Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. В. Прохоров, О. В. Висков, В. И. Хохлов, Аналоги неравенства Чернова для отрицательного биномиального распределения, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2005, том 50, выпуск 2, 379–382

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp115>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.80.181.102

26 апреля 2023 г., 04:42:54

23. Seneta E. Sensitivity of finite Markov chains under perturbation. — Statist. Probab. Lett., 1993, v. 17, № 2, p. 163–168.

Поступила в редакцию
13.XI.2001

Исправленный вариант
7.X.2004

© 2005 г. ПРОХОРОВ Ю. В.*, ВИСКОВ О. В.*, ХОХЛОВ В. И.*

АНАЛОГИ НЕРАВЕНСТВА ЧЕРНОВА ДЛЯ ОТРИЦАТЕЛЬНОГО БИНОМИАЛЬНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ¹⁾

Получены аналоги изопериметрического неравенства Чернова для отрицательного биномиального распределения.

Ключевые слова и фразы: отрицательное биномиальное распределение, распределение Паскаля, моментные неравенства, факториально-степенные биномы, многочлены, ортогональные относительно отрицательного биномиального распределения (Паскаля).

В работах [1] и [2] были получены пуассоновский и биномиальные аналоги (так называемого изопериметрического) неравенства Чернова [3], установленного им для нормального распределения. При выводе этих дискретных аналогов в [1] и [2] использовался следующий подход. Оператор дифференцирования, играющий в неравенстве Чернова ключевую роль, заменялся на специально подобранные линейные операторы, способные служить естественными дискретными аналогами оператора дифференцирования. Затем для вычисления результатов действия этих операторов на функции последние представлялись в виде рядов Фурье по классическим системам многочленов, ортогональных относительно пуассоновского (многочлены Пуассона–Шарлье) и биномиального (многочлены Кравчука) распределений соответственно (см., например, [4]). При этом выводились и использовались оказавшиеся необходимыми выражения для разностей многочленов данных систем (соответствующие выкладки значительно упростило использование новой записи этих классических многочленов в виде факториально-степенных биномов, что позволило применить разработанную в [5] специальную технику комбинаторных преобразований). На заключительном этапе использовалось свойство некоррелированности (ортогональности) случайных величин специального вида — многочленов систем Пуассона–Шарлье и Кравчука, в которых в качестве переменной выступает случайная величина, имеющая пуассоновское или биномиальное распределение соответственно.

Недавно (см. [6]) в явном виде были получены две ортонормированные системы многочленов (факториально-степенных биномов), ортогональных относительно отрицательного биномиального распределения (распределения Паскаля), см., например, [7]. Это дает возможность применить описанный выше подход для получения аналогов неравенства Чернова для отрицательного биномиального распределения. (До опубликования доказательства первая из этих систем была представлена в докладе на VI Всемирном конгрессе Общества им. Бернулли, состоявшемся в Барселоне с 26 по 31 июля 2004 г. Вторая система, приведенная в замечании 1 в [6], была независимо и почти одновременно получена без нормировок другим способом, см. [8].) Многочлены этих систем будем называть многочленами первого и второго рода соответственно.

* Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, ул. Губкина, 8, 119991 Москва, ГСП-1, Россия; e-mail: tvp@tvp.ru

Обозначим $\mathcal{F}$ класс $\{f(x): f(x) = \sum_{\alpha=0}^{\infty} f_{\alpha} H_{\alpha}(x)\}$ и $\mathcal{G}$ подкласс $\{g(x): g(x) = \sum_{\alpha=0}^{\infty} g_{\alpha} H_{\alpha}^{*}(x), g_{\alpha} g_{\beta} \geq 0 \text{ для всех } \alpha, \beta = 1, 2, \dots\}$ функций, допускающих (на всей числовой прямой) представления в виде рядов Фурье, соответственно, по ортонормированной системе многочленов первого рода

$$H_{\alpha}(x) = h_{\alpha} \tilde{H}_{\alpha}(x) \quad (\alpha = 0, 1, \dots),$$

где

$$h_{\alpha} = \frac{p^{\alpha}}{\sqrt{\alpha! [r]_{\alpha} q^{\alpha}}}, \quad \tilde{H}_{\alpha}(x) = \left([x] - \frac{q}{p} [\alpha + r - 1] \right)^{\alpha},$$

и по ортонормированной системе многочленов второго рода

$$H_{\alpha}^{*}(x) = h_{\alpha}^{*} \tilde{H}_{\alpha}^{*}(x) \quad (\alpha = 0, 1, \dots),$$

где

$$h_{\alpha}^{*} = \frac{1}{\sqrt{\alpha! [r]_{\alpha} q^{\alpha}}}, \quad \tilde{H}_{\alpha}^{*}(x) = ([x] + q[-r - x])^{\alpha}.$$

Свойство ортогональности этих многочленов относительно отрицательного биномиального распределения означает, что

$$\mathbf{E} H_{\alpha}(\pi_{r,p}) H_{\beta}(\pi_{r,p}) = \mathbf{E} H_{\alpha}^{*}(\pi_{r,p}) H_{\beta}^{*}(\pi_{r,p}) = \delta_{\alpha\beta}$$

($\delta_{\alpha\beta}$ — символ Кронекера, $\alpha, \beta = 0, 1, \dots$). Класс $\mathcal{F}$ содержит в себе, например, все многочлены любой степени $n = 0, 1, \dots$.

Теорема. Пусть $\pi_{r,p}$ — случайная величина, имеющая отрицательное биномиальное распределение (Паскаля) с параметрами r и p , т.е.

$$\mathbf{P}\{\pi_{r,p} = \nu\} = \binom{r + \nu - 1}{\nu} p^r q^{\nu}, \quad \nu = 0, 1, \dots, \quad p + q = 1, \quad p, q > 0.$$

Для произвольной функции $f(x) \in \mathcal{F}$

$$\frac{\mathbf{D} f(\pi_{r,p})}{\mathbf{D} \pi_{r,p}} \leq \mathbf{E}(W f(\pi_{r,p}))^2 \leq r \frac{\mathbf{D} f(\pi_{r,p})}{\mathbf{D} \pi_{r,p}}. \quad (1)$$

Для произвольной функции $g(x) \in \mathcal{G}$

$$\frac{\mathbf{D} g(\pi_{r,p})}{\mathbf{D} \pi_{r,p}} \leq \mathbf{E}(\Delta g(\pi_{r,p}))^2 \leq \frac{r}{p} \frac{\mathbf{D} g(\pi_{r,p}) + S_g}{\mathbf{D} \pi_{r,p}}, \quad S_g = 2 \sum_{\alpha, \beta=1, \alpha > \beta}^{\infty} g_{\alpha} g_{\beta}, \quad (2)$$

где

$$W f(x) = p \sum_{\theta=0}^{\infty} q^{\theta} \Delta f(x + \theta), \quad \Delta f(x) = f(x + 1) - f(x),$$

причем равенства в левых частях (1) и (2) достигаются тогда и только тогда, когда соответственно $f(\cdot)$ и $g(\cdot)$ линейные функции своего аргумента, а оба неравенства в (1) обращаются в равенство на геометрическом распределении, соответствующем $r = 1$.

Доказательство. В целях сокращения изложения доказательства определение факториально-степенных многочленов (биномов) и описание используемой в работе системы обозначений не приводятся; они дословно заимствованы из [5].

Исходя из представления произвольной функции $f(x) \in \mathcal{F}$ в виде ряда Фурье $\sum_{\alpha=0}^{\infty} f_{\alpha} H_{\alpha}(x)$, замечаем, что $\Delta f(x + \theta) = \sum_{\alpha=0}^{\infty} f_{\alpha} h_{\alpha} \Delta \tilde{H}_{\alpha}(x + \theta)$, и так как в силу леммы 2 в [5] справедливы преобразования

$$\begin{aligned} & \left([x + \theta + 1] - \frac{q}{p} [\alpha + r - 1] \right)^{\alpha} - \left([x + \theta] - \frac{q}{p} [\alpha + r - 1] \right)^{\alpha} \\ &= \sum_{\nu=0}^{\alpha} \frac{[\alpha]_{\nu}}{\nu!} [\theta + 1]^{\nu} \left([x] - \frac{q}{p} [\alpha + r - 1] \right)^{\alpha - \nu} - \sum_{\nu=0}^{\alpha} \frac{[\alpha]_{\nu}}{\nu!} [\theta]^{\nu} \left([x] - \frac{q}{p} [\alpha + r - 1] \right)^{\alpha - \nu} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{\nu=0}^{\alpha} \frac{[\alpha]^\nu}{\nu!} \nu [\theta]^{\nu-1} \left([x] - \frac{q}{p} [\alpha + r - 1] \right)^{\alpha-\nu} \\
&= \alpha \sum_{\nu=0}^{\alpha-1} \frac{[\alpha-1]^\nu}{\nu!} [\theta]^\nu \left([x] - \frac{q}{p} [\alpha + r - 1] \right)^{\alpha-1-\nu},
\end{aligned}$$

имеем

$$Wf(x) = p \sum_{\alpha=1}^{\infty} f_{\alpha} h_{\alpha} \alpha \sum_{\nu=0}^{\alpha-1} \frac{[\alpha-1]^\nu}{\nu!} \left([x] - \frac{q}{p} [\alpha + r - 1] \right)^{\alpha-1-\nu} \sum_{\theta=0}^{\infty} q^{\theta} [\theta]^\nu.$$

Так как (ср. [2, с. 593])

$$\sum_{\theta=0}^{\infty} q^{\theta} [\theta]^\nu = \frac{\nu! q^{\nu}}{(1-q)^{\nu+1}} = (-1)^{\nu} [-1]^{\nu} p^{-1} \left(\frac{q}{p} \right)^{\nu},$$

в силу леммы 2 из [5] получаем:

$$\begin{aligned}
Wf(x) &= \sum_{\alpha=1}^{\infty} f_{\alpha} h_{\alpha} \alpha \left([x] - \frac{q}{p} [\alpha + r - 1] - \frac{q}{p} [-1] \right)^{\alpha-1} \\
&= \sum_{\alpha=1}^{\infty} f_{\alpha} h_{\alpha} \alpha \left([x] - \frac{q}{p} [\alpha + r - 2] \right)^{\alpha-1} \\
&= \sum_{\alpha=1}^{\infty} f_{\alpha} \frac{h_{\alpha}}{h_{\alpha-1}} \alpha H_{\alpha-1}(x) = \frac{p}{\sqrt{q}} \sum_{\alpha=1}^{\infty} f_{\alpha} \sqrt{\frac{\alpha}{\alpha + r - 1}} H_{\alpha-1}(x).
\end{aligned}$$

Поэтому

$$\mathbf{E}(Wf(\pi_{r,p}))^2 = \left(\frac{p^2}{q} \right) \sum_{\alpha=1}^{\infty} f_{\alpha}^2 \left(\frac{\alpha}{\alpha + r - 1} \right),$$

что и влечет за собой (1), поскольку $\mathbf{D}f(\pi_{r,p}) = \sum_{\alpha=1}^{\infty} f_{\alpha}^2$, а $\mathbf{D}\pi_{r,p} = rq/p^2$.

Установим неравенства (2). Исходя из представления произвольной функции $g(x) \in \mathcal{G}$ в виде ряда Фурье по ортонормированной системе второго рода, замечаем, что $\Delta g(x) = \sum_{\alpha=0}^{\infty} g_{\alpha} h_{\alpha}^* \Delta \tilde{H}_{\alpha}^*(x)$, и так как в силу леммы 2 в [5] справедливы преобразования

$$\begin{aligned}
([x+1] + q[-r-x-1])^{\alpha} - \tilde{H}_{\alpha}^*(x) &= ([x] + [1] + q[-r-x] + q[-1])^{\alpha} - \tilde{H}_{\alpha}^* \\
&= \sum_{\nu=0}^{\alpha-1} \frac{[\alpha]^\nu}{\nu!} \tilde{H}_{\nu}^*(x) ([1] + q[-1])^{\alpha-\nu},
\end{aligned}$$

а $([1] + q[-1])^{\alpha-\nu} = p(-q)^{\alpha-\nu-1}(\alpha-\nu)!$, имеем

$$\Delta H_{\alpha}^*(x) = \sum_{\nu=0}^{\alpha-1} c_{\nu\alpha} H_{\nu}^*(x), \quad c_{\nu\alpha} = -\frac{p}{q} \frac{\alpha! (-q)^{\alpha} h_{\alpha}^*}{\nu! (-q)^{\nu} h_{\nu}^*} = \frac{p}{q} (-1)^{\alpha-\nu-1} \sqrt{\frac{[\alpha]^{\alpha-\nu} q^{\alpha-\nu}}{[\alpha+r-1]^{\alpha-\nu}}}.$$

Поскольку

$$\mathbf{E}(\Delta g(\pi_{r,p}))^2 = \sum_{\alpha=1}^{\infty} g_{\alpha}^2 C_{\alpha} + 2 \sum_{\alpha, \beta=1, \alpha < \beta}^{\infty} g_{\alpha} g_{\beta} C_{\alpha}, \quad C_{\alpha} = \sum_{\nu=0}^{\alpha-1} c_{\nu\alpha}^2,$$

имеем

$$\left(\min_{\alpha \geq 1} C_{\alpha} \right) \mathbf{D}g(\pi_{r,p}) \leq \mathbf{E}(\Delta g(\pi_{r,p}))^2 \leq \left(\max_{\alpha \geq 1} C_{\alpha} \right) (\mathbf{D}g(\pi_{r,p}) + S_g),$$

что и приводит к неравенствам (2), так как

$$\min_{\alpha \geq 1} C_{\alpha} = \frac{p^2}{q^2} \min_{\alpha \geq 1} \sum_{\nu=0}^{\alpha-1} \frac{q^{\alpha-\nu} [\alpha]^{\alpha-\nu}}{[\alpha+r-1]^{\alpha-\nu}} \geq \frac{p^2}{q^2} \min_{\alpha \geq 1} \frac{q\alpha}{\alpha+r-1} = \frac{p^2}{rq} = \frac{1}{\mathbf{D}\pi_{r,p}},$$

а

$$\max_{\alpha \geq 1} C_\alpha \leq \frac{p^2}{q^2} \max_{\alpha \geq 1} \frac{q^\alpha \alpha}{\alpha + r - 1} \sum_{\nu=0}^{\alpha-1} q^{-\nu} = \frac{p}{q} = \frac{r}{p} \frac{1}{D \pi_{r,p}},$$

в то время, как

$$D g(\pi_{r,p}) = \sum_{\alpha=1}^{\infty} g_\alpha^2.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Висков О. В., Прохоров Ю. В., Хохлов В. И. Пуассоновский аналог неравенства Чернова. — *Обозрение прикл. и промышл. матем.*, 2001, т. 8, в. 1, с. 128–129.
2. Прохоров Ю. В., Висков О. В., Хохлов В. И. Биномиальные аналоги неравенства Чернова. — *Теория вероятн. и ее примен.*, 2001, т. 46, в. 3, с. 592–594.
3. Chernoff H. A note on an inequality involving the normal distribution. — *Ann. Probab.*, 1981, v. 9, p. 533–535.
4. Сеге Г. Ортогональные многочлены. М.: Физматгиз, 1962, 500 с.
5. Хохлов В. И. Многочлены, ортогональные относительно полиномиального распределения, и факториально-степенной формализм. — *Теория вероятн. и ее примен.*, 2001, т. 46, в. 3, с. 585–592.
6. Хохлов В. И. Многочлены, ортогональные относительно отрицательного биномиального распределения. — *Обозрение прикл. и промышл. матем.*, 2004, т. 11, в. 3, с. 487–492. (Письмо в редакцию. — *Обозрение прикл. и промышл. матем.*, 2005, т. 12, в. 1, с. 207.)
7. Прохоров А. В. Отрицательное биномиальное распределение. — В *энциклопедии: Теория вероятностей и математическая статистика.* / Под ред. Ю. В. Прохорова и др. М.: БРЭ, 1999, с. 436.
8. Asai N., Kubo I., Kuo H.-H. Multiplicative renormalization and generating functions. II. — *Taiwanese J. Math.*, 2004, v. 8, № 4, p. 593–628.

Поступила в редакцию
20.IV.2005

© 2005 г.

ШАШКИН А. П.*

К ЦЕНТРАЛЬНОЙ ПРЕДЕЛЬНОЙ ТЕОРЕМЕ НЬЮМЕНА¹⁾

Строится пример строго стационарной ассоциированной последовательности случайных величин, для которой неверна центральная предельная теорема, а дисперсии частичных сумм растут заданным регулярным образом. Тем самым обобщается известный пример Н. Херриндорфа и показывается оптимальный характер условий классической теоремы Ньюмена.

Ключевые слова и фразы: ассоциированные случайные величины, стационарность, центральная предельная теорема, медленно меняющиеся функции.

* Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, механико-математический факультет, кафедра теории вероятностей, Ленинские горы, 119992 Москва, Россия; e-mail: shashkin@mech.math.msu.su

¹⁾ Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант 03-01-00724) и программы поддержки ведущих научных школ (грант НШ-1758.2003.1).