) + \left(6+\delta + \frac{2^{1-\delta}}{1+\delta}\right) \right. \\ &\quad \left. \times \left[2^{1-\delta/2} \Gamma\left(\frac{2+\delta}{2}\right) + \pi(1+\delta)(2+\delta) \right] \right\}^{-2/\delta}. \end{aligned}$$

Выбирая последовательность $\varepsilon = \varepsilon_n$ так, чтобы порядки убывания второго и четвертого слагаемых в соотношении (2.13) совпадали с точностью до логарифмического множителя, с учетом последней оценки для $d(\delta, \varepsilon)$ мы приходим к следующему утверждению.

Следствие 2.4. В условиях (1.1), (1.2) и (1.9) существует число $D = D(\delta, A, \beta^{2+\delta}) \in (0, \infty)$ такое, что

$$\rho(F_n, \Phi) \leq C(\delta) L_n^{2+\delta} + D(L_n^{2+\delta})^{3/2} |\ln L_n^{2+\delta}|^{\delta/4}.$$

При этом для D справедлива оценка

$$\begin{aligned} D = D(\delta, A, \beta^{2+\delta}) &\leq \left[\frac{1}{M(\delta)} \left(\frac{2+3\delta}{4q''(A, \beta^{2+\delta})} \right)^{\delta/4} + Q'(\beta^{2+\delta}) \frac{4q''(A, \beta^{2+\delta})}{2+3\delta} \right. \\ &\quad \left. + Q''(A, \beta^{2+\delta}) \left(\frac{4q''(A, \beta^{2+\delta})}{2+3\delta} \right)^{1/2} \right]. \end{aligned}$$

В частности, при $\delta = 1$ мы получаем следующий результат.

Следствие 2.5. В условиях (1.1), (1.4) и (1.9) существует число $D'(A, \beta^3) = D(1, A, \beta^3)$ такое, что

$$\rho(F_n, \Phi) \leq \frac{1}{6\sqrt{2}\pi} L_n^3 + D'(A, \beta^3) (L_n^3)^{3/2} |\ln L_n^3|^{1/4}.$$

Другими словами,

$$\rho(F_n, \Phi) \leq \frac{1}{6\sqrt{2}\pi} \frac{\beta^3}{\sqrt{n}} + D'(A, \beta^3) \frac{(\ln n)^{1/4}}{n^{3/4}}.$$

При этом для $D'(A, \beta^3)$ справедлива оценка

$$D'(A, \beta^3) \leq \frac{2.4319}{q''(A, \beta^{2+\delta})} + 0.8q''(A, \beta^{2+\delta}) Q'(\beta^{2+\delta}) + 0.8945 \sqrt{q''(A, \beta^{2+\delta})} Q''(A, \beta^{2+\delta}).$$

3. Доказательство результатов. Доказательство теорем 2.1 и 2.2 основано на нескольких леммах.

Лемма 3.1. Пусть ξ — случайная величина, для которой $\mathbf{E}\xi = 0$, $\mathbf{D}\xi = 1$, $\mathbf{E}|\xi|^{2+\delta} \equiv \beta^{2+\delta} < \infty$, $0 < \delta \leq 1$. Положим $f(t) = \mathbf{E}e^{it\xi}$, $t \in \mathbf{R}$. Тогда для любого $t \in \mathbf{R}$

$$\left| f(t) - 1 + \frac{t^2}{2} \right| \leq \frac{2^{1-\delta} \beta^{2+\delta} |t|^{2+\delta}}{(1+\delta)(2+\delta)}. \quad (3.1)$$

Доказательство см., например, в [4, с. 212–213].

Всюду далее, как и во введении, через $f(t)$ и $f_n(t)$, $t \in \mathbf{R}$, мы будем обозначать характеристические функции случайных величин X_1 и $S_n/\sqrt{n}$ соответственно. При этом $f_n(t) = (f(t/\sqrt{n}))^n$.

Лемма 3.2. Пусть выполнены условия (1.1) и (1.2) при $0 < \delta \leq 1$. Тогда для любого $d \in (0, (\beta^{2+\delta})^{-2(1-\delta)/\delta}]$ и любого $n \geq 1$ при $|t| \leq T_n \equiv d\sqrt{n}/\beta^{2+\delta}$ справедлива оценка

$$|f_n(t) - e^{-t^2/2}| \leq a_2(d) \frac{\beta^{2+\delta}}{n^{\delta/2}} |t|^{2+\delta} \exp\{-b_1(d) t^2\}.$$

Доказательство. Из неравенства Ляпунова следует, что $\beta \geq 1$, поэтому

$$d \leq (\beta^{2+\delta})^{-2(1-\delta)/\delta} \leq 1 < \sqrt{2}.$$

Для t из указанного промежутка имеем

$$\left| f\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) - 1 \right| \leq \frac{t^2}{2n} \mathbf{E}X_1^2 = \frac{t^2}{2n} \leq \frac{d^2}{2(\beta^{2+\delta})^2} \leq \frac{d^2}{2}. \quad (3.2)$$

Отсюда следует, что

$$\left| f\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) \right| \geq 1 - \frac{d^2}{2} > 0, \quad \forall d \in (0, (\beta^{2+\delta})^{-2(1-\delta)/\delta}) \subset (0, \sqrt{2}).$$

Значит, определен логарифм $\ln f(t/\sqrt{n})$ при всех $|t| \leq d\sqrt{n}/\beta^{2+\delta}$. Обозначим через $h(t)$ функцию

$$h(t) = \frac{t^2}{2} + \ln f_n(t) = \frac{t^2}{2} + n \ln f\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right).$$

Тогда

$$\left| f_n(t) - e^{-t^2/2} \right| = e^{-t^2/2} |e^{h(t)} - 1|. \quad (3.3)$$

Чтобы оценить модуль разности $|e^{h(t)} - 1|$, заметим, что для любого t верно неравенство

$$|e^{h(t)} - 1| \leq |h(t)| e^{|h(t)|}. \quad (3.4)$$

Стало быть, для доказательства леммы нам достаточно найти две оценки для $|h(t)|$, одна из которых будет величиной порядка $O(|t|^{2+\delta} n^{-\delta/2})$, а вторая — величиной порядка $O(t^2)$. Имеем

$$\begin{aligned} |h(t)| &= n \left| \ln \left[1 - \left(1 - f\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) \right) \right] + \frac{t^2}{2n} \right| \\ &= n \left| - \sum_{r=2}^{\infty} \frac{1}{r} \left(1 - f\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) \right)^r + f\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) - 1 + \frac{t^2}{2n} \mathbf{E}X_1^2 \right| \\ &\leq n \left| - \sum_{r=2}^{\infty} \frac{1}{r} \left(1 - f\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) \right)^{r-2} \left(1 - f\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) \right)^2 \right| + n \left| f\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) - 1 + \frac{t^2}{2n} \right|. \end{aligned}$$

С учетом (3.1) и (3.2) отсюда мы получаем

$$\begin{aligned} |h(t)| &\leq n \left[\left(\frac{t^2}{2n} \right)^2 \sum_{r=2}^{\infty} \frac{1}{r} \left(\frac{d^2}{2} \right)^{r-2} + \frac{2^{1-\delta} \beta^{2+\delta} |t|^{2+\delta}}{(1+\delta)(2+\delta) n^{1+\delta/2}} \right] \\ &= \frac{a_1(d)}{n} t^4 + \frac{2^{1-\delta} \beta^{2+\delta} |t|^{2+\delta}}{(1+\delta)(2+\delta) n^{\delta/2}} \leq \frac{d^{2-\delta} a_1(d) |t|^{2+\delta}}{\beta^{(2+\delta)(2-\delta)} n^{\delta/2}} + \frac{2^{1-\delta} \beta^{2+\delta} |t|^{2+\delta}}{(1+\delta)(2+\delta) n^{\delta/2}} \\ &\leq \left(d^{2-\delta} a_1(d) + \frac{2^{1-\delta}}{(1+\delta)(2+\delta)} \right) \frac{\beta^{2+\delta} |t|^{2+\delta}}{n^{\delta/2}} \equiv a_2(d) \frac{\beta^{2+\delta} |t|^{2+\delta}}{n^{\delta/2}}. \end{aligned}$$

Это первая интересующая нас оценка. Вторая получается из первой с использованием неравенства $|t|^\delta \leq d^\delta n^{\delta/2} / \beta^{\delta(2+\delta)} \leq d^{\delta/2} n^{\delta/2} / \beta^{2+\delta}$, верного для всех рассматриваемых значений t и параметра d :

$$|h(t)| \leq d^{\delta/2} a_2(d) |t|^2 \equiv \frac{t^2}{2} - b_1(d) t^2.$$

Подставляя последние две оценки в (3.4), получаем

$$|e^{h(t)} - 1| \leq a_2(d) \frac{\beta^{2+\delta}}{n^{\delta/2}} |t|^{2+\delta} \exp \left\{ \frac{t^2}{2} - b_1(d) t^2 \right\},$$

откуда с учетом (3.3) следует утверждение леммы. Лемма доказана.

Лемма 3.3. Если $\mathbf{E}X_1 = 0$ и выполнено условие (1.9), то для всех $n \geq 2$

$$\rho(F_n, \Phi) \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{f_n(t) - e^{-t^2/2}}{t} \right| dt.$$

Доказательство. В силу ограниченности $p(x)$, по формуле Планшереля мы имеем

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt = 2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} p^2(x) dx < 2\pi A < \infty,$$

и так как $|f(t)| \leq 1$, то при всех $n \geq 2$ характеристическая функция $f_n(t) = (f(t/\sqrt{n}))^n$ абсолютно интегрируема. Остается лишь сослаться на замечание к лемме 12.2 в [1, с. 114], утверждающее, что аналогичный результат справедлив не только для вероятностных, но и для произвольных конечных мер, удовлетворяющих соответствующим условиям гладкости.

Доказательство теоремы 2.1. В силу леммы 3.3 мы имеем

$$2\pi\rho(F_n, \Phi) \leq \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{f_n(t) - e^{-t^2/2}}{t} \right| dt \equiv I_1 + I_2 + I_3,$$

где

$$I_1 = \int_{|t| \leq T_n} \frac{|f_n(t) - e^{-t^2/2}|}{|t|} dt, \quad I_2 = \int_{|t| > T_n} |t|^{-1} e^{-t^2/2} dt, \quad I_3 = \int_{|t| > T_n} \frac{|f_n(t)|}{|t|} dt,$$

а T_n определено в формулировке леммы 3.2:

$$T_n = \frac{d\sqrt{n}}{\beta^{2+\delta}}, \quad d \in (0, \sqrt{2}).$$

Интеграл I_1 оценивается с помощью леммы 3.2:

$$\begin{aligned} I_1 &\leq a_2(d) \frac{\beta^{2+\delta}}{n^{\delta/2}} \int_{-\infty}^{+\infty} |t|^{1+\delta} \exp\{-b_1(d) t^2\} dt \\ &= 2a_2(d) \frac{\beta^{2+\delta}}{n^{\delta/2}} \int_0^{+\infty} t^{1+\delta} \exp\{-b_1(d) t^2\} dt \\ &= \frac{a_2(d)}{[b_1(d)]^{1+\delta/2}} \frac{\beta^{2+\delta}}{n^{\delta/2}} \int_0^{+\infty} y^{\delta/2} e^{-y} dy = \frac{\Gamma(\frac{2+\delta}{2}) a_2(d)}{[b_1(d)]^{1+\delta/2}} \frac{\beta^{2+\delta}}{n^{\delta/2}}. \end{aligned} \quad (3.5)$$

При этом область возможных значений параметра d сужается до интервала $(0, d_0(\delta))$, определяющего область сходимости интеграла в (3.5), где $d_0(\delta)$ — единственный нуль монотонно убывающей функции $b_1(d)$ на $(0, \sqrt{2})$.

Интеграл I_2 оценивается непосредственно:

$$\begin{aligned} I_2 &\leq \frac{2}{T_n^2} \int_{T_n}^{\infty} t e^{-t^2/2} dt = \frac{2}{T_n^2} \int_{T_n^2}^{\infty} e^{-y} dy = \frac{2}{T_n^2} \exp\{-T_n^2\} \\ &= \frac{2(\beta^{2+\delta})^2}{d^2 n} \exp\left\{-\frac{d^2 n}{(\beta^{2+\delta})^2}\right\} \equiv 2\pi V_n(\beta^{2+\delta}, d). \end{aligned} \quad (3.6)$$

Поскольку $f_n(t) = (f(t/\sqrt{n}))^n$, имеем

$$I_3 = \int_{|t| > d/\beta^{2+\delta}} \frac{|f(t)|^n}{|t|} dt \leq \frac{\beta^{2+\delta}}{d} \int_{|t| > d/\beta^{2+\delta}} |f(t)|^n dt.$$

Оценим подынтегральную функцию, воспользовавшись следствием 2.5.1 из книги [24], согласно которому, если при некотором $s > 0$ существует $\mathbf{E}|X_1|^s \equiv \beta^s$ и $\sup_x p(x) = A < \infty$, то для любого $\gamma \in (0, 1)$

$$\begin{aligned} |f(t)| &\leq 1 - \frac{(1-\gamma)^3}{3\pi^2 A^2} t^2, & \text{если } |t| &\leq \frac{\pi\gamma^{1/s}}{2(\beta^s)^{1/s}} \equiv t_\gamma, \\ |f(t)| &\leq 1 - \frac{(1-\gamma)^3 \gamma^{2/s}}{12A^2(\beta^s)^{2/s}}, & \text{если } |t| &> \frac{\pi\gamma^{1/s}}{2(\beta^s)^{1/s}}. \end{aligned} \quad (3.7)$$

В нашем случае $s = 2 + \delta$, ниже мы будем использовать это обозначение. Так как $\beta \geq 1$ и $d < 1$, то в качестве γ можно взять

$$\gamma = \left(\frac{2d}{\pi(\beta^s)^{(s-1)/s}} \right)^s \leq \left(\frac{2}{\pi} \right)^s < 1.$$

При таком выборе γ граница интегрирования $d/\beta^{2+\delta} = t_\gamma$, и с учетом (3.7) оценка для I_3 примет вид

$$\begin{aligned} I_3 &= \frac{\beta^{2+\delta}}{d} \int_{|t| > t_\gamma} |f(t)|^n dt \leq \frac{\beta^{2+\delta}}{d} \int_{|t| > t_\gamma} |f(t)|^2 \left(1 - \frac{(1-\gamma)^3 \gamma^{2/s}}{12A^2(\beta^{2+\delta})^{2/(2+\delta)}} \right)^{n-2} dt \\ &\leq \frac{\beta^{2+\delta}}{d} \left(1 - \frac{(1-\gamma)^3 \gamma^{2/s}}{12A^2(\beta^{2+\delta})^{2/(2+\delta)}} \right)^{n-2} \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt. \end{aligned}$$

По формуле Планшереля имеем

$$\begin{aligned} I_3 &\leq \frac{2\pi\beta^{2+\delta}}{d} \left(1 - \frac{(1-\gamma)^3 \gamma^{2/s}}{12A^2(\beta^{2+\delta})^{2/(2+\delta)}} \right)^{n-2} \int_{-\infty}^{+\infty} p^2(x) dx \\ &\leq \frac{2\pi A \beta^{2+\delta}}{d} \left(1 - \frac{(1-\gamma)^3 \gamma^{2/s}}{12A^2(\beta^{2+\delta})^{2/(2+\delta)}} \right)^{n-2}. \end{aligned}$$

Подставляя $s = 2 + \delta$ и

$$\gamma = \left(\frac{2d}{\pi} \right)^{2+\delta} (\beta^{2+\delta})^{-(1+\delta)/(2+\delta)},$$

получаем оценку

$$I_3 \leq 2\pi \frac{\beta^{2+\delta} A}{d} \left[1 - \frac{d^2}{3\pi^2 A^2 (\beta^{2+\delta})^2} \left(1 - \frac{(2d)^{2+\delta}}{\pi^{2+\delta} (\beta^{2+\delta})^{1+\delta}} \right)^3 \right]^{n-2} \equiv 2\pi W_n(A, \beta^{2+\delta}, d). \quad (3.8)$$

Собирая (3.5), (3.6) и (3.8), получаем утверждение теоремы. Теорема 2.1 доказана.

Теорема 2.2 является простой переформулировкой теоремы 2.1 с учетом свойств функции $g(d)$, см. выше.

Как видно из доказательства теорем 2.1 и 2.2, условие существования ограниченной плотности слагаемых можно заменить другим, в некотором смысле более общим. А именно, справедливо следующее утверждение.

Теорема 3.1. Пусть выполнены условия (1.1), (1.2) и при некотором $k \geq 1$ функция $|f(t)|^k$ интегрируема. Тогда для любого $n \geq k$ справедливо неравенство

$$\rho(F_n, \Phi) \leq \inf_{0 < \varepsilon < \varepsilon(\delta)} \left\{ \left(\frac{2^{1-\delta/2} \Gamma((\delta+2)/2)}{\pi(1+\delta)(2+\delta)} + \varepsilon \right) \frac{\beta^{2+\delta}}{n^{\delta/2}} + V_n(\beta^{2+\delta}, d_\varepsilon) + U_n(\beta^{2+\delta}, d_\varepsilon) \right\},$$

где $V_n(\beta^{2+\delta}, d)$ определено в формулировке теоремы 2.1,

$$U_n(\beta^{2+\delta}, d) = \frac{\beta^{2+\delta}}{2\pi d} \int_{|t| > d/\beta^{2+\delta}} |f(t)|^n dt.$$

Вообще говоря, под оценкой скорости сходимости или точности аппроксимации традиционно понимается неравенство, в правой части которого стоит величина, зависящая лишь от некоторых просто вычисляемых характеристик распределения слагаемых, например, нескольких первых моментов. С такой точки зрения неравенство, устанавливаемое теоремой 3.1, строго говоря, нельзя считать оценкой, так как для вычисления величины $U_n(\beta^{2+\delta}, d)$ нужна более обширная информация о распределении слагаемых, нежели их первые моменты. Однако в некоторых случаях удается получить довольно простую оценку величины $U_n(\beta^{2+\delta}, d)$. В частности, как мы убедились выше (см. теоремы 2.1, 2.2), если слагаемые имеют плотность, ограниченную известным числом A , то $k = 2$ и мажоранта для $U_n(\beta^{2+\delta}, d)$ зависит лишь от $A, \beta^{2+\delta}$ и n .

Рис. 1. Оценка величины $\rho(F_n, \Phi) n^{1/2} / \beta^3$ при $\beta^3 = 1.5$.

Рис. 2. Оценка величины $\rho(F_n, \Phi) n^{1/2} / \beta^3$ при $\beta^3 = 3$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бхаттачарья Р. Н., Ранга Рао Р. Аппроксимация нормальным распределением и асимптотические разложения. М.: Наука, 1982, 286 с.
2. Золотарев В. М. Абсолютная оценка остаточного члена в центральной предельной теореме. — Теория вероятн. и ее примен., 1966, т. 11, в. 1, с. 108–119.
3. Колмогоров А. Н. Некоторые работы последних лет в области предельных теорем теории вероятностей. — Вестник Моск. ун-та, сер. физ.-матем. и естеств. наук, 1953, № 10, в. 7, с. 29–38.
4. Лозэ М. Теория вероятностей. М.: ИЛ, 1962, 719 с.
5. Мацкявичюс В. К. О нижней оценке скорости сходимости в центральной предельной теореме. — Теория вероятн. и ее примен., 1983, т. 28, в. 3, с. 565–569.
6. Петров В. В. Суммы независимых случайных величин. М.: Наука, 1972, 416 с.
7. Прохоров Ю. В. Об одной локальной теореме. — Предельные теоремы теории вероятностей. Под. ред. С. Х. Сираждинова. Ташкент: Изд-во АН УзССР, 1963, с. 75–80.
8. Рогозин Б. А. Одно замечание к работе Эссеена «Моментное неравенство с применением к центральной предельной теореме». — Теория вероятн. и ее примен., 1960, т. 5, в. 1, с. 125–128.
9. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Т. 2. М.: Мир, 1984, 752 с.
10. Чистяков Г. П. Новое асимптотическое разложение и асимптотически наилучшие постоянные в теореме Ляпунова. I. — Теория вероятн. и ее примен., 2001, т. 46, в. 2, с. 326–344.
11. Шиганов И. С. Об уточнении верхней константы в остаточном члене центральной предельной теоремы. — Проблемы устойчивости стохастических моделей. Под ред. В. М. Золотарева и В. В. Калашникова. М.: ВНИИСИ, 1982, с. 109–115.

12. *Bentkus V.* On the asymptotical behavior of the constant in the Berry–Esseen inequality. — J. Theoret. Probab., 1994, v. 7, № 2, p. 211–224.
13. *Bergström H.* On the central limit theorem in the case of not equally distributed random variables. — Skand. Aktuarietidskr., 1949, v. 32, p. 37–62.
14. *Berry A. C.* The accuracy of the Gaussian approximation to the sum of independent variates. — Trans. Amer. Math. Soc., 1941, v. 49, p. 122–136.
15. *Esseen C.-G.* On the Liapounoff limit of error in the theory of probability. — Ark. Mat. Astron. Fys., 1942, v. A28, № 9, p. 1–19.
16. *Esseen C.-G.* Fourier analysis of distribution functions. A mathematical study of the Laplace–Gaussian law. — Acta Math., 1945, v. 77, p. 1–125.
17. *Esseen C.-G.* A moment inequality with an application to the central limit theorem. — Skand. Aktuarietidskr., 1956, v. 39, p. 160–170.
18. *Hsu P. L.* The approximate distributions of the mean and variance of a sample of independent variables. — Ann. Math. Statist., 1945, v. 16, № 1, p. 1–29.
19. *Paditz L.* Über eine globale Fehlerabschätzung im zentralen Grenzwertsatz. — Wiss. Z. Hochsch. Verkehrswesen «Friedrich List», Dresden, 1986, v. 33, № 2, p. 399–404.
20. *Paditz L.* On the error-bound in the nonuniform version of Esseen’s inequality in the L_p -metric. — Statistics, 1996, v. 27, № 3–4, p. 379–394.
21. *Prawitz H.* Limits for a distribution, if the characteristic function is given in a finite domain. — Skand. Aktuarietidskr., 1972, p. 138–154.
22. *Takano K.* A remark to a result of A. C. Berry. — Res. Mem. Inst. Math., 1951, v. 9, № 6, p. 4.08–4.15 (in Japan).
23. *Tysiak W.* Gleichmäßige und nicht-gleichmäßige Berry–Esseen-Abschätzungen. Dissertation. Wuppertal, 1983.
24. *Ushakov N. G.* Selected Topics in Characteristic Functions. Utrecht: VSP, 1999, 355 p.
25. *van Beek P.* An application of Fourier methods to the problem of sharpening the Berry–Esseen inequality. — Z. Wahrscheinlichkeitstheor. Verw. Geb., 1972, v. 23, p. 187–196.
26. *Wallace D. L.* Asymptotic approximations to distributions. — Ann. Math. Statist., 1958, v. 29, p. 635–654.
27. *Zolotarev V. M.* A sharpening of the inequality of Berry–Esseen. — Z. Wahrscheinlichkeitstheor. Verw. Geb., 1967, v. 8, p. 332–342.

Поступила в редакцию
22.XI.2004

© 2005 г. **КУЛИКОВА А. А.*, ПРОХОРОВ Ю. В.**; ХОХЛОВ В. И.****

H.F.D. (H-FUNCTION DISTRIBUTION) И ЗАКОН БЕНФОРДА. I¹⁾

В работе отмечается связь между обширным классом, так называемых, HF-случайных величин, приближенно равномерными распределениями и законом Бенфорда. Эта связь детально рассматривается на примере гамма-распределенных случайных величин. Пусть Y — случайная величина, имеющая гамма-распределение с параметром α . В работе доказано, что распределение вероятностей дробной части логарифма Y по любому основанию большему 1 сходится при $\alpha \rightarrow 0$ к равномерному

* Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, факультет вычислительной математики и кибернетики, Ленинские горы, 119992 Москва, Россия; e-mail: anna.q@mail.ru

** Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, ул. Губкина, 8, 119991 Москва, ГСП-1, Россия; e-mail: tvp@tvp.ru

¹⁾ Работа выполнена при поддержке грантов № НШ-1758.2003.1 и ИНТАС № 03-51-50-18.