Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. П. Шашкин, К центральной предельной теореме Ньюмена, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2005, том 50, выпуск 2, 382–390

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp116>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.67.100

26 апреля 2023 г., 17:35:32

а

$$\max_{\alpha \geq 1} C_\alpha \leq \frac{p^2}{q^2} \max_{\alpha \geq 1} \frac{q^\alpha \alpha}{\alpha + r - 1} \sum_{\nu=0}^{\alpha-1} q^{-\nu} = \frac{p}{q} = \frac{r}{p} \frac{1}{D \pi_{r,p}},$$

в то время, как

$$D g(\pi_{r,p}) = \sum_{\alpha=1}^{\infty} g_\alpha^2.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Висков О. В., Прохоров Ю. В., Хохлов В. И. Пуассоновский аналог неравенства Чернова. — *Обозрение прикл. и промышл. матем.*, 2001, т. 8, в. 1, с. 128–129.
2. Прохоров Ю. В., Висков О. В., Хохлов В. И. Биномиальные аналоги неравенства Чернова. — *Теория вероятн. и ее примен.*, 2001, т. 46, в. 3, с. 592–594.
3. Chernoff H. A note on an inequality involving the normal distribution. — *Ann. Probab.*, 1981, v. 9, p. 533–535.
4. Сеге Г. Ортогональные многочлены. М.: Физматгиз, 1962, 500 с.
5. Хохлов В. И. Многочлены, ортогональные относительно полиномиального распределения, и факториально-степенной формализм. — *Теория вероятн. и ее примен.*, 2001, т. 46, в. 3, с. 585–592.
6. Хохлов В. И. Многочлены, ортогональные относительно отрицательного биномиального распределения. — *Обозрение прикл. и промышл. матем.*, 2004, т. 11, в. 3, с. 487–492. (Письмо в редакцию. — *Обозрение прикл. и промышл. матем.*, 2005, т. 12, в. 1, с. 207.)
7. Прохоров А. В. Отрицательное биномиальное распределение. — В *энциклопедии: Теория вероятностей и математическая статистика.* / Под ред. Ю. В. Прохорова и др. М.: БРЭ, 1999, с. 436.
8. Asai N., Kubo I., Kuo H.-H. Multiplicative renormalization and generating functions. II. — *Taiwanese J. Math.*, 2004, v. 8, № 4, p. 593–628.

Поступила в редакцию
20.IV.2005

© 2005 г.

ШАШКИН А. П.*

К ЦЕНТРАЛЬНОЙ ПРЕДЕЛЬНОЙ ТЕОРЕМЕ НЬЮМЕНА¹⁾

Строится пример строго стационарной ассоциированной последовательности случайных величин, для которой неверна центральная предельная теорема, а дисперсии частичных сумм растут заданным регулярным образом. Тем самым обобщается известный пример Н. Херрндорфа и показывается оптимальный характер условий классической теоремы Ньюмена.

Ключевые слова и фразы: ассоциированные случайные величины, стационарность, центральная предельная теорема, медленно меняющиеся функции.

* Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, механико-математический факультет, кафедра теории вероятностей, Ленинские горы, 119992 Москва, Россия; e-mail: shashkin@mech.math.msu.su

¹⁾ Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант 03-01-00724) и программы поддержки ведущих научных школ (грант НШ-1758.2003.1).

1. Введение и формулировка результата. Согласно классической теореме Ньюмена (см. [1]), для строго стационарных ассоциированных последовательностей случайных величин $X = \{X_n, n \in \mathbf{N}\}$ таких, что

$$\mathbf{E}X_1 = 0, \quad 0 < \mathbf{D}X_1 < \infty, \quad (1)$$

справедлива центральная предельная теорема, если

$$0 < \sum_{j=1}^{\infty} \text{cov}(X_1, X_j) < \infty. \quad (2)$$

А именно, нормированные суммы $S_n/\sqrt{n}$ сходятся по распределению при $n \rightarrow \infty$ к нормальному закону, здесь $S_n = \sum_{j=1}^n X_j, n \in \mathbf{N}$.

Напомним, что семейство действительных случайных величин $\{Z_t, t \in T\}$ называется ассоциированным (см. [2]), если для любого конечного набора индексов $t_1, \dots, t_m \in T$ и любых покоординатно неубывающих функций $f, g: \mathbf{R}^m \rightarrow \mathbf{R}$ выполнено неравенство

$$\text{cov}(f(Z_{t_1}, \dots, Z_{t_m}), g(Z_{t_1}, \dots, Z_{t_m})) \geq 0,$$

если данная ковариация определена. Заметим, что любое семейство независимых случайных величин автоматически является ассоциированным. Ассоциированные случайные процессы и поля изучались во многих работах, и для них установлен ряд асимптотических результатов (см., например, [1], [3]–[5] и там же ссылки). Свойство (2) равносильно тому, что

$$K_n(X) := \sum_{j=1}^n \text{cov}(X_1, X_j) \rightarrow \sigma^2 \in (0, +\infty) \quad (3)$$

при $n \rightarrow \infty$. Очевидно, $K_n(X)$ — неубывающая последовательность.

В работе [6] показано, что в теореме Ньюмена, вообще говоря, нельзя отказаться от условия (3), т.е. существует пример строго стационарной ассоциированной последовательности с $K_n(X) \sim \ln n$, для которой частичные суммы $S_n/\sqrt{nK_n(X)}$ не имеют невырожденного предельного распределения. Заметим, что в этом примере $\mathbf{D}S_n \sim n \ln n$.

Целью данной работы является обобщение упомянутого примера: строится строго стационарная ассоциированная последовательность, не удовлетворяющая центральной предельной теореме и такая, что $K_n(X) \sim L(n)$, где $L(n)$ — произвольная медленно меняющаяся функция.

Сформулируем основной результат.

Теорема 1. Пусть $L(n)$ — неубывающая медленно меняющаяся функция такая, что $L(n) \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$. Тогда для любой положительной неограниченной числовой последовательности $\{B(n), n \in \mathbf{N}\}$ существует строго стационарная ассоциированная последовательность случайных величин $\{X_j, j \in \mathbf{N}\}$ такая, что

- а) выполнено (1),
- б) $K_n(X) \sim L(n)$ при $n \rightarrow \infty$,
- с) нормированные частичные суммы $\{S_n/\sqrt{nB(n)}\}_{n \in \mathbf{N}}$ не имеют невырожденного предела по распределению при $n \rightarrow \infty$.

З а м е ч а н и е 1. Если функция $L(n)$ не эквивалентна никакой неубывающей функции, то, очевидно, не существует ассоциированной последовательности $\{X_j\}$, для которой $K_n(X) \sim L(n)$. Таким образом, требование неубывания является естественным.

З а м е ч а н и е 2. Предельные теоремы для стационарных слабо зависимых последовательностей, дисперсии частичных сумм которых имеют порядок роста $nL(n)$, где L медленно меняется, — хорошо изученный раздел теории вероятностей, см., например, [7, гл. 18]. Если для последовательности $\{X_j\}$ выполнена центральная предельная теорема с неслучайной нормировкой $\sqrt{nQ(n)}$, т.е. $S_n/\sqrt{nQ(n)} \rightarrow N(0, 1)$ по распределению при $n \rightarrow \infty$, то, как следует из [8, теорема 5.4], $\mathbf{D}S_n \sim nQ(n)$. Как показано в [6], отсюда следует, что $K_n(X) \sim Q(n)$. Таким образом, по теореме 1 данной работы невозможно выделить подкласс $\mathcal{L}$ в классе

медленно меняющихся функций такой, что для любой ассоциированной строго стационарной последовательности X , для которой выполнено (1) и $K_n(X) \sim L(n) \in \mathcal{L}$, верна центральная предельная теорема.

2. Доказательство теоремы 1. Без ограничения общности можно считать, что $L(n) > 0$ для любого $n \in \mathbb{N}$ (иначе рассмотрим вместо $L(n)$ функцию $L(n) + \arctg n$). Так как $L(n)$ не убывает, то ее можно продолжить до неубывающей медленно меняющейся функции действительного аргумента $L(x)$, где $x \geq 1$, такой, что $L(x) \rightarrow \infty$ при $x \rightarrow \infty$.

Построение примера опирается на идеи работы [6]. Показывается, что

$$L\left(\frac{1}{t}\right) \sim f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} (P_k(t))^2 \quad (4)$$

при $t \downarrow 0$, где $P_k(t)$ — некоторые четные тригонометрические многочлены с неотрицательными коэффициентами. Затем искомая последовательность строится как сумма ряда из независимых процессов скользящего среднего, каждый из которых имеет спектральную плотность $(P_k(t))^2$. Однако основная трудность, возникающая при обобщении результата [6], состоит в доказательстве возможности представления (4) для произвольной функции L (так как в [6] такое представление основано на разложении в ряд Тейлора функции $L(1/t) = -\ln t$). Нужные для решения этой задачи факты представлены в леммах 1–4. Затем в лемме 5 устанавливается связь поведения $K_n(X)$ при $n \rightarrow \infty$ и спектральной плотности $f(t)$ при $t \rightarrow 0$. Наконец, в окончании доказательства показано, что некоторая подпоследовательность нормированных сумм, введенных в с), сходится по вероятности к нулю.

Введем необходимые обозначения. Для $n \in \mathbb{Z}_+$ пусть $r(n) = \min\{k \in \mathbb{N}: 2^k > 5^n\}$. Целую и дробную часть числа x , как обычно, будем обозначать $[x]$ и $\{x\}$. Определим множества

$$\Delta_m = [\log_5 2^{r(m)}, \log_5 2^{r(m)+1}], \quad T_m = [0, 1] \setminus \Delta_m, \quad m \in \mathbb{Z}_+. \quad (5)$$

Пусть $\phi_m(s)$ ($m \in \mathbb{Z}_+$) — последовательность непрерывных функций, определенных на отрезке $[0, 1]$ и таких, что:

- (а) $\phi_m(s) \geq 0$ при $s \in [0, 1]$, $\phi_m(0) = \phi_m(1) = 0$;
- (б) на отрезке Δ_m функция ϕ_m постоянна и равна $\max_{[0,1]} \phi_m(s)$;
- (с) $\int_0^1 \phi_m(s) ds = 1$;
- (д) если $m > 0$, то $\int_{T_m} \phi_m(s) ds < m^{-2} \min\{1, (L(5^{m+2}))^{-1}\}$.

Заметим, что длина каждого из отрезков Δ_m равна $\log_5 2$, и, следовательно, при введенных требованиях верна оценка $\max_{[0,1]} \phi_m(s) \leq \log_2 5$, $m \in \mathbb{Z}_+$.

Пусть $\nu_m = (\log_5 e) \ln(L(5^{m+1})/L(5^m))$, $m \in \mathbb{Z}_+$. Рассмотрим функции

$$L_1(x) = \exp\left(\ln L(5^m) + \left(\ln \frac{L(5^{m+1})}{L(5^m)}\right) \int_0^{\{\log_5 x\}} \phi_m(s) ds\right), \quad (6)$$

$$\varepsilon(x) = \nu_m \phi_m(\{\log_5 x\}), \quad (7)$$

где $x \geq 1$, $m = [\log_5 x]$. Функция $L_1(x)$ не убывает и в точках 5^m , $m \in \mathbb{Z}_+$, совпадает с функцией $L(x)$. Следовательно, $L_1(x) \sim L(x)$ и L_1 — медленно меняющаяся функция. Легко также видеть, что $\varepsilon(x) \geq 0$ — непрерывная функция, причем $\varepsilon(x) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \infty$.

Пусть натуральное число k принадлежит множеству K , если существует $m \in \mathbb{Z}_+$ такое, что $k = r(m)$ и $L(5^{m+1}) > L(5^m)$. Символ $\lim_K$ означает, что предел берется по $k \in K$, $k \rightarrow \infty$.

Следующая лемма содержит необходимые нам свойства функции $L_1(x)$.

Лемма 1. 1) *Справедливо представление*

$$L_1(x) = L(1) \exp\left(\int_1^x \frac{\varepsilon(u)}{u} du\right), \quad (8)$$

где $\varepsilon(x)$ фигурирует в (7).

2) При всех достаточно больших $k \in K$ функция $L_1(x)$ на отрезке $[2^k, 2^{k+1}]$ имеет положительную производную и вогнута.

3) $\lim_K L'_1(2^k)/L'_1(2^{k+1}) = 2$.

4) Для каждого $k \in \mathbb{N} \setminus K$ имеем $L_1(2^{k+1}) - L_1(2^k) \leq d_k$, где $d_k \geq 0$ — такие числа, что $\sum_{k \in \mathbb{N} \setminus K} d_k < \infty$.

З а м е ч а н и е 3. Свойство 1) означает, что (6) — модификация классического интегрального представления Карамата для медленно меняющихся функций. Сходные представления рассматривались, например, в [9].

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $k \in K, k = r(m)$ для некоторого $m \in \mathbb{Z}_+$. Утверждения 1) и 2) проверяются непосредственно с учетом того, что $L_1(5^{m+1})/L_1(5^m) \rightarrow 1$ при $m \rightarrow \infty$. Так как при $k \in K$ по построению имеем $\varepsilon(2^k) = \varepsilon(2^{k+1})$, то

$$\lim_K \frac{L'_1(2^k)}{L'_1(2^{k+1})} = \lim_K \frac{L_1(2^k) \varepsilon(2^k) 2^{k+1}}{L_1(2^{k+1}) \varepsilon(2^{k+1}) 2^k} = 2.$$

Это доказывает 3).

Проверим последнее утверждение. Если $k = r(m)$ для некоторого $m \in \mathbb{Z}_+$, но $k \notin K$, то $L_1(5^m) = L_1(5^{m+1})$, поэтому $L_1(2^k) = L_1(2^{k+1})$ и можно взять $d_k = 0$. Если же $k \neq r(m)$ ни для какого m , то при $m = [\log_5 2^k]$ имеют место неравенства

$$5^m < 2^{r(m)} < 2^k < 5^{m+1}.$$

Имеем

$$L_1(2^{k+1}) - L_1(2^k) = L_1(2^k) \left(\exp \left(\int_{2^k}^{2^{k+1}} \frac{\varepsilon(u)}{u} du \right) - 1 \right).$$

Заметим, что $x \in (2^k, 2^{k+1}) \Rightarrow \{\log_5 x\} \in T_m \cup T_{m+1}$, где множества T_m введены в (5). Представим интеграл в виде суммы интегралов по множествам $(2^k, \min(5^{m+1}, 2^{k+1}))$ и $(\min(5^{m+1}, 2^{k+1}), 2^{k+1})$ (второе из них может быть пустым). Сделаем в первом интеграле замену $s = \log_5 u - m$, а во втором $s = \log_5 u - m - 1$. Используя свойство (d) функций $\phi_m(s)$, при $k > 2$ получаем, что

$$\begin{aligned} L_1(2^{k+1}) - L_1(2^k) &\leq L(5^{m+2}) \left(\exp \left(\int_{T_m} (\ln 5) \nu_m \phi_m(s) ds + \int_{T_{m+1}} (\ln 5) \nu_{m+1} \phi_{m+1}(s) ds \right) - 1 \right) \\ &< \frac{e}{m^2} = \frac{e}{[k \log_5 2]^2}, \end{aligned}$$

если $\max(\nu_m, \nu_{m+1}) < (\log_5 e)/2$. Так как $\nu_m \rightarrow 0$ при $m \rightarrow \infty$, то утверждение 4) доказано.

Итак, при доказательстве теоремы 1 будем считать, что для функции $L(x)$ уже справедливо представление (6), влекущее все утверждения леммы 1. Далее нам потребуется следующее элементарное предложение.

Лемма 2. Пусть α_n, β_n — две числовые последовательности такие, что $\alpha_n \rightarrow 0$ и $\beta_n \uparrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$. Тогда

$$\sum_{k=1}^{n-1} \alpha_k (\beta_{k+1} - \beta_k) = o(\beta_n) \quad \text{при } n \rightarrow \infty.$$

Продолжим доказательство теоремы 1. Пусть $h(t) = L(1/t)$, $t \in (0, \frac{1}{2}]$. При каждом $k \in \mathbb{N}$ определим функцию

$$H_k(t) = \frac{1}{2} L'(2^k) \left(2^{3k} t^2 - 2^{2k} (2 + \sqrt{2}) t + 2^k (1 + \sqrt{2}) \right) + L(2^k), \quad t \in \left[0, \frac{1}{2} \right]. \quad (9)$$

Несложно убедиться, что $H_k(2^{-k}) = L(2^k)$. Для $k \in \mathbb{N}$ положим

$$g_k(t) = \begin{cases} H_{k+1}(t) - H_k(t), & t \in (0, 2^{-k-1}], \\ h(t) - H_k(t), & t \in (2^{-k-1}, 2^{-k}], \\ 0, & t \in (2^{-k}, \frac{1}{2}]. \end{cases} \quad (10)$$

По построению $h(t) = H_1(t) + \sum_{k=1}^{\infty} g_k(t)$.

Лемма 3. Справедливо соотношение $\sum_{k \notin K} g_k(t) = o(h(t))$, $t \rightarrow 0$.

Доказательство. Для каждого $t \in (0, \frac{1}{2}]$ и $q \in \mathbb{N}$ такого, что $t \in (2^{-q-1}, 2^{-q}]$, имеем

$$\sum_{k \geq 1, k \notin K} g_k(t) = \sum_{1 \leq k \leq q, k \notin K} g_k(t) = (h(t) - H_q(t)) I_{\{q \notin K\}} + \sum_{1 \leq k < q, k \notin K} (H_{k+1}(t) - H_k(t)).$$

Функции $h(t)$ и $H_q(t)$ не возрастают при $t \in (2^{-q-1}, 2^{-q}]$ (для второй из них это следует из соотношения $H'_q(2^{-q}) \leq 0$, которое легко проверяется). Поэтому при каждом $q \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} h(t) - H_q(t) &\leq h(2^{-q-1}) - H_q(2^{-q-1}) = L(2^{q+1}) - L(2^q) = o(L(2^q)), \\ H_q(t) - h(t) &\leq H_q(2^{-q-1}) - h(2^{-q-1}) = (2^{-3} + 2^{-3/2}) 2^q L'(2^q) \\ &= (2^{-3} + 2^{-3/2}) \varepsilon(2^q) L(2^q) = o(L(2^q)) \end{aligned} \quad (11)$$

при $q \rightarrow \infty$. Далее,

$$\begin{aligned} \sum (H_{k+1}(t) - H_k(t)) &= \sum (L(2^{k+1}) - L(2^k)) \\ &+ \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \sum (\varepsilon(2^{k+1}) L(2^{k+1}) - \varepsilon(2^k) L(2^k)) \\ &- \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \sum (2^{k+1} \varepsilon(2^{k+1}) L(2^{k+1}) - 2^k \varepsilon(2^k) L(2^k)) t \\ &+ \frac{1}{2} \sum (2^{2k+2} \varepsilon(2^{k+1}) L(2^{k+1}) - 2^{2k} \varepsilon(2^k) L(2^k)) t^2 = \sum_{i=1}^4 Q_i \end{aligned}$$

(везде, где не указаны пределы суммирования, суммирование ведется по $k \notin K$, $1 \leq k < q$). В силу утверждения 4) леммы 1 имеем $0 \leq Q_1 \leq \sum_k d_k < \infty$. Оценим Q_2 :

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{-1} Q_2 &= \left(\sum_{1 \leq k < q} - \sum_{1 \leq k < q, k \in K}\right) (\varepsilon(2^{k+1}) L(2^{k+1}) - \varepsilon(2^k) L(2^k)) \\ &= \varepsilon(2^q) L(2^q) - \varepsilon(2) L(2) - \sum_{1 \leq k < q, k \in K} (\varepsilon(2^{k+1}) L(2^{k+1}) - \varepsilon(2^k) L(2^k)) \\ &= o(L(2^q)) - \sum_{1 \leq k < q, k \in K} \varepsilon(2^k) (L(2^{k+1}) - L(2^k)), \end{aligned}$$

так как при $k \in K$ по построению $\varepsilon(2^k) = \varepsilon(2^{k+1})$. Сумма, вычитаемая в последнем выражении, неотрицательна в силу неубывания L и не превосходит

$$\sum_{1 \leq k < q} \varepsilon(2^k) (L(2^{k+1}) - L(2^k)) = o(L(2^q))$$

по лемме 2, применяемой к $\alpha_q = \varepsilon(2^q)$ и $\beta_q = L(2^q)$. Суммы Q_3 и Q_4 оцениваются тем же способом (в этих случаях в лемме 2 следует брать $\beta_q = 2^q L(2^q)$ и $\beta_q = 2^{2q} L(2^q)$ соответственно). Итак, $\sum_{k \notin K} g_k(t) = o(h(2^{-q}))$, $t \rightarrow 0$, где $q = \lfloor -\log_2 t \rfloor$. Теперь утверждение леммы 3, очевидно, справедливо.

Лемма 4. Существует семейство неотрицательных ограниченных функций $\{h_k(t), t \in (0, \frac{1}{2}], k \in \mathbb{N}\}$ таких, что

1) имеет место соотношение

$$h(t) \sim \sum_{k=1}^{\infty} h_k(t) \quad \text{при } t \rightarrow 0;$$

2) при каждом $k \in \mathbb{N}$ функция $h_k(t)$ не возрастает и дифференцируема при всех $t \in (0, \frac{1}{2}]$, кроме, возможно, одной точки;

3) при каждом $k \in \mathbb{N}$ функция $\sqrt{h_k(t)}$ выпукла на промежутке $(0, \frac{1}{2}]$.

Доказательство. Из леммы 3 следует, что

$$h(t) \sim \sum_{k \in K} g_k(t),$$

где g_k определены в (10). При $k \in K$, $k \geq k_0$, где k_0 — некоторое натуральное число, справедливы неравенства $H_{k+1}(t) \geq H_k(t)$, $t \in \mathbf{R}$, и $H'_{k+1}(2^{-k-1}) - H'_k(2^{-k-1}) < 0$. Их можно проверить, используя утверждения 2) и 3) леммы 1. Определим неотрицательные функции $v_k(t)$ для всех $k \geq k_0$, $k \in K$ следующим образом. При $0 < t \leq 2^{-k-1}$ пусть $v_k(t) = g_k(t)$. При $t > 2^{-k-1}$ потребуем, чтобы

$$\sqrt{v_k(t)} = \max\{y'_k(2^{-k-1})t + y_k(2^{-k-1}) - 2^{-k-1}y'_k(2^{-k-1}), 0\},$$

где $y_k(t) = \sqrt{g_k(t)}$, а под производной в точке $t = 2^{-k-1}$ понимается производная слева. Тогда функции $v_k(t)$ при $k \in K$, $k \geq k_0$ удовлетворяют требованиям 2) и 3) леммы 4. Снова используя утверждения 2) и 3) леммы 1 и вычисляя $y_k(2^{-k-1})$, $y'_k(2^{-k-1})$, можно показать, что существует такое $p \in \mathbf{N}$ (зависящее от h , но не от k), что неравенство $v_k(t) \neq g_k(t)$, $k \in K$, возможно лишь при $t \in (2^{-k-1}, 2^{-k+p}]$. При этом в силу (11)

$$\begin{aligned} |v_k(t) - g_k(t)| &\leq |g_k(t)| + v_k(2^{-k-1}) = |g_k(t)| + g_k(2^{-k-1}) \\ &\leq 2 \max(L(2^{k+1}) - L(2^k), \varepsilon(2^k) L(2^k)) =: \tau_k = o(L(2^k)). \end{aligned}$$

Итак, в каждой точке $t \in (2^{-q-1}, 2^{-q}]$, $q \in \mathbf{N}$, не более чем $p+1$ из функций $v_k(t) - g_k(t)$, $k \in K$, отличны от нуля, и их сумма $Y(t)$ удовлетворяет неравенству

$$|Y(t)| \leq \sum_{j=q}^{q+p} \tau_j.$$

Следовательно, для каждого достаточно малого $t > 0$, полагая $q = [-\log_2 t]$, имеем

$$\frac{|Y(t)|}{h(t)} \leq \frac{\tau_q + \dots + \tau_{q+p}}{L(2^q)} \rightarrow 0 \quad (12)$$

при $t \rightarrow 0$. Окончательно

$$h(t) \sim \sum_{k < k_0, k \in K} g_k(t) + Y(t) + \sum_{k \geq k_0, k \in K} v_k(t),$$

причем из (12) и ограниченности функций $g_k(t)$ следует, что

$$\sum_{1 \leq k < k_0, k \in K} g_k(t) + Y(t) = o(h(t)), \quad t \rightarrow 0.$$

Осталось перенумеровать функции $\{v_k(t), k \in K, k \geq k_0\}$. Лемма доказана.

Следуя [6], для стационарных последовательностей будем рассматривать спектральную плотность, определенную на отрезке $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$. Точнее, стационарная в широком смысле последовательность $\{Z_n, n \in \mathbf{N}\}$ имеет спектральную плотность $f(t)$, $t \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$, если для любого $n \in \mathbf{Z}_+$

$$\text{cov}(Z_1, Z_{n+1}) = \int_{-1/2}^{1/2} \exp\{2\pi i n t\} f(t) dt.$$

Лемма 5. Пусть центрированная стационарная в широком смысле последовательность $X = \{X_n, n \in \mathbf{N}\}$ имеет четную спектральную плотность $f(t)$, $t \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$, такую, что $f(1/t) \sim L(t)$ при $t \rightarrow +\infty$, где $L(t)$ — неубывающая медленно меняющаяся функция. Тогда $K_n(X) \sim L(n)$ при $n \rightarrow \infty$.

Доказательство. По формуле для дисперсии частичной суммы стационарного процесса (см. [7, теорема 18.2.1]), делая в интеграле замену $s = nt$, имеем

$$\frac{DS_n}{nL(n)} = \int_{-1/2}^{1/2} \frac{\sin^2 \pi n t}{nL(n) \sin^2 \pi t} f(t) dt = 2 \int_0^{n/2} \frac{\sin^2 \pi s}{n^2 \sin^2(\pi s/n)} \frac{f(s/n)}{L(n)} ds. \quad (13)$$

При $1 \leq s \leq n/2$ имеем $f(s/n) \leq C_1 L(n/s) \leq C_1 L(n)$, где $C_1 := \sup_{t \geq 2} f(1/t)/L(t) < \infty$ в силу условий леммы. При $0 < s < 1$, используя интегральное представление (8) для функции $L(t)$, получаем, что

$$\frac{f(s/n)}{L(n)} \leq C_1 \frac{L(n/s)}{L(n)} = C_1 \exp \left\{ \int_n^{n/s} \frac{\varepsilon(u)}{u} du \right\},$$

где $\varepsilon(u) \rightarrow 0$ при $u \rightarrow \infty$. Пусть u_0 — такое число, что $\varepsilon(u) < \frac{1}{2}$ при $u \geq u_0$, тогда при $n > u_0$ и $0 < s < 1$

$$\frac{f(s/n)}{L(n)} \leq C_1 s^{-1/2}.$$

Кроме того, элементарная оценка показывает, что $n^2 \sin^2(\pi s/n) \geq 4s^2$ при $0 < s \leq n/2$ и всех $n \in \mathbb{N}$. Таким образом, подынтегральное выражение в правой части (13) при $n > u_0$ мажорируется интегрируемой функцией $C_1 \max\{s^{-1/2}, 1\} s^{-2} \sin^2 \pi s$. Следовательно, в правой части (13) можно перейти к пределу при $n \rightarrow \infty$ под знаком интеграла:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{DS_n}{nL(n)} = 2 \int_0^\infty \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(s/n) \sin^2 \pi s}{n^2 L(n) \sin^2(\pi s/n)} ds = 2 \int_0^\infty \frac{\sin^2 \pi s}{\pi^2 s^2} ds = 1.$$

Отсюда аналогично [6, лемма 2.7] следует утверждение леммы 5.

Перейдем к построению примера искомой последовательности. Пусть $\{h_k(t), k \geq 1\}$ — функции, фигурирующие в лемме 4. Продолжим их на отрезок $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ так, чтобы они были непрерывными на этом отрезке четными функциями. Тогда $\sqrt{h_k(t)}$ — четная кусочно-гладкая функция на $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ при каждом $k \in \mathbb{N}$, и, следовательно, она представляется равномерно сходящимся рядом Фурье

$$\sqrt{h_k(t)} = a_{0,k} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} a_{n,k} \cos(2\pi n t), \quad |t| \leq \frac{1}{2}.$$

Согласно лемме 2.6 работы [6], из монотонности и выпуклости $\sqrt{h_k(t)}$ при $t > 0$ следует, что $a_{n,k} \geq 0$ при всех $n \in \mathbb{Z}_+$, $k \in \mathbb{N}$. Для $M \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}$ пусть

$$\varphi_{M,k}(t) = a_{0,k} + 2 \sum_{n=1}^M a_{n,k} \cos(2\pi n t), \quad f_{M,k}(t) = \varphi_{M,k}^2(t).$$

Для каждого $k \in \mathbb{N}$ пусть $N(k)$ — такое натуральное число, что

$$\sup_{|t| \leq 1/2} |\sqrt{h_k(t)} - \varphi_{N(k),k}(t)| \leq 2^{-k} \min\{1, \lambda_k^{-1/2}\},$$

где $\lambda_k = \sup_{|t| \leq 1/2} |h_k(t)|$. Тогда

$$\begin{aligned} & \sup_{|t| \leq 1/2} |h_k(t) - (\varphi_{N(k),k}(t))^2| \\ & \leq 2^{-k} \min\{1, \lambda_k^{-1/2}\} \left(2\lambda_k^{1/2} + 2^{-k} \min\{1, \lambda_k^{-1/2}\} \right) \leq 3 \cdot 2^{-k}, \quad k \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Поэтому ряд

$$f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} f_{N(k),k}(t)$$

сходится, и $|f(t) - \tilde{h}(t)| \leq 3$ для любого $t \in (0, \frac{1}{2}]$, где $\tilde{h}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} h_k(t)$. Таким образом, $f(t) \sim \tilde{h}(t) \sim L(1/t)$ при $t \rightarrow 0$.

Пусть $\{n_k, k \in \mathbf{N}\}$ — такая возрастающая последовательность натуральных чисел, что $k/B(n_k) \rightarrow 0$ и $R(2^{k+1})/B(n_k) \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$, здесь $B(n)$ фигурирует в формулировке теоремы 1 и

$$R(x) = L(x) + \frac{x}{2} (1 + \sqrt{2}) L'(x), \quad x \geq 1. \quad (14)$$

Положим $\alpha_k = 2^k n_k (1 + 2N(k))$. Рассмотрим семейство независимых случайных величин $\{\xi_{n,k}, n \in \mathbf{Z}, k \in \mathbf{N}\}$ таких, что величина $\xi_{n,k}$ принимает значения $\pm \sqrt{\alpha_k}$ с вероятностью $1/(2\alpha_k)$ и значение 0 с вероятностью $1 - 1/(2\alpha_k)$. Тогда $E\xi_{n,k} = 0$, $D\xi_{n,k} = 1$ для всех k, n . Для каждого $k, n \in \mathbf{N}$ введем случайные величины

$$X_{n,k} = \sum_{j=-N(k)}^{N(k)} a_{|j|,k} \xi_{j+n,k}.$$

При каждом $k \in \mathbf{N}$ последовательность $\{X_{n,k}, n \in \mathbf{N}\}$ строго стационарная и центрированная, а ее спектральная плотность равна $f_k(t)$, $t \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$. При каждом n случайные величины $\{X_{n,k}\}$ независимы, при этом

$$\sum_{k=1}^{\infty} D X_{n,k} = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{-1/2}^{1/2} f_k(t) dt = \int_{-1/2}^{1/2} f(t) dt < \infty,$$

так как все $f_k(t) \geq 0$ и $f(t) \sim L(1/t) < C_2 t^{-1/2}$ для некоторого $C_2 > 0$ и всех $t \in (0, \frac{1}{2}]$. Таким образом, ряд $\sum_k X_{n,k}$ сходится в среднем квадратическом и с вероятностью 1 к случайной величине X_n , и последовательность $X = \{X_n, n \in \mathbf{N}\}$ является строго стационарной центрированной со спектральной плотностью $f(t)$.

Пусть $S_n = \sum_{j=1}^n X_j$. По лемме 5 имеем $K_n(X) \sim L(n)$ при $n \rightarrow \infty$. Далее, так как все $a_{n,k} \geq 0$, то при каждом k случайная последовательность $\{\sum_{j=1}^k X_{n,j}, n \in \mathbf{N}\}$ — ассоциированная, поэтому и последовательность X обладает этим свойством. Покажем, что $S_{n_k}/\sqrt{n_k B(n_k)} \rightarrow 0$ по вероятности, когда $k \rightarrow \infty$. Для $n, r \in \mathbf{N}$ обозначим $\sigma_{n,r}^2 = D \sum_{j=1}^n X_{j,r}$.

Лемма 6. Для любых $n, r \in \mathbf{N}$ справедливо соотношение $\sigma_{n,r}^2 \leq n(3 + R(2^{r+1}) - R(2^r))$, где функция $R(x)$ введена в (14).

Доказательство. Имеем

$$\sigma_{n,r}^2 = \int_{-1/2}^{1/2} \frac{\sin^2 n\pi t}{\sin^2 \pi t} f_r(t) dt \leq n \sup_t f_r(t) \leq n \left(3 + \sup_t h_r(t) \right),$$

откуда, учитывая, что функция $h_r(t)$ четна, при $t \in [0, \frac{1}{2}]$ не возрастает и $h_r(0) = H_{r+1}(0) - H_r(0)$, где функции H определены в (9), получаем требуемое утверждение.

Далее, пусть

$$S_{n_k} = V_k + W_k,$$

где

$$V_k = \sum_{r=1}^k \sum_{j=1}^{n_k} X_{j,r}, \quad W_k = \sum_{r=k+1}^{\infty} \sum_{j=1}^{n_k} X_{j,r}.$$

Имеем

$$E V_k = 0, \quad \frac{D V_k}{n_k B(n_k)} = \frac{\sum_{r=1}^k \sigma_{n_k,r}^2}{n_k B(n_k)} \leq \frac{3k + R(2^{k+1})}{B(n_k)} \rightarrow 0$$

при $k \rightarrow \infty$ в силу леммы 6 и выбора последовательности $\{n_k\}$. Оценим второе слагаемое, W_k :

$$\begin{aligned} P\{W_k \neq 0\} &\leq \sum_{r=k+1}^{\infty} P\left\{\sum_{j=1}^{n_k} X_{j,r} \neq 0\right\} \leq \sum_{r=k+1}^{\infty} n_k P\{X_{1,r} \neq 0\} \\ &\leq \sum_{r=k+1}^{\infty} n_r (1 + 2N(r)) \alpha_r^{-1} \leq 2^{-k} \rightarrow 0 \end{aligned}$$

при $k \rightarrow \infty$. Итак,

$$\frac{V_k + W_k}{\sqrt{n_k B(n_k)}} \rightarrow 0 \quad \text{по вероятности при } k \rightarrow \infty.$$

Теорема доказана.

Автор благодарит профессора А. В. Булинского за постановку задачи и внимание к работе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Newman C. M.* Normal fluctuations and FKG inequalities. — *Comm. Math. Phys.*, 1980, v. 74, № 2, p. 119–128.
2. *Esary J. D., Proschan F., Walkup D. W.* Association of random variables, with applications. — *Ann. Math. Statist.*, 1967, v. 38, № 5, p. 1466–1474.
3. *Булинский А. В.* Функциональный закон повторного логарифма для ассоциированных случайных полей. — *Фундам. прикл. матем.*, 1995, т. 1, № 3, с. 623–639.
4. *Bulinski A. V.* On the convergence rates in the CLT for positively and negatively dependent random fields. — *Probability Theory and Mathematical Statistics*. Ed. by I. A. Ibragimov and A. Yu. Zaitsev. Amsterdam: Gordon and Breach, 1996, p. 3–14.
5. *Dabrowski A. R., Jakubowski A.* Stable limits for associated random variables. — *Ann. Probab.*, 1994, v. 22, № 1, p. 1–16.
6. *Herrndorf N.* An example on the central limit theorem for associated sequences. — *Ann. Probab.*, 1984, v. 12, № 3, p. 912–917.
7. *Ибрагимов И. А., Линник Ю. В.* Независимые и стационарно связанные величины. М.: Наука, 1965, 524 с.
8. *Биллингсли П.* Сходимость вероятностных мер. М.: Наука, 1977, 351 с.
9. *Якымив А. Л.* Многомерные тауберовы теоремы и их приложение к ветвящимся процессам Беллмана–Харриса. — *Матем. сб.*, 1981, т. 115, № 3, с. 463–478.

Поступила в редакцию
14.VII.2003

Исправленный вариант
25.III.2004

© 2005 г.

BUCKDAHN R.*, ENGELBERT H.-J.**

A BACKWARD STOCHASTIC DIFFERENTIAL EQUATION WITHOUT STRONG SOLUTION¹⁾

В предыдущей статье авторов и А. Рашкану (Теория вероятн. и ее примен., 2004, т. 49, № 1) было введено понятие слабого решения общего обратного стохастического дифференциального уравнения (ОСДУ). Там же был приведен пример слабого решения некоторого ОСДУ, которое не является сильным решением, т.е. решением в классическом смысле. Однако рассмотренное решение не единственно по распределению и, как

* Laboratoire des Mathématiques, CNRS-FRE 2218, Université de Bretagne Occidentale, 6 Avenue Victor Le Gorgeu, F-29200 Brest, France; e-mail: Rainer.Buckdahn@univ-brest.fr

** Institut für Stochastik, Friedrich Schiller-Universität, Ernst-Abbe-Platz 1–4, D-07743 Jena, Germany; e-mail: engelbert@minet.uni-jena.de

¹⁾ Work supported in part by the European Community's Human Potential Programme under contract HPRN-CT-2002-00281 (Evolution Equations).