Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Куликова, Ю. В. Прохоров, В. И. Хохлов, Н.Ф.Д.
(*H*-function distribution) и закон Бенфорда. I, *Теория
вероятн. и ее примен.*, 2005, том 50, выпуск 2, 366–371

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp113>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 44.207.124.84

26 апреля 2023 г., 17:44:41

12. *Bentkus V.* On the asymptotical behavior of the constant in the Berry–Esseen inequality. — J. Theoret. Probab., 1994, v. 7, № 2, p. 211–224.
13. *Bergström H.* On the central limit theorem in the case of not equally distributed random variables. — Skand. Aktuarietidskr., 1949, v. 32, p. 37–62.
14. *Berry A. C.* The accuracy of the Gaussian approximation to the sum of independent variates. — Trans. Amer. Math. Soc., 1941, v. 49, p. 122–136.
15. *Esseen C.-G.* On the Liapounoff limit of error in the theory of probability. — Ark. Mat. Astron. Fys., 1942, v. A28, № 9, p. 1–19.
16. *Esseen C.-G.* Fourier analysis of distribution functions. A mathematical study of the Laplace–Gaussian law. — Acta Math., 1945, v. 77, p. 1–125.
17. *Esseen C.-G.* A moment inequality with an application to the central limit theorem. — Skand. Aktuarietidskr., 1956, v. 39, p. 160–170.
18. *Hsu P. L.* The approximate distributions of the mean and variance of a sample of independent variables. — Ann. Math. Statist., 1945, v. 16, № 1, p. 1–29.
19. *Paditz L.* Über eine globale Fehlerabschätzung im zentralen Grenzwertsatz. — Wiss. Z. Hochsch. Verkehrswesen «Friedrich List», Dresden, 1986, v. 33, № 2, p. 399–404.
20. *Paditz L.* On the error-bound in the nonuniform version of Esseen’s inequality in the L_p -metric. — Statistics, 1996, v. 27, № 3–4, p. 379–394.
21. *Prawitz H.* Limits for a distribution, if the characteristic function is given in a finite domain. — Skand. Aktuarietidskr., 1972, p. 138–154.
22. *Takano K.* A remark to a result of A. C. Berry. — Res. Mem. Inst. Math., 1951, v. 9, № 6, p. 4.08–4.15 (in Japan).
23. *Tysiak W.* Gleichmäßige und nicht-gleichmäßige Berry–Esseen-Abschätzungen. Dissertation. Wuppertal, 1983.
24. *Ushakov N. G.* Selected Topics in Characteristic Functions. Utrecht: VSP, 1999, 355 p.
25. *van Beek P.* An application of Fourier methods to the problem of sharpening the Berry–Esseen inequality. — Z. Wahrscheinlichkeitstheor. Verw. Geb., 1972, v. 23, p. 187–196.
26. *Wallace D. L.* Asymptotic approximations to distributions. — Ann. Math. Statist., 1958, v. 29, p. 635–654.
27. *Zolotarev V. M.* A sharpening of the inequality of Berry–Esseen. — Z. Wahrscheinlichkeitstheor. Verw. Geb., 1967, v. 8, p. 332–342.

Поступила в редакцию
22.XI.2004

© 2005 г. КУЛИКОВА А. А.*, ПРОХОРОВ Ю. В.**; ХОХЛОВ В. И.**

H.F.D. (H-FUNCTION DISTRIBUTION) И ЗАКОН БЕНФОРДА. I¹⁾

В работе отмечается связь между обширным классом, так называемых, HF-случайных величин, приближенно равномерными распределениями и законом Бенфорда. Эта связь детально рассматривается на примере гамма-распределенных случайных величин. Пусть Y — случайная величина, имеющая гамма-распределение с параметром α . В работе доказано, что распределение вероятностей дробной части логарифма Y по любому основанию большему 1 сходится при $\alpha \rightarrow 0$ к равномерному

* Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, факультет вычислительной математики и кибернетики, Ленинские горы, 119992 Москва, Россия; e-mail: anna.q@mail.ru

** Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, ул. Губкина, 8, 119991 Москва, ГСП-1, Россия; e-mail: tvp@tvp.ru

¹⁾ Работа выполнена при поддержке грантов № НШ-1758.2003.1 и ИНТАС № 03-51-50-18.

на отрезке $[0, 1]$ распределению. Отсюда вытекает, что распределение вероятностей первой значащей цифры Y при малых α приближенно описывается законом Бенфорда. Степень приближения иллюстрируется таблицами.

Ключевые слова и фразы: *H-function distribution*, гамма-распределения, закон Бенфорда, формула суммирования Пуассона.

1. HF-распределения. HF-распределения были определены М. Д. Спрингером и представляют собой частный случай специальных функций, носящих название *H-функций* Фокса, введенных Фоксом в 1961 году и нашедших широкое применение в прикладной математике. Точное определение *H-функций* громоздко и мы не будем его здесь приводить, а сошлемся на статью [3]. Семейство HF-случайных величин — это семейство случайных величин, плотности которых являются *H-функциями* и сосредоточены на полуоси $(0, \infty)$. Грубо говоря, это означает, что преобразование Меллина плотности $h(x)$ ($M_s(h(x))$), равное $\int_0^\infty x^{s-1} h(x) dx$, выражается дробью, где в числителе и знаменателе стоят произведения значений гамма-функций

$$M_s(h(x)) = \frac{\prod_{j=1}^m \Gamma(b_j - \beta_j s) \prod_{j=1}^n \Gamma(1 - a_j + \alpha_j s)}{\prod_{j=m+1}^q \Gamma(1 - b_j + \beta_j s) \prod_{j=n+1}^p \Gamma(a_j - \alpha_j s)},$$

где $a_j, \alpha_j, b_j, \beta_j$ — некоторые числа. В теории вероятностей удобна другая форма записи преобразования Меллина. Его определяют интегралом $\int_0^\infty x^s h(x) dx$ (см. [1]). Полагая в последней формуле $s = it$ преобразуем интеграл к виду $\int_0^\infty e^{it \ln x} h(x) dx$, т.е. получаем характеристическую функцию случайной величины $X = \ln Y$. Соединяя эти соображения с формулой суммирования Пуассона и учитывая быстрое стремление гамма-функций к нулю при стремлении модуля мнимой части аргумента к бесконечности, мы можем доказать неравенства, оценивающие степень близости распределения дробной части X к равномерному распределению, а отсюда перейти к закону Бенфорда (см. [5], где характеристическая функция X равна $\Gamma(1 - it/\alpha)/\Gamma(1 - it)$). Другими типичными примерами HF-случайных величин являются случайные величины, имеющие бета-распределения, гамма-распределения (включая, конечно, экспоненциальные и хи-квадрат распределения), *F*-распределения, распределения Вейбулла, Максвелла, Рэлея и общие гипергеометрические распределения, а также распределения модулей стандартных нормальных величин и модулей величин, распределенных по законам Коши и Стьюдента.

Далее в этой статье мы детально займемся случаем гамма-распределений (по плану, аналогичному плану статьи [5]).

Во второй части мы изучим связь между HF-распределениями и законом Бенфорда.

2. Гамма-распределения. Под гамма-распределениями мы понимаем в этой статье распределения, плотности вероятностей которых задаются формулой

$$p(x; Y_\alpha) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-x}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0. \end{cases}$$

Случайная величина $X_\alpha = \ln Y_\alpha$ имеет плотность

$$p(x; X_\alpha) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} e^{-e^x + \alpha x} \quad (-\infty < x < \infty).$$

Характеристическая функция X_α имеет вид

$$f(t; X_\alpha) = \mathbf{E} e^{itX_\alpha} = \frac{\Gamma(\alpha + it)}{\Gamma(\alpha)}.$$

Теперь приведем некоторые утверждения, нужные нам в дальнейшем.

Лемма 1. Плотность случайной величины $X_\alpha = \ln Y_\alpha$ одновершинна.

Следствие 1. При любом $\eta > 0$ плотность $p(x; \eta X_\alpha)$ одновершинна. Поэтому, в частности, распределение $\log Y_\alpha$ по любому основанию большему 1 будет одновершинным.

Лемма 2 (см. [5]). Пусть U — какая-либо случайная величина, имеющая ограниченную, непрерывную и одновершинную плотность вероятностей $p(x; U)$. Тогда плотность дробной части $\{U\}$ удовлетворяет неравенству: при любом $0 \leq x \leq 1$

$$|p(x; \{U\}) - 1| \leq 2 \max_x p(x; U).$$

Утверждение леммы 2 лишь формой записи отличается от неравенства, указанного в [2, пример 6, § 8, глава II — задача Пуанкаре о рулетке].

3. Неравенство для плотности $p(x; X_\alpha)$. Нетрудно доказать следующее утверждение.

Лемма 3. При $0 < \alpha \leq e$ и всех x

$$p(x; X_\alpha) \leq 1.25 \alpha.$$

Утверждение 1. При $\alpha \rightarrow 0$ и любом $\eta > 0$

$$\sup_{0 \leq x \leq 1} |p(x; \{\eta X_\alpha\}) - 1| \rightarrow 0.$$

Выбирая $\eta = \lg e$, получаем $\eta X_\alpha = \lg e \ln Y_\alpha = \lg Y_\alpha$, из леммы 2 и последнего неравенства вытекает следующее следствие.

Следствие 2. При $0 < \alpha \leq e$

$$\sup_{0 \leq x \leq 1} |p(x; \{\lg Y_\alpha\}) - 1| \leq 5.76 \alpha.$$

4. Применение формулы суммирования Пуассона. В этом параграфе для более точной оценки $\sup_{0 \leq x \leq 1} |p(x; \{\eta X_\alpha\}) - 1|$ мы применим формулу суммирования Пуассона.

По формуле суммирования Пуассона имеем:

$$\begin{aligned} p(x; \{\eta X_\alpha\}) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} p(x+k; \eta X_\alpha) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(2\pi\eta n; X_\alpha) e^{-2\pi nix} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\Gamma(\alpha + 2\pi\eta ni)}{\Gamma(\alpha)} e^{-2\pi inx} = 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Re} \left(\frac{\Gamma(\alpha + 2\pi\eta ni)}{\Gamma(\alpha)} e^{-2\pi inx} \right). \end{aligned}$$

Таким образом,

$$p(x; \{\eta X_\alpha\}) = 1 + 2 \sum_{n=1}^{N-1} \operatorname{Re} \left(\frac{\Gamma(\alpha + 2\pi\eta ni)}{\Gamma(\alpha)} e^{-2\pi inx} \right) + r_N(x),$$

где

$$r_N(x) = 2 \sum_{n=N}^{\infty} \operatorname{Re} \left(\frac{\Gamma(\alpha + 2\pi\eta ni)}{\Gamma(\alpha)} e^{-2\pi inx} \right).$$

Очевидно неравенство

$$\max_{0 \leq x \leq 1} |r_N(x)| \leq 2 \sum_{n=N}^{\infty} \left| \frac{\Gamma(\alpha + 2\pi\eta ni)}{\Gamma(\alpha)} \right|.$$

Заметим теперь, что для частных значений α , например, для $\alpha = \frac{1}{2}$ и $\alpha = 1$ имеем:

$$\begin{aligned} \left| \frac{\Gamma(\frac{1}{2} + 2\pi\eta ni)}{\Gamma(\frac{1}{2})} \right| &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{\pi}{\operatorname{ch}(2\pi^2\eta n)}}, \\ \left| \frac{\Gamma(1 + 2\pi\eta ni)}{\Gamma(1)} \right| &= \sqrt{\frac{2\pi^2\eta n}{\operatorname{sh}(2\pi^2\eta n)}} \end{aligned}$$

(см. формулы [4, 6.1.8], [4, 6.1.30], [4, 6.1.31]). Отсюда видно как быстро убывают модули

$$\left| \frac{\Gamma(\alpha + 2\pi\eta ni)}{\Gamma(\alpha)} \right| \quad \text{при } n \rightarrow \infty.$$

Утверждение 2. Имеет место следующее представление плотности $\{\eta X_\alpha\}$: при любом целом $N \geq l_\alpha/(\pi^2\eta) + 1$

$$p(x; \{\eta X_\alpha\}) = 1 + 2 \sum_{n=1}^{N-1} \operatorname{Re} \left(\frac{\Gamma(\alpha + 2\pi\eta ni)}{\Gamma(\alpha)} e^{-2\pi i n x} \right) + r_N(x),$$

где $|r_N(x)| \leq C_{\alpha, \eta, N}$ и константы $C_{\alpha, \eta, N}$, c_α , $M_{\alpha, \eta}$, l_α и $[l_\alpha]$ определены следующим образом:

$$C_{\alpha, \eta, N} = 2 \prod_{j=0}^{l-1} \sqrt{\frac{1}{N^2} + \frac{4\pi^2\eta^2}{(c_\alpha + j)^2}} M_{\alpha, \eta} \frac{([l_\alpha])! e^{-(N-1)\pi^2\eta}}{\pi^{2([l_\alpha]+1)}\eta^{([l_\alpha]+1)}} \sum_{j=0}^{[l_\alpha]} \frac{(N-1)^j \pi^{2j} \eta^j}{j!},$$

$\alpha = l + \alpha_1$, $l \geq 0$ — целое, $0 < \alpha_1 \leq 1$,

$$c_\alpha = \begin{cases} \frac{1}{2}, & 0 < \alpha_1 \leq \frac{1}{2}, \\ 1, & \frac{1}{2} < \alpha_1 \leq 1; \end{cases}$$

$$M_{\alpha, \eta} = \begin{cases} \sqrt{2}, & c_\alpha = \frac{1}{2}, \\ \frac{2\pi\eta^{1/2}}{\sqrt{1 - e^{-4\pi^2\eta N}}}, & c_\alpha = 1; \end{cases} \quad l_\alpha = \begin{cases} l, & c_\alpha = \frac{1}{2}, \\ l + \frac{1}{2}, & c_\alpha = 1; \end{cases}$$

$[l_\alpha]$ — ближайшее целое к l_α сверху.

Следствие 3. Имеет место следующая оценка отклонения распределения $\{\eta X_\alpha\}$ от равномерного: при любом целом $N \geq l_\alpha/(\pi^2\eta) + 1$

$$\Delta = \sup_{0 \leq x \leq 1} |p(x; \{X_\alpha\}) - 1| = 2 \left| \frac{\Gamma(\alpha + 2\pi\eta i)}{\Gamma(\alpha)} \right| + \tilde{\Delta}_N,$$

где

$$|\tilde{\Delta}_N| \leq 2 \sum_{n=2}^{N-1} \left| \frac{\Gamma(\alpha + 2\pi\eta ni)}{\Gamma(\alpha)} \right| + C_{\alpha, \eta, N}$$

(константы $C_{\alpha, \eta, N}$, c_α , $M_{\alpha, \eta}$, l_α и $[l_\alpha]$ определены в утверждении 2).

В таблице 1 приведены значения оценки величин Δ и $|\tilde{\Delta}_N|$ в зависимости от параметра α при $\eta = 1$. Поскольку последняя очень мала, полученная оценка Δ близка к истинному значению отклонения для рассматриваемых α . При вычислениях бралось $N = 3$. Тогда неравенство $N \geq l_\alpha/\pi^2 + 1$ выполняется для $\alpha \leq 2\pi^2$.

5. Оценка отклонения распределения первой значащей цифры Y_α от закона Бенфорда (см. [5, раздел 4]). Если X — случайная величина с равномерным на отрезке $[0, 1]$ распределением вероятностей, то случайная величина $Y = 10^X$ имеет первую значащую цифру, равную d , с вероятностью $\lg(1 + 1/d)$. Если теперь X — случайная величина, дробная часть которой распределена приблизительно равномерно на $[0, 1]$, то первая значащая цифра величины Y принимает значение d с вероятностью, близкой к $\lg(1 + 1/d)$. Обозначим $D_1(Y)$ первую значащую цифру Y . Тогда так как

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{D_1(Y) = d\} &= \mathbf{P}\{D_1(10^X) = d\} = \mathbf{P}\{\lg d \leq \{X\} < \lg(d+1)\} \\ &= \int_{\lg d}^{\lg(d+1)} p(x; \{X\}) dx = \lg \left(1 + \frac{1}{d} \right) + \int_{\lg d}^{\lg(d+1)} (p(x; \{X\}) - 1) dx, \end{aligned}$$

то

$$\left| \mathbf{P}\{D_1(Y) = d\} - \lg \left(1 + \frac{1}{d} \right) \right| = \left| \int_{\lg d}^{\lg(d+1)} (p(x; \{X\}) - 1) dx \right| \\ \leq \lg \left(1 + \frac{1}{d} \right) \sup_{0 \leq x \leq 1} |p(x; \{X\}) - 1|.$$

Подставляя в эту формулу Y_α и используя следствие 2, имеем:

Утверждение 3. *Имеет место следующая оценка отклонения распределения первой значащей цифры случайной величины Y_α от закона Бенфорда:*

$$\left| \mathbf{P}\{D_1(Y_\alpha) = d\} - \lg \left(1 + \frac{1}{d} \right) \right| \leq 5.76 \lg \left(1 + \frac{1}{d} \right) \alpha.$$

Это неравенство грубое, но получено из совершенно элементарных соображений. Оно может быть улучшено, а именно, интегрируя по x на отрезке $[\lg(d), \lg(d+1)]$, из утверждения 2 получаем:

Утверждение 4. *Имеет место следующее представление распределения первой значащей цифры случайной величины Y_α : при любом целом $N \geq l_\alpha / (\pi^2 \lg e) + 1$*

$$\mathbf{P}\{D_1(Y) = d\} = \lg \left(1 + \frac{1}{d} \right) + \sum_{n=1}^{N-1} A_n + r'_N(x),$$

где

$$A_n = \operatorname{Re} \left(\frac{\Gamma(\alpha + 2\pi \lg(e)ni)}{\Gamma(\alpha)} \right) \left(\frac{\sin(2\pi n \lg(d+1))}{\pi n} - \frac{\sin(2\pi n \lg d)}{\pi n} \right) \\ - \operatorname{Im} \left(\frac{\Gamma(\alpha + 2\pi \lg(e)ni)}{\Gamma(\alpha)} \right) \left(\frac{\cos(2\pi n \lg(d+1))}{\pi n} - \frac{\cos(2\pi n \lg d)}{\pi n} \right)$$

и

$$|r'_N(x)| \leq \lg \left(1 + \frac{1}{d} \right) C_{\alpha, \lg(e), N}$$

(константы $C_{\alpha, \lg e, N}$, c_α , $M_{\alpha, \lg e}$, l_α и $[l_\alpha]$ определены в утверждении 2).

Следствие 4. *Имеет место следующая оценка отклонения распределения первой значащей цифры случайной величины Y_α от закона Бенфорда: при любом целом $N \geq l_c / (\pi^2 \lg e) + 1$*

$$\Delta' = \left| \mathbf{P}\{D_1(Y) = d\} - \lg \left(1 + \frac{1}{d} \right) \right| = |A_1| + \tilde{\Delta}'_N,$$

где

$$|\tilde{\Delta}'_N| \leq \left| \sum_{n=2}^{N-1} A_n \right| + \lg \left(1 + \frac{1}{d} \right) C_{\alpha, \lg e, N}.$$

(константы $C_{\alpha, \lg e, N}$, c_α , $M_{\alpha, \lg e}$, l_α и $[l_\alpha]$ определены в утверждении 2).

В таблице 2 приведены значения оценки отклонения в зависимости от параметров α и d . При вычислениях бралось $N = 3$. Тогда неравенство $N \geq l_\alpha / (\pi^2 \lg e) + 1$ выполняется для $\alpha \leq 2\pi^2 \lg e$.

Таблица 1

α	оценка Δ	оценка $ \tilde{\Delta}'_N $
0.001	$1.045 \cdot 10^{-7}$	$7.705 \cdot 10^{-10}$
0.010	$1.060 \cdot 10^{-6}$	$8.057 \cdot 10^{-10}$
0.100	$1.307 \cdot 10^{-5}$	$1.279 \cdot 10^{-9}$
0.500	$1.463 \cdot 10^{-4}$	$8.334 \cdot 10^{-9}$
1.000	$6.500 \cdot 10^{-4}$	$5.470 \cdot 10^{-8}$
1.500	$1.844 \cdot 10^{-3}$	$2.106 \cdot 10^{-7}$
2.000	$4.136 \cdot 10^{-3}$	$6.942 \cdot 10^{-7}$
2.500	$7.944 \cdot 10^{-3}$	$1.785 \cdot 10^{-6}$

Таблица 2

d	$\lg(1 + 1/d)$	$\alpha = 0.01$	$\alpha = 0.1$	$\alpha = 0.5$	$\alpha = 1$
1	0.30103	$5.508 \cdot 10^{-5}$	$4.402 \cdot 10^{-5}$	$6.095 \cdot 10^{-3}$	$2.887 \cdot 10^{-2}$
2	0.17609	$9.280 \cdot 10^{-5}$	$8.334 \cdot 10^{-4}$	$4.866 \cdot 10^{-3}$	$1.910 \cdot 10^{-3}$
3	0.12494	$4.226 \cdot 10^{-5}$	$3.970 \cdot 10^{-4}$	$4.695 \cdot 10^{-3}$	$1.231 \cdot 10^{-2}$
4	0.09691	$1.883 \cdot 10^{-5}$	$1.663 \cdot 10^{-5}$	$2.278 \cdot 10^{-3}$	$1.095 \cdot 10^{-2}$
5	0.07918	$3.202 \cdot 10^{-5}$	$2.158 \cdot 10^{-4}$	$2.796 \cdot 10^{-4}$	$6.696 \cdot 10^{-3}$
6	0.06695	$3.454 \cdot 10^{-5}$	$2.856 \cdot 10^{-4}$	$9.569 \cdot 10^{-4}$	$2.735 \cdot 10^{-3}$
7	0.05799	$3.167 \cdot 10^{-5}$	$2.838 \cdot 10^{-4}$	$1.562 \cdot 10^{-3}$	$2.673 \cdot 10^{-4}$
8	0.05115	$2.660 \cdot 10^{-5}$	$2.480 \cdot 10^{-4}$	$1.769 \cdot 10^{-3}$	$2.148 \cdot 10^{-3}$
9	0.04576	$2.099 \cdot 10^{-5}$	$1.991 \cdot 10^{-4}$	$1.740 \cdot 10^{-3}$	$3.245 \cdot 10^{-3}$

Мы благодарны профессорам А. В. Булинскому и В. В. Ульянову, указавшим нам на работу [6], где рассматривается случай $\alpha = 1$ способом, который, по-видимому, нельзя распространить на другие значения α .

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Золотарев В. М. Преобразования Меллина–Стильтьеса в теории вероятностей. — Теория вероятн. и ее примен., 1957, т. 11, № 4, с. 444–468.
2. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Т. 2. М.: Мир, 1984, 752 с.
3. Springer M. D. H-function distribution. — Encyclopedia of Statistical Sciences. Ed. by Kotz S., Johnson N., New York: John Wiley, 1981, v. 3, p. 619–621.
4. Абрамовиц М., Стиган И. Справочник по специальным функциям. М.: Наука, 1979, 830 с.
5. Куликова А. А., Прохоров Ю. В. Односторонние устойчивые распределения и закон Бенфорда. — Теория вероятн. и ее примен., 2004, т. 49, в. 1, с. 178–184.
6. Engel H.-A., Leuenberger C. Benford's law for exponential random variables. — Statist. Probab. Letters, 2003, v. 63, № 4, p. 361–365.

Поступила в редакцию
13.V.2004

© 2005 г.

МИТРОФАНОВ А. Ю.*

ОЦЕНКИ УСТОЙЧИВОСТИ ДЛЯ КОНЕЧНЫХ ОДНОРОДНЫХ ЦЕПЕЙ МАРКОВА С НЕПРЕРЫВНЫМ ВРЕМЕНЕМ

Для конечной однородной цепи Маркова с непрерывным временем и единственным стационарным распределением получены новые оценки устойчивости на бесконечном интервале времени и предельной устойчивости. Рассматривается связь между устойчивостью цепи Маркова при возмущениях ее генератора и скоростью ее сходимости к стационарному режиму. Особое внимание уделяется цепям Маркова с сильно достижимым состоянием.

* Саратовский государственный университет, механико-математический факультет, ул. Астраханская, 83, 410012 Саратов, Россия; e-mail: MitrophanovAY@info.sgu.ru