Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Ю. Митрофанов, Оценки устойчивости для конечных однородных цепей Маркова с непрерывным временем, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2005, том 50, выпуск 2, 371–379

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp114>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.205.225.156

26 апреля 2023 г., 16:54:58

Таблица 2

d	$\lg(1 + 1/d)$	$\alpha = 0.01$	$\alpha = 0.1$	$\alpha = 0.5$	$\alpha = 1$
1	0.30103	$5.508 \cdot 10^{-5}$	$4.402 \cdot 10^{-5}$	$6.095 \cdot 10^{-3}$	$2.887 \cdot 10^{-2}$
2	0.17609	$9.280 \cdot 10^{-5}$	$8.334 \cdot 10^{-4}$	$4.866 \cdot 10^{-3}$	$1.910 \cdot 10^{-3}$
3	0.12494	$4.226 \cdot 10^{-5}$	$3.970 \cdot 10^{-4}$	$4.695 \cdot 10^{-3}$	$1.231 \cdot 10^{-2}$
4	0.09691	$1.883 \cdot 10^{-5}$	$1.663 \cdot 10^{-5}$	$2.278 \cdot 10^{-3}$	$1.095 \cdot 10^{-2}$
5	0.07918	$3.202 \cdot 10^{-5}$	$2.158 \cdot 10^{-4}$	$2.796 \cdot 10^{-4}$	$6.696 \cdot 10^{-3}$
6	0.06695	$3.454 \cdot 10^{-5}$	$2.856 \cdot 10^{-4}$	$9.569 \cdot 10^{-4}$	$2.735 \cdot 10^{-3}$
7	0.05799	$3.167 \cdot 10^{-5}$	$2.838 \cdot 10^{-4}$	$1.562 \cdot 10^{-3}$	$2.673 \cdot 10^{-4}$
8	0.05115	$2.660 \cdot 10^{-5}$	$2.480 \cdot 10^{-4}$	$1.769 \cdot 10^{-3}$	$2.148 \cdot 10^{-3}$
9	0.04576	$2.099 \cdot 10^{-5}$	$1.991 \cdot 10^{-4}$	$1.740 \cdot 10^{-3}$	$3.245 \cdot 10^{-3}$

Мы благодарны профессорам А. В. Булинскому и В. В. Ульянову, указавшим нам на работу [6], где рассматривается случай $\alpha = 1$ способом, который, по-видимому, нельзя распространить на другие значения α .

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Золотарев В. М. Преобразования Меллина–Стильтьеса в теории вероятностей. — Теория вероятн. и ее примен., 1957, т. 11, № 4, с. 444–468.
2. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Т. 2. М.: Мир, 1984, 752 с.
3. Springer M. D. H-function distribution. — Encyclopedia of Statistical Sciences. Ed. by Kotz S., Johnson N., New York: John Wiley, 1981, v. 3, p. 619–621.
4. Абрамовиц М., Стиган И. Справочник по специальным функциям. М.: Наука, 1979, 830 с.
5. Куликова А. А., Прохоров Ю. В. Односторонние устойчивые распределения и закон Бенфорда. — Теория вероятн. и ее примен., 2004, т. 49, в. 1, с. 178–184.
6. Engel H.-A., Leuenberger C. Benford's law for exponential random variables. — Statist. Probab. Letters, 2003, v. 63, № 4, p. 361–365.

Поступила в редакцию
13.V.2004

© 2005 г.

МИТРОФАНОВ А. Ю.*

ОЦЕНКИ УСТОЙЧИВОСТИ ДЛЯ КОНЕЧНЫХ ОДНОРОДНЫХ ЦЕПЕЙ МАРКОВА С НЕПРЕРЫВНЫМ ВРЕМЕНЕМ

Для конечной однородной цепи Маркова с непрерывным временем и единственным стационарным распределением получены новые оценки устойчивости на бесконечном интервале времени и предельной устойчивости. Рассматривается связь между устойчивостью цепи Маркова при возмущениях ее генератора и скоростью ее сходимости к стационарному режиму. Особое внимание уделяется цепям Маркова с сильно достижимым состоянием.

* Саратовский государственный университет, механико-математический факультет, ул. Астраханская, 83, 410012 Саратов, Россия; e-mail: MitrophanovAY@info.sgu.ru

Ключевые слова и фразы: цепь Маркова с непрерывным временем, оценки устойчивости при возмущениях, коэффициент эргодичности, экспоненциальная сходимость, спектральный зазор, сильно достижимое состояние.

1. Введение. Под *устойчивостью* цепи Маркова с непрерывным временем понимается ее свойство мало изменять свои вероятностные характеристики при малом изменении ее параметров (генератора и начального распределения). При использовании цепей Маркова в качестве моделей реальных процессов параметры, определяющие цепь, часто задаются с некоторой погрешностью. Это приводит к необходимости получения количественных оценок устойчивости характеристик цепей Маркова, т.е. оценок величины возможного изменения характеристик при заданной величине возмущения параметров. При этом особый интерес представляют оценки устойчивости на бесконечном интервале времени и предельной устойчивости (см. [1]).

Оценки устойчивости для цепей Маркова с непрерывным временем рассмотрены в работах [2]–[11]. В настоящей статье доказаны новые неравенства, позволяющие оценивать устойчивость однородных цепей Маркова с непрерывным временем и конечным пространством состояний. Полученные оценки демонстрируют связь между устойчивостью и такими характеристиками цепи Маркова, как скорость сходимости к стационарному распределению, число состояний, величина спектрального зазора генератора, абсолютная величина элементов генератора.

Пусть $X = \{X(t), t \geq 0\}$ и $\tilde{X} = \{\tilde{X}(t), t \geq 0\}$ — цепи Маркова с непрерывным временем, пространством состояний $\mathcal{S} = \{0, 1, \dots, N\}$ ($1 \leq N < \infty$) и генераторами соответственно Q и $\tilde{Q} = Q + E$. Векторы вероятностей состояний (*распределения*) цепей X и $\tilde{X}$ в момент времени $t \geq 0$ обозначим соответственно через $p(t)$ и $\tilde{p}(t)$ (все векторы без знака транспонирования будем считать вектор-столбцами). Далее мы всюду предполагаем, что у цепи X существует единственное стационарное распределение $\pi = (\pi_j)$.

В качестве меры близости двух распределений $p^{(1)}, p^{(2)}$ на множестве $\mathcal{S}$ будем использовать величину $d(p^{(1)}, p^{(2)})$, по определению равную расстоянию по вариации между соответствующими вероятностными мерами $p^{(1)}(\mathcal{A}), p^{(2)}(\mathcal{A})$ ($\mathcal{A} \subseteq \mathcal{S}$) [12]:

$$d(p^{(1)}, p^{(2)}) = \max_i \sum_j |p^{(1)}(\mathcal{A}_i) - p^{(2)}(\mathcal{A}_i)|,$$

где максимум берется по всевозможным разбиениям $\{\mathcal{A}_i\}$ множества $\mathcal{S}$. Запись $\|\cdot\|$ обозначает l_1 -норму для векторов (равную сумме модулей компонент) и ∞ -норму для матриц (равную максимальной строчной сумме модулей элементов). Справедливо равенство $d(p^{(1)}, p^{(2)}) = \|p^{(1)} - p^{(2)}\|$. В дальнейшем нам понадобится также соотношение

$$d(p^{(1)}, p^{(2)}) = 2 \max_{\mathcal{A} \subseteq \mathcal{S}} |p^{(1)}(\mathcal{A}) - p^{(2)}(\mathcal{A})|. \quad (1)$$

(В связи с выражением (1) заметим, что некоторые авторы называют расстоянием по вариации величину в два раза меньшую, чем наша $d(\cdot, \cdot)$.)

Основной целью настоящей работы является получение оценок сверху для величин $\|\tilde{p}(t) - p(t)\|$ и $\|\tilde{\pi} - \pi\|$, где $\tilde{\pi}$ — стационарное распределение цепи $\tilde{X}$ (вообще говоря, не обязательно единственное). В доказываемых неравенствах, позволяющих оценить устойчивость распределения цепи X , правая часть имеет вид $\kappa \|E\|$. Величина κ характеризует устойчивость цепи X к возмущениям генератора; следуя обзорной работе [13], будем называть подобные величины *числами обусловленности*. Если число обусловленности велико, то цепь будем называть *плохо обусловленной*, если мало — *хорошо обусловленной* (относительно данного числа обусловленности).

2. Устойчивость и скорость сходимости к стационарному режиму. Для дальнейшего нам понадобится понятие коэффициента эргодичности матрицы (порожденного векторной l_1 -нормой). Коэффициент эргодичности $\tau_1(B)$ вещественной ква-

дратной матрицы B определяется следующим образом:

$$\tau_1(B) = \sup_{\|v\|=1, v^T h=0} \|B^T v\|,$$

где v — векторы с вещественными компонентами, h — вектор, все компоненты которого равны 1. Для $\tau_1(B)$ справедливо также выражение

$$\tau_1(B) = \frac{1}{2} \max_{i,j \in \mathcal{S}} \|B^T(e_i - e_j)\|; \quad (2)$$

здесь и далее e_k — вектор, k -я компонента которого равна 1, а остальные компоненты равны 0 (см. [14]). Отметим свойство коэффициента эргодичности $\beta_t := \tau_1(e^{tQ})$, используемое в дальнейшем: $\beta_t < 1$ для всех $t > 0$. Это свойство следует из (2) и того факта, что у цепи X существует единственное стационарное распределение. Кроме того, очевидно, что $\lim_{t \rightarrow \infty} \beta_t = 0$.

Учитывая определение коэффициента эргодичности, имеем

$$\begin{aligned} \|\tilde{p}(t) - p(t)\| &= \|\tilde{P}^T(t)\tilde{p}(0) - P^T(t)p(0)\| \leq \|P^T(t)(\tilde{p}(0) - p(0))\| + \|D^T(t)\tilde{p}(0)\| \\ &\leq \|\tilde{p}(0) - p(0)\| \beta_t + \|D(t)\|, \end{aligned} \quad (3)$$

где $\tilde{P}(t) = e^{t\tilde{Q}}$, $P(t) = e^{tQ}$, $D(t) = \tilde{P}(t) - P(t)$. Следовательно,

$$\sup_{t \geq 0} \|\tilde{p}(t) - p(t)\| \leq \|\tilde{p}(0) - p(0)\| + \sup_{t \geq 0} \|D(t)\|.$$

Кроме того, если $\tilde{\pi}$ — некоторое стационарное распределение цепи $\tilde{X}$, то, полагая $\tilde{p}(0) = \tilde{\pi}$ в (3) и переходя к пределу при $t \rightarrow \infty$, получим $\|\tilde{\pi} - \pi\| \leq \sup_{t \geq 0} \|D(t)\|$. В связи с этим представляют большой интерес равномерные по $t \geq 0$ оценки величины $\|D(t)\|$.

В работе [4] доказано неравенство

$$\|\tilde{p}(t) - p(t)\| \leq \|\tilde{p}(0) - p(0)\| \beta_t + \|E\| \int_0^t \beta_u du, \quad t \geq 0, \quad (4)$$

из которого следует оценка

$$\|D(t)\| < t \|E\|, \quad t > 0. \quad (5)$$

Соотношение (5) позволяет оценивать устойчивость распределения цепи X лишь на конечных интервалах времени. Оценки устойчивости для бесконечных интервалов можно получить, если воспользоваться экспоненциальными оценками скорости сходимости $p(t)$ к π при $t \rightarrow \infty$.

Пусть $b, C > 0$ таковы, что для всех $p(0)$ выполняется неравенство

$$\|p(t) - \pi\| \leq C e^{-bt}, \quad t \geq 0. \quad (6)$$

Заметим, что (6) влечет $C \geq 2(1 - \min_{j \in \mathcal{S}} \pi_j) \geq 1$; в правом неравенстве равенство достигается только для цепей с двумя состояниями и равномерным стационарным распределением. Из (4) и (6) следует оценка

$$\sup_{t \geq 0} \|D(t)\| \leq b^{-1}(\ln C + 1)\|E\|; \quad (7)$$

если $C > 1$, то неравенство в (7) строгое, см. [4]. Отличительной особенностью неравенства (7) по сравнению с полученными ранее результатами является логарифмическая зависимость правой части от C ; результаты других авторов дают оценки с линейной зависимостью (см. сравнение в [4]). В этом пункте приводится новая оценка устойчивости с логарифмической зависимостью правой части от C . Доказательство основано на результатах В. В. Анисимова [11].

Лемма 1. *Справедливо неравенство*

$$\sup_{t \geq 0} \|D(t)\| \leq \inf_{t > 0} \gamma_t \|E\|, \quad (8)$$

где $\gamma_t = t/(1 - \beta_t)$.

Доказательство. Положим

$$\varphi_t = \max_{i,j \in \mathcal{S}, \mathcal{A} \subseteq \mathcal{S}} |p(i, t, \mathcal{A}) - p(j, t, \mathcal{A})|, \quad \psi_t = \max_{i \in \mathcal{S}, \mathcal{A} \subseteq \mathcal{S}} |p(i, t, \mathcal{A}) - \tilde{p}(i, t, \mathcal{A})|,$$

где $p(i, t, \mathcal{A})$, $\tilde{p}(i, t, \mathcal{A})$ — переходные функции цепей X и $\tilde{X}$ соответственно ($i \in \mathcal{S}$, $t \geq 0$, $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{S}$). Если $\varphi_s < 1$ для некоторого $s > 0$, то, применяя теорему 2 работы [11], получим

$$\psi_t \leq \frac{\sup_{u \leq s} \psi_u}{1 - \varphi_s} \left(1 - \varphi_s^{\lfloor t/s \rfloor + 1}\right), \quad t \geq 0, \quad (9)$$

где $\lfloor \cdot \rfloor$ обозначает целую часть числа. Используя (1), нетрудно убедиться, что $\varphi_t = \beta_t$ и $\psi_t = \|D(t)\|/2$. Следовательно, $\sup_{u \leq s} \psi_u < s\|E\|/2$. Из этих соотношений, неравенств (9) и того факта, что $\beta_t < 1$ для всех $t > 0$, следует утверждение леммы.

Теорема 1. Пусть $b > 0$ и $C \geq 1$ таковы, что выполняется (6). Тогда справедливо неравенство

$$\sup_{t \geq 0} \|D(t)\| \leq \inf_{0 < y < 1} \frac{b^{-1} \ln(C/y)}{1 - y} \|E\|. \quad (10)$$

Доказательство. Учитывая (2) и применяя неравенство треугольника, получим

$$\beta_t \leq \max_{j \in \mathcal{S}} \|P^T(t) e_j - \pi\| \leq C e^{-bt}, \quad t \geq 0. \quad (11)$$

Пусть t_0 таково, что $C e^{-bt_0} = 1$. Поскольку $C \geq 1$, то $t_0 \geq 0$. С учетом (8) и (11) имеем

$$\sup_{t \geq 0} \|D(t)\| \leq \frac{t\|E\|}{1 - C e^{-bt}}, \quad t > t_0. \quad (12)$$

Пусть $y = C e^{-bt}$; при $t > t_0$ $y \in (0, 1)$. Тогда (12) можно записать следующим образом:

$$\sup_{t \geq 0} \|D(t)\| \leq \frac{b^{-1} \ln(C/y)}{1 - y} \|E\|, \quad y \in (0, 1).$$

Теорема доказана.

З а м е ч а н и е 1. Различные подходы к получению оценок вида (6) обсуждаются в [4].

Представляет интерес поведение функции $f(y) := \ln(C/y)/(1 - y)$ на интервале $(0, 1)$. Справедливо следующее предложение.

Предложение 1. Если $C > 1$, то $f(y)$ имеет на $(0, 1)$ одну критическую точку y_0 . Эта точка является точкой минимума, и $\lim_{y \downarrow 0} f(y) = \lim_{y \uparrow 1} f(y) = \infty$. Точка y_0 может быть найдена из уравнения $C = y \exp((1 - y)/y)$. Если $C = 1$, то $f(y)$ монотонно убывает на $(0, 1)$, $\lim_{y \downarrow 0} f(y) = \infty$, $\lim_{y \uparrow 1} f(y) = 1$.

3. Оценки устойчивости и элементы генератора. В этом пункте приводятся оценки устойчивости, в которых число обусловленности явным образом выражается через элементы q_{ij} генератора Q . Как и в предыдущем пункте, основой для полученных результатов является лемма 1. Особенно интересный и легко применимый результат доказан для цепей Маркова с сильно достижимым состоянием.

О п р е д е л е н и е 1. Если существует такое $k_0 \in \mathcal{S}$, что $q_{ik_0} > 0$ для всех $i \in \mathcal{S} \setminus \{k_0\}$, то будем говорить, что у цепи X имеется *сильно достижимое состояние* k_0 (по аналогии со случаем дискретного времени, см. [15]).

Как показывает лемма 1, величину $\sup_{t \geq 0} \|D(t)\|$ можно было бы оценить сверху величинами $\lim_{t \rightarrow \infty} \gamma_t \|E\|$ и $\lim_{t \rightarrow 0} \gamma_t \|E\|$, если бы пределы существовали и были конечными. Нетрудно видеть, что $\lim_{t \rightarrow \infty} \gamma_t = \infty$. Ответ на вопрос о поведении γ_t при $t \rightarrow 0$ дает приводимая ниже теорема 2.

О п р е д е л е н и е 2. Будем говорить, что для пары состояний $(i_0, j_0) \in \mathcal{S} \times \mathcal{S}$ ($i_0 \neq j_0$) выполняется условие А, если одновременно справедливы следующие утверждения:

- 1) $q_{i_0 j_0} = q_{j_0 i_0} = 0$;
- 2) не существует такого $k \in \mathcal{S} \setminus \{i_0, j_0\}$, что $q_{i_0 k} > 0$ и $q_{j_0 k} > 0$.

Теорема 2. Если для некоторой пары состояний выполняется условие А, то $\lim_{t \rightarrow 0} \gamma_t = \infty$; в противном случае $0 < \lim_{t \rightarrow 0} \gamma_t < \infty$,

$$\lim_{t \rightarrow 0} \gamma_t = \xi^{-1}, \quad \xi := \frac{1}{2} \min_{i, j \in \mathcal{S}, i \neq j} f_{ij},$$

$$f_{ij} := |q_{ii} + q_{jj} - q_{ij} - q_{ji}| - \sum_{k \in \mathcal{S} \setminus \{i, j\}} |q_{ik} - q_{jk}|, \quad i \neq j.$$

Доказательство. Обозначим через $p_{ij}(t)$ элементы матрицы $P(t)$. При $t \rightarrow 0$ имеем $p_{ij}(t) = q_{ij}t + o(t)$, $i \neq j$, $p_{ii}(t) = 1 + q_{ii}t + o(t)$, откуда при $t \rightarrow 0$

$$\sum_{k \in \mathcal{S}} |p_{ik}(t) - p_{jk}(t)| = 2 - |q_{ii} + q_{jj} - q_{ij} - q_{ji}|t + \sum_{k \in \mathcal{S} \setminus \{i, j\}} |q_{ik} - q_{jk}|t + o(t), \quad i \neq j.$$

Отсюда, учитывая (2), при $t \rightarrow 0$ получим

$$1 - \beta_t = \frac{t}{2} \min_{i, j \in \mathcal{S}, i \neq j} \{f_{ij} + \varepsilon_{ij}(t)\}, \quad \lim_{t \rightarrow 0} \varepsilon_{ij}(t) = 0.$$

Для некоторых пар индексов $(i_k, j_l) \in \mathcal{S} \times \mathcal{S}$ ($i_k \neq j_l$) справедливо равенство $\frac{1}{2} f_{i_k j_l} = \xi$, следовательно, существует такое $t_0 > 0$, что

$$\frac{1 - \beta_t}{t} = \xi + \frac{1}{2} \min_{(i_k, j_l)} \varepsilon_{i_k j_l}(t), \quad t < t_0. \quad (13)$$

Если для некоторой пары (i_0, j_0) выполняется условие А, то $\xi = f_{i_0 j_0} = 0$, поскольку $\sum_{j \in \mathcal{S}} q_{ij} = 0$ для всех $i \in \mathcal{S}$. Если же условие А ни для каких пар состояний не выполняется, то $f_{ij} > 0$ для всех $i, j \in \mathcal{S}$ ($i \neq j$). Переходя в (13) к пределу при $t \rightarrow 0$, приходим к утверждению теоремы.

Замечание 2. Условие А не выполняется ни для какой пары состояний, например в том случае, если у цепи X имеется сильно достижимое состояние. Заметим, что существование сильно достижимого состояния не является необходимым для выполнения соотношения $\lim_{t \rightarrow 0} \gamma_t < \infty$. Рассмотрим, например, случай, когда $\mathcal{S} = \{0, 1, 2, 3\}$, а структура переходов цепи X за один скачок такова: $0 \leftrightarrow 1$, $1 \leftrightarrow 2$, $2 \leftrightarrow 3$, $3 \leftrightarrow 0$ (здесь запись $i \leftrightarrow j$ означает, что $q_{ij} > 0$ и $q_{ji} > 0$); другие переходы невозможны. По теореме 2, для такой цепи $\lim_{t \rightarrow 0} \gamma_t < \infty$, хотя сильно достижимых состояний нет.

Теорема 3. Если у цепи X имеется сильно достижимое состояние, то $\delta := \sum_{j \in \mathcal{S}} \min_{i \in \mathcal{S} \setminus \{j\}} q_{ij} > 0$ и

$$\sup_{t \geq 0} \|D(t)\| \leq \delta^{-1} \|E\|. \quad (14)$$

Доказательство. Для β_t имеет место представление (см. [16])

$$\beta_t = 1 - \min_{i, j \in \mathcal{S}} \sum_{k \in \mathcal{S}} \min\{p_{ik}(t), p_{jk}(t)\}.$$

Следовательно,

$$\beta_t \leq 1 - \sum_{j \in \mathcal{S}} \min_{i \in \mathcal{S}} p_{ij}(t). \quad (15)$$

Учитывая (8) и (15), получим

$$\sup_{t \geq 0} \|D(t)\| \leq \inf_{t > 0} \frac{t \|E\|}{\sum_{j \in \mathcal{S}} \min_{i \in \mathcal{S}} p_{ij}(t)}. \quad (16)$$

Так как $\lim_{t \rightarrow 0} p_{ii}(t) = 1$ и $\lim_{t \rightarrow 0} p_{ij}(t) = 0$ при $i \neq j$, то существует такое $t_0 > 0$, что

$$\sum_{j \in \mathcal{S}} \min_{i \in \mathcal{S}} p_{ij}(t) = \sum_{j \in \mathcal{S}} \min_{i \in \mathcal{S} \setminus \{j\}} p_{ij}(t), \quad t \leq t_0.$$

Если $i \neq j$, то при $t \rightarrow 0$ имеем $p_{ij}(t) = q_{ij}t + o(t)$. Следовательно,

$$\lim_{t \rightarrow 0} \sum_{j \in \mathcal{S}} \min_{i \in \mathcal{S}} \frac{p_{ij}(t)}{t} = \delta.$$

Из этого выражения и неравенства (16) следует утверждение теоремы.

З а м е ч а н и е 3. Из доказательства теоремы 3 следует, что если у X существует сильно достижимое состояние, то $\xi^{-1} \leq \delta^{-1}$.

Следует отметить, что цепи Маркова с сильно достижимым состоянием могут представлять интерес с точки зрения приложений. В качестве примера рассмотрим химическую реакцию между веществами $T_0, T_1, \dots, T_N$, в ходе которой молекула T_0 может находиться в одном из $N + 1$ состояний — может быть либо свободной, либо связанной с некоторой молекулой T_l , $l = 1, \dots, N$. Молекула T_0 переходит из свободного состояния в связанное, если она связывается с одной из частиц T_l . Предположим, что из любого связанного состояния молекула T_0 опять может перейти в свободное. Переходы из одного связанного состояния в другое отражают взаимопревращения связанных молекул (происходящие, к примеру, в результате действия фермента). Подобные реакции часто встречаются в молекулярной биологии [17]. Для описания изменений состояния молекулы T_0 может быть использована цепь Маркова с непрерывным временем и пространством состояний $\mathcal{S}$, имеющая сильно достижимое состояние 0. Состояние 0 в такой модели соответствует несвязанной молекуле T_0 , а другие состояния — молекуле T_0 , связанной с одной из молекул T_l , $l = 1, \dots, N$ (обоснование применимости цепей Маркова с непрерывным временем для моделирования химических реакций см., например, в [18]).

Интересно сравнить утверждение теоремы 3 с оценкой устойчивости стационарного распределения цепи Маркова с дискретным временем, полученной в работе [19]. Пусть Y и $\tilde{Y}$ — конечные однородные цепи Маркова с дискретным временем и пространством состояний $\mathcal{S}$, имеющие единственные стационарные распределения ρ и $\tilde{\rho}$ соответственно. Обозначим через P и $\tilde{P}$ матрицы вероятностей переходов цепей Y и $\tilde{Y}$. Пусть $\nu_{k_0} := \min_{i \in \mathcal{S} \setminus \{k_0\}} p_{ik_0} > 0$ для некоторого k_0 ; здесь p_{ij} — элементы матрицы P . В этом случае справедливо следующее неравенство (см. [19]):

$$\|\tilde{\rho} - \rho\| \leq \nu_{k_0}^{-1} \|\tilde{P} - P\|.$$

Условие $\nu_{k_0} > 0$ для некоторого k_0 есть условие существования сильно достижимого состояния k_0 для цепи с дискретным временем Y .

Переходя к случаю непрерывного времени, предположим, что у цепи X есть сильно достижимое состояние. Тогда из (14) следует, что для произвольного стационарного распределения $\tilde{\pi}$ цепи $\tilde{X}$ и единственного стационарного распределения π цепи X справедлива оценка

$$\|\tilde{\pi} - \pi\| \leq \delta^{-1} \|E\|.$$

Заметим, что $\delta \geq \hat{\delta} := \max_{j \in \mathcal{S}} \min_{i \in \mathcal{S} \setminus \{j\}} q_{ij} > 0$. Таким образом, устойчивость стационарного распределения цепи Маркова с сильно достижимым состоянием характеризуется величинами внедиагональных элементов переходной матрицы (в случае дискретного времени) или величинами интенсивностей перехода (в случае непрерывного времени). При этом зависимость числа обусловленности $\min_{k_0} \nu_{k_0}^{-1}$ от элементов матрицы P аналогична зависимости $\hat{\delta}^{-1}$ от элементов Q .

4. Оценки устойчивости и собственные значения генератора. Обозначим через λ_m , $m = 1, \dots, N + 1$, собственные значения Q (каждое из различных собственных значений учитывается столько раз, какова его кратность). Положим $\lambda_1 = 0$. Поскольку у цепи X , по предположению, существует единственное стационарное распределение, нулевое собственное значение имеет кратность 1; вещественные части остальных собственных значений отрицательны. Положим $\lambda = \min_{2 \leq m \leq N+1} |\operatorname{Re} \lambda_m|$; эта величина носит название *спектрального зазора* генератора Q . Для цепи X спектральный зазор равен *параметру сходимости*:

$$\lambda = \sup \left\{ \alpha > 0: \|p(t) - \pi\| = O(e^{-\alpha t}) \text{ при } t \rightarrow \infty \text{ для всех } p(0) \right\}$$

(см. работу [20], где рассмотрен метод оценивания λ). Таким образом, величина λ является показателем скорости экспоненциальной сходимости к стационарному распределению для цепи X . В связи с этим представляют интерес оценки устойчивости цепи X при возмущениях генератора, выраженные через величину λ .

Положим $\mu_m(t) = e^{\lambda_m t}$, где $1 \leq m \leq N+1$, $t \geq 0$. Величины $\mu_m(t)$ суть собственные значения матрицы $P(t)$. Обозначим $\mu(t) = \max_{2 \leq m \leq N+1} |\mu_m(t)|$.

Предложение 2. *Справедлива оценка*

$$\lambda^{-1} \leq \inf_{t>0} \gamma_t.$$

Доказательство. Используя известное свойство коэффициента эргодичности (см., например, [21]), получим $\mu(t) \leq \beta_t$, $t > 0$. Поскольку $\mu(t) = e^{-\lambda t}$, то

$$\lambda^{-1} = \inf_{t>0} \frac{t}{1 - e^{-\lambda t}} \leq \inf_{t>0} \gamma_t.$$

Предложение доказано.

Следствие 1. *Если у цепи X существует сильно достижимое состояние, то $\delta \leq \xi \leq \lambda$.*

Предложение 2 показывает, что если цепь X хорошо обусловлена (относительно числа обусловленности $\inf_{t>0} \gamma_t$), то она быстро сходится к стационарному режиму. Заметим, что оценки устойчивости в теоремах 1 и 3 фактически получены загроблением неравенства (8). Следовательно, хорошая обусловленность относительно числа обусловленности в (10), а также относительно ξ^{-1} и δ^{-1} , влечет хорошую обусловленность относительно $\inf_{t>0} \gamma_t$. Теорема 3 и следствие 1 по существу позволяют свести анализ устойчивости и скорости сходимости для цепей Маркова с сильно достижимым состоянием к нахождению величины δ .

В доказательстве следующей теоремы используется понятие *групповой обратной матрицы* $B^\#$ квадратной вещественной матрицы B . Матрица $B^\#$ — это матрица, для которой выполняются соотношения $BB^\#B = B$, $B^\#BB^\# = B^\#$ и $BB^\# = B^\#B$; если она существует, она единственна. Понятие групповой обратной матрицы широко применяется в теории конечных цепей Маркова с дискретным временем, см. [13], [22].

Теорема 4. *Для произвольного стационарного распределения $\tilde{\pi}$ цепи $\tilde{X}$ и единственного стационарного распределения π цепи X справедлива оценка*

$$\|\tilde{\pi} - \pi\| \leq N\rho^{-1}\|E\|,$$

где $\rho = \min_{2 \leq m \leq N+1} |\lambda_m|$.

Доказательство. Распределения π и $\tilde{\pi}$ являются стационарными распределениями цепей Маркова с дискретным временем, пространством состояний $\mathcal{S}$ и переходными матрицами соответственно $P(t)$ и $\tilde{P}(t)$, $t > 0$. Кроме того, для любого $t > 0$ распределение π — единственное стационарное распределение, соответствующее $P(t)$. Из этих фактов, соотношения (4) работы [23] и нашего неравенства (5) следует оценка

$$\|\tilde{\pi} - \pi\| \leq \inf_{t>0} \tau_1(A^\#(t)) t \|E\|, \quad (17)$$

где $A(t) = I - P(t)$, I — единичная матрица.

Из неравенства (10) работы [23] вытекает

$$\tau_1(A^\#(t)) \leq \sum_{m=2}^{N+1} \frac{1}{1 - \mu_m(t)}.$$

В силу неотрицательности $\tau_1(\cdot)$ это дает

$$\tau_1(A^\#(t)) \leq \frac{N}{\min_{2 \leq m \leq N+1} |1 - \mu_m(t)|}. \quad (18)$$

Из (17) и (18) следует

$$\|\tilde{\pi} - \pi\| \leq \inf_{t>0} \frac{Nt\|E\|}{\min_{2 \leq m \leq N+1} |1 - \mu_m(t)|} \leq \lim_{t \rightarrow 0} \frac{N\|E\|}{\min_{2 \leq m \leq N+1} |1 - \mu_m(t)|/t}. \quad (19)$$

Переходя к пределу при $t \rightarrow 0$ в правой части (19) и учитывая, что $\lim_{t \rightarrow 0} t^{-1}(1 - \mu_m(t)) = \lambda_m$, приходим к утверждению теоремы.

Следствие 2. $\|\tilde{\pi} - \pi\| \leq N\lambda^{-1}\|E\|$.

Автор глубоко признателен рецензенту за ценные замечания, позволившие значительно улучшить статью.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Калашников В. В. Качественный анализ поведения сложных систем методом пробных функций. М: Наука, 1978, 247 с.
2. Andreev D. B., Elesin M. A., Krylov E. A., Kuznetsov A. V., Zeifman A. I. On ergodicity and stability estimates for some nonhomogeneous Markov chains. — J. Math. Sci. (New York), 2002, v. 112, № 2, p. 4111–4118.
3. Granovsky B. L., Zeifman A. I. Nonstationary Markovian queues. — J. Math. Sci. (New York), 2000, v. 99, № 4, p. 1415–1438.
4. Mitrophanov A. Yu. Stability and exponential convergence of continuous-time Markov chains. — J. Appl. Probab., 2003, v. 40, № 4, p. 970–979.
5. Zeifman A. I. Stability for continuous-time nonhomogeneous Markov chains. — Lecture Notes in Math., 1985, v. 1155, p. 401–414.
6. Zeifman A. I. Stability of birth-and-death processes. — J. Math. Sci. (New York), 1998, v. 91, № 3, p. 3023–3031.
7. Zeifman A. I., Isaacson D. L. On strong ergodicity for nonhomogeneous continuous-time Markov chains. — Stochastic Process. Appl., 1994, v. 50, № 2, p. 263–273.
8. Зейфман А. И. Об устойчивости неоднородных марковских цепей с непрерывным временем. — Изв. вузов, матем., 1991, № 7, с. 33–39.
9. Анисимов В. В., Таиров М. Ф. Оценки сближения переходных характеристик марковских цепей. — Тезисы докладов IV Международной Вильнюсской конференции по теории вероятностей и математической статистике. Т. 1. Вильнюс: ИМК АН ЛитССР, 1985, с. 28–29.
10. Анисимов В. В. Случайные процессы с дискретной компонентой. Предельные теоремы. Киев: Вища школа, 1988, 184 с.
11. Анисимов В. В. Оценки отклонений переходных характеристик неоднородных марковских процессов. — Укр. матем. журн., 1988, т. 40, № 6, с. 699–704.
12. Жакод Ж., Ширяев А. Н. Предельные теоремы для случайных процессов. Т. 1. М.: Физматлит, 1994, 544 с.
13. Cho G. E., Meyer C. D. Comparison of perturbation bounds for the stationary distribution of a Markov chain. — Linear Algebra Appl., 2001, v. 335, p. 137–150.
14. Seneta E. Explicit forms for ergodicity coefficients and spectrum localization. — Linear Algebra Appl., 1984, v. 60, p. 187–197.
15. Funderlic R. E., Meyer C. D., Jr. Sensitivity of the stationary distribution vector for an ergodic Markov chain. — Linear Algebra Appl., 1986, v. 76, p. 1–17.
16. Добрушин Р. Л. Центральная предельная теорема для неоднородных цепей Маркова. II. — Теория вероятн. и ее примен., 1956, т. 1, в. 4, с. 365–425.
17. Албертс Б., Брей Д., Льюис Дж., Рэфф М., Робертс К., Уотсон Дж. Молекулярная биология клетки. Т. 2. М.: Мир, 1994, 539 с.
18. Ван Кампен Н. Г. Стохастические процессы в физике и химии. М.: Высшая школа, 1990, 376 с.
19. Seneta E. Sensitivity to perturbation of the stationary distribution: Some refinements. — Linear Algebra Appl., 1988, v. 108, p. 121–126.
20. Granovsky B. L., Zeifman A. I. The N -limit of spectral gap of a class of birth-death Markov chains. — Appl. Stoch. Models Bus. Ind., 2000, v. 16, № 4, p. 235–248.
21. Seneta E. Coefficients of ergodicity: Structure and applications. — Adv. Appl. Probab., 1979, v. 11, p. 576–590.
22. Meyer C. D., Jr. The role of the group generalized inverse in the theory of finite Markov chains. — SIAM Rev., 1975, v. 17, № 3, p. 443–464.

23. Seneta E. Sensitivity of finite Markov chains under perturbation. — Statist. Probab. Lett., 1993, v. 17, № 2, p. 163–168.

Поступила в редакцию
13.XI.2001

Исправленный вариант
7.X.2004

© 2005 г. ПРОХОРОВ Ю. В.*, ВИСКОВ О. В.*, ХОХЛОВ В. И.*

АНАЛОГИ НЕРАВЕНСТВА ЧЕРНОВА ДЛЯ ОТРИЦАТЕЛЬНОГО БИНОМИАЛЬНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ¹⁾

Получены аналоги изопериметрического неравенства Чернова для отрицательного биномиального распределения.

Ключевые слова и фразы: отрицательное биномиальное распределение, распределение Паскаля, моментные неравенства, факториально-степенные биномы, многочлены, ортогональные относительно отрицательного биномиального распределения (Паскаля).

В работах [1] и [2] были получены пуассоновский и биномиальные аналоги (так называемого изопериметрического) неравенства Чернова [3], установленного им для нормального распределения. При выводе этих дискретных аналогов в [1] и [2] использовался следующий подход. Оператор дифференцирования, играющий в неравенстве Чернова ключевую роль, заменялся на специально подобранные линейные операторы, способные служить естественными дискретными аналогами оператора дифференцирования. Затем для вычисления результатов действия этих операторов на функции последние представлялись в виде рядов Фурье по классическим системам многочленов, ортогональных относительно пуассоновского (многочлены Пуассона–Шарлье) и биномиального (многочлены Кравчука) распределений соответственно (см., например, [4]). При этом выводились и использовались оказавшиеся необходимыми выражения для разностей многочленов данных систем (соответствующие выкладки значительно упростило использование новой записи этих классических многочленов в виде факториально-степенных биномов, что позволило применить разработанную в [5] специальную технику комбинаторных преобразований). На заключительном этапе использовалось свойство некоррелированности (ортогональности) случайных величин специального вида — многочленов систем Пуассона–Шарлье и Кравчука, в которых в качестве переменной выступает случайная величина, имеющая пуассоновское или биномиальное распределение соответственно.

Недавно (см. [6]) в явном виде были получены две ортонормированные системы многочленов (факториально-степенных биномов), ортогональных относительно отрицательного биномиального распределения (распределения Паскаля), см., например, [7]. Это дает возможность применить описанный выше подход для получения аналогов неравенства Чернова для отрицательного биномиального распределения. (До опубликования доказательства первая из этих систем была представлена в докладе на VI Всемирном конгрессе Общества им. Бернулли, состоявшемся в Барселоне с 26 по 31 июля 2004 г. Вторая система, приведенная в замечании 1 в [6], была независимо и почти одновременно получена без нормировок другим способом, см. [8].) Многочлены этих систем будем называть многочленами первого и второго рода соответственно.

* Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, ул. Губкина, 8, 119991 Москва, ГСП-1, Россия; e-mail: tvp@tvp.ru